

Der

geometrische Anschauungsunterricht,

ein Lehr- und Aufgabenbuch

zum

Gebrauche für Lehrer und Schüler der unteren Klassen höherer Schulanstalten und der oberen Klassen von Mittel- und Bürgerschulen,

in neuer methodischer Weise bearbeitet

von

A. Lorey.



Nebst einem Anhange über das Wichtigste aus der mathematisch-astronomischen Geographie.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

Eisenach.
Verlag von Joh. Friedr. Baerecke.
1859.





Vorrede.

Schon in dem Vorworte zu „dem Lehrbuche der ebenen Geometrie nach genetisch-heuristischer Weise ꝛc. von A. Lorey, Langensalza, Schulbuchhandlung 1855" wurde darauf hingedeutet, wie die Erweckung der mathematischen Grundbegriffe und Abstraktionen durch die Anschauung des natürlichen oder materiellen Körpers, der Flächen an ihm, der Linien an den Flächen, der Punkte an den Linien Statt finden müsse. Es lag schon damals im Plane, einen Kursus des geometrischen Anschauungsunterrichtes vorauszuschicken, bevor man sich zu der ebenen Geometrie und zur Stereometrie in wissenschaftlicher und systematischer Weise hinwendet. Ein solcher Anschauungskursus vermittelt also die Abstraktion und bereitet zum eigentlichen geometrischen Unterrichte vor; derselbe stärkt und weckt die geometrische Anschauung und Phantasie; er ist darauf berechnet, die Denkthätigkeit und Selbständigkeit des Schülers zu fördern, theils durch den entwickelnden, genetisch-heuristischen Weg, theils durch die zahlreichen Aufgaben, welche von dem Schüler gelöst werden sollen, sowohl durch Rechnung, als auch durch Konstruktion; soll ferner Festigkeit und Geläufigkeit in der Linien-, Flächen- und Körperberechnung erzeugen und also für das Leben praktisch werden. Die leitenden Gedanken des Buches, die Richtung und Bestimmung desselben, die Methode mögen in einzelnen Sätzen einen Ausdruck finden.

1. Der wissenschaftliche geometrische Unterricht und die mit demselben zusammenhängenden Übungen dürfen nicht zu

frühe, im Allgemeinen nicht vor dem 14ten Jahre ihren Anfang nehmen, wenn auf wirkliche Einsicht und guten Erfolg gerechnet werden soll.

2. Der wissenschaftliche, geometrische Unterricht muß durch einen geometrischen Anschauungsunterricht vorbereitet werden, damit der Schüler, welcher sich mit der Geometrie in wissenschaftlicher Form beschäftigt, mit dem zu verhandelnden Stoffe, den wesentlichsten arithmetischen und geometrischen Grundsätzen oder Grundanschauungen, den Raumgrößen und ihren gegenseitigen Beziehungen schon einigermaßen bekannt sei, damit seine Abstraktion, die Phantasie, die Festigkeit im Rechnen und Konstruiren vorgebildet sei.

3. Durch die Anschauung des physikalischen Körpers, der Flächen an demselben, der Linien an den Flächen, der Punkte an den Linien soll die Entwickelung der mathematischen, besonders geometrischen abstrakten Begriffe geweckt werden, was ohne die Sinne und ihre Thätigkeit, also ohne Anschauung im allgemeinen Sinne unmöglich ist.

4. Durch den Anschauungsunterricht soll die geometrische Phantasie vorgebildet und geübt werden.

5. Der Anschauungsunterricht soll die Fertigkeit im Lösen von Aufgaben rechnerischer und konstruktiver Natur befördern, das Können vermitteln. Der Schüler soll im Zeichnen von Geraden, Winkeln, Figuren, im Theilen der Geraden, Errichten und Fällen von Senkrechten, im Ziehen von Parallelen, im Gebrauche des Maßstabes, im Zeichnen verjüngter Figuren, im Messen der Geraden und Winkel 2c. vollständig gewandt und geübt werden, damit derselbe auf der wissenschaftlichen Stufe sich freier bewegen und leichter auffassen könne.

6. Der mathematische, besonders der geometrische Unterricht trug und trägt in vielen Schulen der älteren und neuen Zeit zur Bildung der Schüler hauptsächlich darum

weniger bei, weil die Stufe der Anschauung und die Übung auf derselben in der Regel zu frühe verlassen wurde. Das Abstraktionsvermögen war nicht geweckt; der Schüler begriff nicht, was der Lehrer wollte; die Beschäftigung mit der Geometrie schien zur Plage der Jugend erfunden; der Schüler sah gar nicht ein, warum z. B. der Lehrer sich und ihn mit der Kongruenz der Figuren und andern Dingen herumplagte, während der Anschauungsunterricht die Konstruktion der Figur aus hinreichend vielen bestimmenden Bestandtheilen nachweist; der Schüler verliert das Interesse, wenn er nicht eine Anwendung seiner Wissenschaft auf das Leben sieht. Das soll der Anschauungsunterricht vorbereiten und vermitteln helfen; nach demselben wird es dem Schüler nicht an Interesse fehlen. Die Theilnahme und das Verständniß bringt dann den sachlichen und formellen, auf Verstand und Charakter bedeutungsvollen Einfluß.

7. Es wird stets darauf Rücksicht genommen, die geometrische Anschauung für das Leben praktisch zu machen. Was der Schüler auf das Leben anwenden kann, worin er einen Zusammenhang mit dem Leben findet, das hat für ihn Interesse. Rechnerische und konstruktive Aufgaben müssen stets praktischer Natur, aus dem Leben und seinem Verkehre genommen sein.

8. Der Gedanke der Koncentration ist in dem Buche insoweit berücksichtigt, als man Beispiele aus verwandten Disciplinen herbeigezogen hat und dadurch den in unsrer Zeit oft sehr disparaten Unterrichtsstoff vereinigt und befestigt, wenn dieß auch nicht in dem Grade beim geometrischen Anschauungsunterrichte möglich ist, wie beim Rechenunterrichte, welcher seine Aufgaben aus den verschiedensten Disciplinen, der Geometrie, Physik, Chemie, Geographie rc. entlehnt und also das Verständniß und Können in denselben unterstützt.

9. Der Schüler soll stets zur Denkthätigkeit und zum technischen Können angeleitet werden und zwar in genetisch-heuristischer oder entwickelnder Weise. Durch Betrachtung und Vergleichung der verschiedenen Körper, Flächen und Linien mit Rücksicht auf ihre Entstehung durch Bewegung soll der Schüler zu den allgemeinsten Wahrheiten, Sätzen und Eigenschaften, welche sich auf die Raumgrößen beziehen, hingeleitet werden. Selbst soll er Alles finden, aussprechen, machen. So wird derselbe finden, daß alle Körper 3 Ausdehnungen, alle Flächen 2, alle Linien 4, der Punkt keine haben; daß alle Raumgrößen eine gewisse Größe und Gestalt haben, und daß man dieselben in Bezug auf dieselben mit einander vergleichen kann, und daß sie in beiderlei, oder nur in einer oder gar keiner Beziehung mit einander übereinstimmen können; daß man vom Stoffe, von der Farbe und sonstigen Eigenschaften der Körper abstrahiren müsse; daß alle Körper von einer oder mehreren Flächen eingeschlossen sind; daß die Flächen verschiedenartig sind; daß alle Raumgrößen durch Bewegung entstehen und sich dabei die wesentlichsten Wahrheiten über Gerade, Winkel, Figuren, Flächen- und Körperwinkel, Stellung und Lage der Linien und Flächen zu einander, die Messung der Linien, Flächen und Körper ꝛc. entwickeln und finden lassen.

10. Das Buch zerfällt bezüglich der Betrachtungen und Aufgaben in zwei Theile, und vertritt also einen zweijährigen Kursus in einer Klasse oder ist auf zwei Klassen berechnet. Zuerst wird das Wichtigste aus den Abschnitten und Aufgaben durchgenommen, im zweiten Jahre oder bei der Wiederholung das Ganze. Unter Umständen läßt sich auch das Wichtigste in zwei halben Jahren abmachen, was aber in Bezug auf die Schüler, ihre Zeit und Neigung besondre Voraussetzungen erfordert. Umgekehrt wird das Buch oft genug Stoff geben für drei Jahre.

11. In analytischer Weise, vom Körper ausgehend, werden die wichtigsten Merkmale, Eigenschaften und Messungen der Raumgrößen zuerst entwickelt; später in synthetischer. Insofern die Eigenschaften der Raumgrößen zum Theil aus ihrer Entstehung abgeleitet und vom Schüler selbst gefunden werden, ist die Methode genetisch-heuristisch.

12. Die einzelnen Wahrheiten über die Raumgrößen und ihre Eigenthümlichkeiten und Messung werden an einem Körper stets so gewonnen, daß an einem und demselben Objekt Alles in Betrachtung gezogen wird, was sich auf Linien, Flächen und Körperliches bezieht. Es sind also folgende Kapitel vorhanden: der Würfel; die Säulen; der Cylinder; die Pyramide; der Kegel; die regelmäßigen Körper; die Kugel. Eine Anordnung und Aufstellung des Stoffes in der Weise der Genesis, daß das Folgende bezüglich des Stoffes und der logischen Form mit Nothwendigkeit durch das Vorhergehende bedingt wäre, wie dieß bei einem Buche in wissenschaftlicher Form nothwendig wäre, konnte aus leicht begreiflichen Gründen nicht immer gegeben werden, da die Betrachtung der einzelnen Körper und Raumgrößen erst zu einem Unterrichte in wissenschaftlicher Form vorbereiten sollen.

13. Das Buch setzt zur Lösung der Aufgaben, auch der schwereren, nur Bekanntschaft mit den Decimalbrüchen, Proportionen, dem Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel voraus.

14. Der Schüler soll das Buch in seiner Hand haben, damit derselbe vom Lehrer zur Vorbereitung, Wiederholung, zur Lösung der rechnerischen und konstruktionellen Aufgaben, sowie zur Anfertigung der Körpernetze und Körper angewiesen werden kann. Die Lösungen der Aufgaben, unter Umständen mit der kürzeren oder umständlicheren Andeutung des Weges, der Art und Weise der Auflösung, sollen in einem besonderen Hefte erscheinen.

15. Ein jeder Schüler soll wo möglich einen Kasten mit den wichtigsten Körpern besitzen, in welchem auch eine Anzahl Kubiklinien oder Kubikzolle sich befinden müssen, damit das Aufbauen der Körper, der Säulen zc. Statt finden kann und der Schüler rein anschaulich das Wachsen des Umfanges, der Oberfläche und des Kubikinhaltes mit dem verhältnißmäßigen Wachsen der Kante anschauen und einsehen lernt. In dem Kasten sollen sich auch die wesentlichsten Dreiecke, Parallelogramme zc. vorfinden zur Entwickelung der Begriffe über Kongruenz zc. Solche Kästen wird der Drechslermeister Jäckel in Eisenach anfertigen und vorräthig halten.

16. Es wird vorausgesetzt, daß die Schule, wo möglich jeder Schüler, die wichtigsten Maßstäbe besitze, wie dieselben dem Kasten mit den Körpern beigegeben werden können.

17. Dem Buche ist ein Anhang beigegeben, welcher das Allerwesentlichste aus der mathematisch-astronomischen Geographie enthält. Man kann darüber streiten, ob der Anhang mit Nothwendigkeit zum Buche gehöre. Das soll nicht behauptet werden; praktische Gründe haben dazu bestimmt. Denn einmal befindet sich in den Lehrbüchern der Geographie die mathematische Geographie oft zu oberflächlich, zuweilen unrichtig behandelt; dann aber ist es natürlich, daß man dem Lehrer der Mathematik und Physik, wie den mathematischen, so den physikalischen Theil der Geographie lieber anvertraut, als dem sonst vielleicht recht vortrefflichen Lehrer der Geographie in rein räumlicher, politischer, statistischer, ethnographischer, geschichtlicher zc. Beziehung. Endlich schließt sich der Anhang in natürlicher Weise an das Kapitel von der Kugel an.

18. Die Zusammengehörigkeit der geometrischen Betrachtungen über die Raumgrößen, so daß die, welche die Linien, Flächen und Körper betreffen, nicht getrennt sind, sondern

an einem und demselben Körper vorgenommen werden, so daß in einzelnen Kapiteln der ganze Anschauungsunterricht in Bezug auf Linien, Flächen und Körper abgemacht wird, scheint für die erste Bildungsstufe von besonderem Vortheile.

19. Für wen ist das Buch berechnet? a) für Volksschullehrer und Seminaristen, welche sich ihren geometrischen Bildungsstoff in anschaulicher Weise erwerben wollen; b) für die untern Klassen höherer Bildungsanstalten als Vorbereitung auf den wissenschaftlichen Unterricht; c) für die beiden obersten Klassen gehobener Bürgerschulen, für Mittelschulen, in denen zwar die Geometrie nicht in wissenschaftlicher Form auftreten, aber den Schülern doch der geometrische Bildungsstoff und seine Anwendung auf das Leben und sein Einfluß auf die geistige Bildung deutlich werden soll. Während das Buch für Bürgerschulen genügend und abschließend ist, das ganze Bildungsmaterial enthält, ist es für höhere Anstalten nur als ein vorbildendes zu betrachten.

20. Da anschaulich unterrichtet werden soll, die Anschauung aber das Irrationale nicht kennt, so ist auf dasselbe und die damit zusammenhängenden Näherungswerthe erst dann hingedeutet, nachdem beim gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck die Inkommensurabilität zwischen Hypotenuse und Kathete sich durch Rechnung herausstellt.

21. Die Literatur, welche zum Theil benutzt wurde, von welcher aber in der Hauptsache vollständig abgewichen worden ist, wie eine nähere Betrachtung und Vergleichung leicht beweisen wird, war eine mannigfache. (Pestalozzi, Herbart, Diesterweg, Raumer, Gräfe, Scharpf, Zizmann, Fresenius, Spitz 2c.) Die Methode, die Betrachtungen über Linien, Flächen und Körperliches an einem und demselben Körper vorzunehmen oder doch in Beziehung zu setzen ist schon, wenn auch nicht für den Anschauungsunterricht, so

doch für den wissenschaftlichen von Müller, Bretschneider und dem französischen Mathematiker Mahistre angebahnt worden. (Lehrbuch der vergleichenden Geometrie von Mahistre; aus dem Franz. übersetzt und mit Aufgaben vermehrt von A. Lorey. Weimar, 1845.)

22. Der geometrische Anschauungsunterricht ist schon seit einer Reihe von Jahren von dem Verfasser nach dieser Methode ertheilt worden. Die Aufsichtsbehörden sind mit dem Erfolge der Methode in Bezug auf das Interesse, das Wissen und Können der Schüler und den bildenden Einfluß auf dieselben stets zufrieden und anerkennend gewesen.

23. In dem Kapitel von der ganzen und abgekürzten Pyramide, von dem Kegel, von den regelmäßigen Körpern und der Kugel sind einige Sätze aufgenommen worden, welche in der Arithmetik und der Formelentwickelung schon einige Gewandtheit voraussetzen. Dieß geschah, um dem Lehrer auf dem Gebiete der ebenen Geometrie und Stereometrie etwas Vollständigeres darzubieten.

So möge denn das Buch allen Freunden und Lehrern der Geometrie nach fortschreitender Methode, welche in dem Falle sind, Anschauungsunterricht zu ertheilen, mag derselbe vorbilden oder abschließen, bestens empfohlen sein und eine so freundliche Aufnahme finden, wie desselben Verfassers „Lehrbuch der ebenen Geometrie". Berichtigungen, Verbesserungen, Entgegnungen wird der Verfasser in seinem und der Schule Interesse gern annehmen; „wer fertig ist, dem ist Nichts recht zu machen; der Werdende wird immer dankbar sein"!

Eisenach, den 8. April 1858.

A. Lorey.

Inhaltsverzeichniß.

des Rhombus; Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt der rhombischen Säule; Netz. Vergleichung ähnlicher rhombischer Säulen nach Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt.

4. Die rhomboidische Säule. Betrachtung und Vergleichung derselben in ähnlicher Weise, wie bei den früheren. Parallelopiped, Parallelogramm. Das Rhomboid, seine Eigenschaften, seine Konstruktion und Fläche. Umfang, Oberfläche, Kubikinhalt der rhomboidischen Säule. Vergleichung ähnlicher, rhomboidischen Säulen nach Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt.

Zusammenfassung der Eigenschaften der Parallelogramme; die Konstruktionsmöglichkeit derselben aus hinreichend gegebenen Bestandtheilen; Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe; Verwandlung des Oblongums in ein Quadrat; Theilung einer Geraden in gleiche oder verhältnißmäßige Theile; Theilung eines Pgms in derselben Weise; ähnliche Pgme; Winkelgleichheit und Seitenverhältnißgleichheit bedingen die Ähnlichkeit; Zeichnung von Pgmen nach verjüngtem Maßstabe; Verhältniß der ähnlichen Pgme bezüglich ihrer Umfänge und Flächen; Betrachtung der Dreiecke, in welche der Rhombus oder das Rhomboid zerfällt. Netz.

5. Die dreieckige Säule. Entstehung, Betrachtung und Vergleichung derselben mit den früheren Säulen. Umfang, Oberfläche, Kubikinhalt. Vergleichung ähnlicher dreieckiger Säulen bezüglich des Umfanges, der Oberfläche und des Kubikinhaltes. Netz.

Zusammenhängende, ausführlichere Betrachtung des Dreiecks und Entwickelung seiner Haupteigenschaften bezüglich der Seiten und Winkel; die verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten aus hinreichend gegebenen Bestandtheilen; die Centricität der Dreiecke nach Ecken und Seiten; die Senkrechte von einem P. außerhalb der Geraden auf dieselbe; Vergleichung der Dreiecke nach Kongruenz; nach Gleichheit. Fläche des Dreiecks. Verwandlung eines Vierecks in ein Dr.; des Dreiecks in ein Pgm und für den Fall der Schiefwinkligkeit in ein rechtwinkliges und für den Fall, daß es ein Oblongum wäre, in ein Quadrat. Die ähnlichen Dreiecke, ihre Entstehung, die Bedingungen ihrer Ähnlichkeit. Konstruiren ähnlicher Dreiecke; Verhältniß der ähnlichen Dreiecke bezüglich des Umfangs und der Fläche; Messung von Linien, welche ganz, nur theilweise oder gar nicht zugänglich sind; Messung von Höhen, der Sonnenhöhe, der Entfernung der Himmelskörper; die proportionalen Linien und die verschiedene Weise dieselben zu finden; Theilung und Verwandlung des Dreiecks; der goldene Schnitt.

6. Die allgemein vierseitige Säule (trapezische und trapezoidische); Entstehung, Betrachtung und Vergleichung derselben, wie bei den früheren Säulen. Fläche des Trapezes und Trapezoides; Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt derselben; Vergleichung ähnlicher vierseitiger Säulen nach Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt. Netze.

7. Die Eigenschaften aller Säulen; die vielseitige, besonders regelmäßige Säule. Das regelmäßige Vieleck, mit seinen gleichen Seiten und Winkeln; Centricität, Eckenhalbmesser, Seitenhalbmesser; Inhalt des regelmäßigen Vielecks; Umfang, Oberfläche, Inhalt; Vergleichung ähnlicher, regelmäßiger Säulen in Bezug auf Umfang, Oberfläche und Inhalt. Netze. Schwerpunkt.

8. Die schiefen Säulen; Entstehung, Betrachtung; Vergleichung. Netz. Umfänge; Oberflächen; eine schiefe und eine senkrechte Säule von gleicher Grundfläche und Höhe haben gleichen Inhalt.

Die Eigenschaften des Vierecks, Trapezes und Trapezoides im Besondern; Konstruktion desselben; ähnliche Vielecke; Merkmale und Bedingungen der Ähnlichkeit; Verhältniß der ähnlichen Vierecke in Bezug auf Linien und Flächen; Zeichnung von verjüngten Vierecken; vom Vieleck, besonders vom regelmäßigen; Verwandlung eines Vielecks in ein Quadrat; ähnliche Vielecke; Verhältniß derselben bezüglich des Umfanges und der Fläche.

Vergleichung der Säulen nach Größe und Gestalt.

9. Aufgaben: a) rechnerische über die quadratische Säule nach ihrer Oberfläche, ihrem Kubikinhalte und Gewichte. b) Ebenso über die Berechnung des Oblongums und der Oberfläche und des Kubikinhaltes der oblongischen Säule, Konstruktives über das Oblongum. c) Aufgaben über alle übrigen Säulen, bezüglich des Umfanges, der Flächen, der Oberflächen. d) Konstruktive Aufgaben über Pgme überhaupt; Zeichnung ähnlicher Pgme; Zeichnung des rechtwinkligen Dreiecks; des gleichschenkligen; des gleichseitigen; mancherlei Aufgaben über ähnliche Dreiecke bezüglich ihrer ähnlichen Linien, Umfänge und Flächen; Zeichnung ähnlicher Dreiecke und Pgme von bestimmter Größe; Summirung von Pgmen und Dreiecken. e) Rechnerische Aufgaben, welche sich auf das Vier- und Vieleck beziehen. f) Konstruktive Aufgaben; Zeichnung ähnlicher Vier- und Vielecke. g) Das regelmäßige Vieleck; Zusammenhang zwischen Eckenhalbmesser, Seitenhalbmesser und Seite; darauf bezügliche Tabelle mit ihren Verwandlungsfaktoren; rechnerische Aufgaben; Konstruktives. Schwerpunkt von Drei-, Vier- und Vielecken. h) Aufgaben über Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt der mehr als vierseitigen Säulen. Die schiefen Säulen.

III. Die Walze oder der Cylinder. S. 171.

Walzenförmige Körper im Leben. Betrachtung der Walze in Bezug auf ihre Ausdehnungen, die Flächen, von denen dieselbe eingeschlossen ist; 3 Flächen, zwei ebene, krummlinige; eine einseitig gekrümmte. Vergleiche und Unterschiede in Bezug auf die früheren Körper. Kreislinie; Kreisfläche. Das Wichtigste über den Kreis. Der Kreis in Bezug auf die Winkelmessung; der Transporteur; Linie, Winkel beim Kreis; Abschnitt (Segment), Ausschnitt (Sektor). Scheibe. Entstehung der Walze auf verschiedene Weise; elliptische Walze; Ausmessung des Umfanges der Walze; Angabe, wie oft der Durchmesser im Umfange enthalten ist oder π; Fläche des Kreises; Berechnung der Länge oder Fläche für eine gewisse Gradzahl des Kreises; Kreise als ähnliche Figuren; wie bei den Kreisen von dem Wachsen der Halbmesser ein Wachsen der Kreisumfänge und Kreisflächen abhängt. Das Netz der Walze. Der Kubikinhalt der Walze. Ähnliche Walzen und ihr Verhalten in Bezug auf Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt. Schatten der Walze.

Näheres über den Kreis. Lage eines Punktes, einer Geraden zum Kreise (Tangente, Sehne, Sekante), Winkel im Kreise; Proportionen beim Kreise. Die regelmäßigen Figuren, welche in und um den Kreis beschrieben werden können. Die Fläche der regelmäßigen Figuren im Werthe des Quadrats

ihrer Seite; die Seite der regelmäßigen Figuren im Werthe des Halbmessers des Kreises, der um dieselben beschrieben werden kann. Verhältniß der Umfänge und Flächen beim Kreise.

Aufgaben über Längen- und Flächenberechnung beim Kreise. a) Umfang, Inhalt aus dem Halbmesser. b) Aus dem Umfange, Durchmesser und Inhalt. c) Aus dem Inhalte der Halbmesser. d) Länge des Kreisbogens von gewisser Gradzahl aus dem Halbmesser und umgekehrt. e) Kreisausschnitt oder Sektor. f) Kreisabschnitt oder Segment; Kreisring.

Aufgaben über den Cylinder. a) Mantel. b) Ganze Oberfläche. c) Kubikinhalt. d) Hohler Cylinder. Konstruktive Aufgaben über den Kreis.

IV. Die Pyramide. S. 206.

Entstehung derselben. Die dreiseitige Pyramide; Beschreibung und Betrachtung derselben nach Flächen, Kanten, Linien-, Flächenwinkeln ꝛc. Die mehrseitige Pyramide. Die Summirung der Linienwinkel bei derselben. Weitere Betrachtung der Pyramiden; die Summe der Seitenflächen ist größer, als die Grundfläche; die Summe der Eckstrahlenwinkel der Grundfläche ist größer, als die Summe der ebenen Winkel an der Spitze der P.; die regelmäßige und senkrechte oder gerade P.; Bedingungen, unter denen eine P. eine gerade ist; eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt; abgestumpfte P. Pyramiden, nach demselben Bildungsgesetze und nach einem ähnlichen gebildet, oder kongruente und ähnliche P. P. Aus wie vielen und welchen Bestandtheilen eine P. bestimmt ist. Symmetrische P. P. Die Pyramiden in der Natur; in Egypten; Anzahl der Flächen der P.; der Obelisk; worin die P. P. mit den Säulen übereinstimmen und worin sich dieselben von ihnen unterscheiden; Netz der P. — Die Linienmessung bei der P.; Berechnung des Umfangs; der Höhe; Oberfläche der P.; Oberfläche der abgestumpften P.; das Verhältniß der Grund- und oberen Fläche bei der abgestumpften P.; Kubikinhalt der P. durch Anschauung und Rechnung; Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe ꝛc.; Kubikinhalt der abgestumpften P. Aufgaben: a) über die Berechnung der Oberfläche der ganzen P. b) Über den Kubikinhalt der ganzen P. c) Aufgaben über die abgekürzte P. Schwerpunkt der P.

V. Der Kegel. S. 233.

Säule, Cylinder; Pyramide, Kegel; Kegel in der Natur; Flächen, durch welche derselbe begrenzt wird; Vergleichung mit früheren Körpern; Radius, Höhe, Seite der K.; der Mantel des Kegels als bestimmter Theil des mit der Seite zu beschreibenden Kreises (Kreisausschnitt); Netz des K.; Entstehung des K. auf verschiedene Weise; senkrechte oder gerade, schiefe K. K.; Lage eines Punktes zum Kegel; eine Gerade in Beziehung zum K. gesetzt; die Kegelschnitte; sonstige Eigenschaften der geraden K.; Erzeugung des abgestumpften K.; bestimmende Stücke für den ganzen und abgestumpften K.; Netz des abgestumpften K.; der schiefe K.; Schwerpunkte des K.; die Linien-, Flächen- und Körperberechnung beim K.; Umfang; Mantelfläche des ganzen und abgestumpften K.; Kubikinhalt des ganzen und abgestumpften K.; ähnliche Kegel und ihr Verhältniß in Bezug auf Umfang, Oberfläche und Kubikinhalt. Aufgaben: a) die Berechnung des Mantels und der gesammten Ober-

fläche des ganzen Kegels betreffend. b) Über den Kubikinhalt desselben. c) Oberfläche des abgestumpften Kegels. d) Kubikinhalt desselben.

VI. Die regelmäßigen Körper und die ebenflächigen Polyeder überhaupt. S. 258.

Entstehung des Tetraeders aus 4 regelmäßigen, kongruenten Pyramiden; die Centrieität derselben; in ähnlicher Weise werden das Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder gebildet. Es kann nur die genannten 5 regelmäßigen Körper geben. Erzeugung der regelmäßigen Körper durch körperliche Strahlen; Bildung der ebenflächigen Polyeder durch körperliche Strahlen; Entstehungsweise der Polyeder durch Umdrehung einer ebenen veränderlichen oder unveränderlichen Figur; allgemeine Eigenschaften der Polyeder, betrachtet an den Eigenschaften des Raumdreiecks rc., Raumvielecks; zwei ebene Winkel (Seiten), welche die dreieckige Körperecke einschließen, sind stets größer als der 3te (Seite); alle ebene Winkel, welche die Körperwinkel begrenzen, sind kleiner als 4 Rechte; das Polareck; in einem Raumdreieck ist die Summe der Winkel > 2 R. und < 6 R.; symmetrische Raumdreiecke; Centricität des Raumdreiecks. Ähnliche Betrachtung über die wichtigsten Eigenschaften der Polyeder; die Centricität derselben für drei Kugeln; Umfang der regelmäßigen Körper und Oberfläche; Oberfläche eines Polyeders, welcher durch Umdrehung eines unveränderlichen Vielecks um seine Achse erzeugt wird; Kubikinhalt der regelmäßigen Polyeder; Kubikinhalt der unregelmäßigen, verschieden gestalteten Polyeder. Schwerpunkt; die Netze der 5 regelmäßigen Körper.

VII. Die Kugel. S. 287.

Entstehung der Kugel; die Kugel ist von einer einzigen, allseitig gekrümmten Oberfläche eingeschlossen; jeder P. der Oberfläche vom Mittelpunkte gleichweit, um den Radius entfernt; Halbmesser, Durchmesser; kongruente Kugeln; Größe und Lage einer Kugel; den Durchmesser der Kugel zu finden; Achse; Erdachse; Nord- und Südpol; kleine Kreise, größte Kreise; Kugelkappen (Kugelabschnitte, Kugelsegmente, Kalotte, Kugelschicht, Kugelzone oder Kugelgürtel), Kugelsektor oder Kugelausschnitt, Kugelkegel; Kugelsehne, Kugelsekante, Kugeltangente; die magnetischen Pole; Kugel-nEcke; Kugeln in und um die regelmäßigen Körper; Punkt, Gerade und Ebene in Beziehung zur Kugel gesetzt; zwei Kugeln zu einander; Kugelschale; Kugelkern; die Kugel ist durch 4 nicht in einer Ebene liegenden Punkte bestimmt; die Kugelform im Leben; Schatten der Kugel; wie man sich auf einer Kugel orientirt; geographische Länge und Breite der Erde, dieselbe als Kugel vorausgesetzt; Berechnung des Durchmessers; Berechnung des größten Kreises und der mit dem Äquator parallelen Kreise; die Oberfläche und der Kubikinhalt der Kugel; Schwerpunkt der Kugel; Berechnung der Oberfläche und des Inhaltes des Kugelabschnitts, des Kugelausschnitts, der Kugelzone; der Oberfläche der Kugel-nEcke; alle Kugeln sind ähnliche Körper; Verhältniß derselben bezüglich des Umfangs, der Oberfläche und des Kubikinhaltes.

Aufgaben über die Kugel: a) die Linienmessung an derselben betreffend. b) Die Flächen- und damit zusammenhängende Linienmessung. c) Der

Kubikinhalt. An den Kugelaufgaben ist besondere Rücksicht auf Erde und Himmelskörper genommen.

VIII. Zusammenstellung der wesentlichsten Wahrheiten über die mathematischen Raumgrößen und ihre Beziehungen zu einander in XXX einzelnen Abschnitten. S. 322.

IX. Anhang: das Wichtigste aus der mathematisch-astronomischen Geographie. S. 333.

Kugelgestalt der Erde; Gründe für dieselbe; Horizont; Aussichtsweite von verschiedenen Höhen; Größe des Durchmessers, Umfangs; die Oberfläche und ihre Vertheilung nach Wasser und Land; Orientirung auf der Erdkugel nach geographischer Länge und Breite; die sich gleich bleibende Größe der Breiten- und die mit der Breite abnehmende Größe der Längengrade; wie die geographische Breite und Länge gefunden wird; die verschiedene Zeit auf der Erde, je nachdem man nach Westen oder Osten wohnt, oder die Erde ist eine Uhr, welche zu gleicher Zeit alle Zeiten zeigt; die Achsendrehung der Erde und die dafür sprechenden Gründe; die Folgen der Achsendrehung in Bezug auf Tag und Nacht, die verschiedene Zeit und die damit zusammenhängenden Beschäftigungen der Menschen; die Stundenrose am Globus; die verschiedene Länge der Tage und der Wechsel der Jahreszeiten ist von der jährlichen Umdrehung der Erde um die Sonne abhängig; Gründe für die jährliche Umdrehung der Erde, Entwickelung und Auseinandersetzung; wie die Sonne den Bewohnern der Erde je nach der Breite erscheint; verschiedener Auf- und Untergang der Sonne; das Tellurium; die Abirrung des Lichtes als Beweis für die jährliche Drehung der Erde; die Tageslängen nach den geographischen Breiten; Gegenwohner, Nebenwohner, Gegenfüßler; ungleichmäßige Bewegung der Erde auf ihrer Bahn; wahre und mittlere Zeit und was damit zusammenhängt; das Wesentlichste vom Kalender; Erde, Mond und Sonne; die Lichtphasen des Mondes; Mond- und Sonnenfinsternisse; die Lichtphasen der Erde vom Monde aus betrachtet; Umdrehung des Mondes um die Erde; Achsendrehung derselben; er wendet uns stets dieselbe Seite zu; das Größererscheinen von Sonne und Mond beim Aufgange; Irradiation; Refraktion oder Lichtbrechung; die Sonne und was auf dieselbe Bezug hat; die Planeten mit ihren Monden; Planetentafel; die Kometen oder Haarsterne; Sternschnuppen; die Fixsterne, ihre Eintragung in eine Sternkarte oder auf den Globus; Präcession der Frühlings-, Tag- und Nachtgleichen; Schwanken der Weltachse; die Parallaxen der Fixsterne.

I. Der Würfel.

Es ist aus verschiedenen Gründen sehr wünschenswerth, wenn ein Schulhaus genau nach den Himmelsgegenden orientirt ist, so daß die Klassenzimmer theils nach Osten, theils nach Westen liegend durch einen zwischen denselben hinlaufenden Gang oder Korridor getrennt werden. Sehen dann die Schüler in den nach Osten liegenden Zimmern nach Süden, in den nach Westen liegenden nach Norden, so haben beide Schülerabtheilungen das Licht von der linken Seite her. Bei einer solchen Einrichtung prägt sich nicht nur die Kenntniß der Himmelsgegenden frühzeitig, leicht und unverwischlich ein, sondern die Anschauung in Bezug auf den Auf- und Untergang der Sonne zu den verschiedenen Jahreszeiten und ihren scheinbaren Lauf am Himmel wird auch wesentlich gefördert. Denn wenn der Schüler auf die Beobachtung aufmerksam gemacht wird, daß der Sonnenstrahl zur Zeit des Frühlings- und Herbstesanfangs die Fenster beim Auf- und Untergange senkrecht, zur Zeit des Winters- und Sommersanfangs aber schief trifft und daß die Sonne entsprechend am Himmel zweimal jährlich den Himmelsäquator, einmal den südlichen und nördlichen Wendekreis am Himmel und zwar so zu beschreiben scheint, daß sie bei ihrem Auf- und Untergange, wenn man mit der Winterstellung beginnt, aus Südost, Ost und Nordost beim Aufgange, nach Südwest, West und Nordwest beim Untergange und dann wieder zurückgeht, wenn ihm dadurch die Anschauung zur andern Natur oder Gewohnheit wird, so hat der Schüler schon einen großen Gewinn, der Lehrer leichtere Arbeit, wenn er zu den wesentlichsten Sätzen der mathematisch-astronomischen Geographie kömmt. Daß aber der Lehrer dem Schüler eine solche Anschauung und Beobachtung erst geben muß, ist eine bekannte Sache. Denn so viele Schüler, welche ihrem Alter nach es

wohl hätten wissen können, von mir bisher gefragt worden sind, ob der Vollmond immer an derselben Stelle des Himmels im Osten aufgehe, ob er mit der Sonne südwestlich im Winter, nordöstlich im Sommer auf- und untergehe oder entgegengesetzt, so habe ich in der Regel gar keine, oder doch eine falsche Antwort bekommen. Also, der Lehrer muß meistentheils erst die Anschauung ganz und gar vermitteln und kann sich selten oder gar nicht auf entsprechende Vorbildung im Elternhause oder auf eigne Beobachtung von Seiten des Schülers verlassen. Es ließe sich, was die mathematisch-astronomische Anschauung und ihre Vermittelung durch das nach den Himmelsgegenden gerichtete Schulhaus und Klassenzimmer anlangt, noch Mancherlei anführen; aber der Vortheil springt auch für die erste mathematische Anschauung sogleich in die Augen, wenn man Linien oder Flächen von Ost nach West gerichtet, Körper von Ost nach West, von Nord nach Süd, von Oben nach Unten ausgedehnt bezeichnet, wenn Punkte, Linien, Flächen, Körper sich in einer gewissen Richtung bewegen. Der Begriff der Richtung und der damit zusammenhängende der Lage wird deutlicher, sowie noch manches Andere. Nehmen wir also an, unser Schulhaus sei in der bezeichneten Weise erbaut, mögen die Schüler mit dem Gesicht nach Norden sitzen, so daß sie Norden im Gesichte, Osten rechts und Westen links haben, und die verschiedenen Hauptrichtungen von Nord nach Süd oder von Vorn nach Hinten; von Ost nach West oder von Rechts nach Links; endlich von Oben nach Unten bezeichnet werden können. Sei ferner der im Lehrzimmer befindliche, ebenfalls, wenn es möglich war, nach den Himmelsgegenden orientirte Tisch in wagerechter Stellung, was man mit der Setzwage, mit der Wasserwage oder auch einfach so prüfen kann, daß eine auf die Tischplatte gelegte Kugel in keinerlei Lage nach irgend einer Richtung hin abrollt; sei endlich auf dem Tische ein glatter Würfel befindlich, dessen Kante vielleicht 3—4 Zoll lang ist, so daß dem Auge des Schülers die vordere Fläche des Würfels zugewendet ist, die rechte nach Osten, die linke nach Westen liegt, so kann der Unterricht beginnen.

W ü r f e l oder einen Gegenstand, wie er sich eben auf dem Tische befindet, hat der Schüler schon vielfach gesehen — man braucht ihn nur daran zu erinnern, daß viele Steine, zumal

wenn Säulen auf denselben stehen, eine ähnliche Gestalt haben, ebenso die elfenbeinernen oder hölzernen Würfel, deren man sich bei verschiedenen Spielen bedient. Freilich sind die Würfel in vielfacher Beziehung sehr verschieden; so können dieselben von Holz, Stein, Pappe ɩc., also dem Stoffe nach verschieden sein. Die Farbe, Elasticität, Glätte und noch viele andere Eigenschaften können ganz verschieden sein — wir wollen daher auf dieß Alles gar keinen Werth legen. Wenn aber der Lehrer neben den einen Würfel von einer gewissen Kante, noch einen zweiten oder dritten von verschiedener Kante auf den Tisch setzt, so kann derselbe den Schüler leicht darauf hinleiten, daß die Würfel, wie ähnliche Brüder, zwar in der Gestalt übereinstimmen, aber in der Größe verschieden sind, so daß der Schüler, von allem Uebrigen absehend, die beiden wichtigsten mathematischen Begriffe, Gestalt und Größe kennen lernt. Doch darüber später das Weitere.

Der Würfel hat drei Ausdehnungen, welche der Schüler an dem auf dem Tische stehenden Würfel oder an einem in seinen Händen befindlichen leicht wahrnehmen kann. Eine von Vorn nach Hinten oder von Norden nach Süden, eine von Rechts nach Links oder von Osten nach Westen, eine von Oben nach Unten. Da man streng genommen keine Körper, sondern nur Flächen der Körper, beim Würfel höchstens drei sehen kann, da man also nur zwei Ausdehnungen beim Würfel auf einmal sehen kann und man erst seine Stellung ändern muß, um die dritte Ausdehnung wahrzunehmen, so kann der Lehrer dies mit einem oder dem andern Schüler anschaulich machen. Wie aber der eine Würfel, so hat auch der zweite, der dritte ɩc., jeder Würfel drei Ausdehnungen. Kommt man vom Würfel auf andere Gegenstände, ein Buch, einen Stein ɩc., so findet man wieder drei Ausdehnungen — kurz alle mit unsern Sinnen wahrnehmbare Gegenstände haben drei Ausdehnungen. Alle Gegenstände, welche drei Ausdehnungen haben, heißen Körper, also ist der Würfel ein Körper. Denkt man noch an den Stoff oder sonstige Eigenschaften des Würfels, so betrachtet man ihn als einen natürlichen oder physikalischen, wie alle sind, welche wir mit den Sinnen wahrnehmen. Sieht man aber bei zwei oder mehreren Körpern vom Stoffe, von ihren sonstigen Eigenschaften ɩc. ab und faßt immer nur das Ausgedehntsein nach

den drei Richtungen, die damit zusammenhängende Größe und Gestalt in's Auge, um alles Uebrige Andern zur Betrachtung anheim zu geben, so hat man einen mathematischen Würfel, mathematischen Körper. Derselbe läßt sich nicht mit Sinnen wahrnehmen, ist etwas Gedachtes, nur in unserem Geiste oder in der Abstraktion Vorhandenes; wir kommen aber erst durch Wahrnehmung und Betrachtung des natürlichen, sinnlichen Körpers zum Begriffe des mathematischen, wie überhaupt der Weg von der Anschauung zur Abstraktion geht; die zweite muß durch die erste erregt und begründet werden. Die Anschauung vieler, verschiedener Körper, und die Vergleichung derselben unter einander, wird den Begriff des mathematischen Körpers im Verlaufe der Sache mehr und mehr klar machen und befestigen.

Der Würfel hat nicht nur drei Ausdehnungen, derselbe ist ferner von sechs Flächen eingeschlossen. Diese sind die vordere, die hintere, rechte, linke, untere, obere. Wir stellen uns den Würfel auf einer Fläche stehend oder ruhend vor, obgleich derselbe auch auf einer Kante oder Ecke stehend gedacht werden kann. Auf einer Fläche stehend hat aber der Würfel die größte Standfestigkeit. Die Fläche, auf welcher der Würfel steht oder die untere, heißt die Grundfläche. Jede Fläche ist nach zwei Richtungen hin ausgedehnt, so die vordere von Unten nach Oben, von Ost nach West oder von Rechts nach Links, ebenso die hintere; die obere von Vorn nach Hinten, von Nord nach Süd, und von Rechts nach Links oder Ost nach West ausgedehnt, ebenso die untere; die rechte oder östliche Fläche von Oben nach Unten, von Nord nach Süd oder Vorn nach Hinten ausgedehnt, ebenso die linke oder westliche. Alle Flächen am Würfel haben also zwei Ausdehnungen. Auch die Flächen an andern Körpern, wie man leicht zeigen kann und wie sich am Ende der geometrischen Anschauungslehre zeigen muß, überhaupt alle Flächen haben zwei Ausdehnungen. Wollte man eine von den sechs Flächen des Würfels, etwa die vordere, vom Würfel lostrennen, so würde dieß und wenn es mit dem schärfsten Messer gemacht würde, unmöglich sein, weil die vom Körper abgeschnittene Fläche doch noch auch in der dritten Richtung ausgedehnt, also ein Körper sein würde; man kann also nur einen Theil des Körpers, welcher selbst wieder

Körper ist, abtrennen; die Flächen, welche den Körper einschließen und begrenzen, sind untrennbar mit demselben verbunden. Flächen, die nur nach zwei Richtungen hin ausgedehnt sind, kommen also nicht selbständig, sondern nur an den Körpern befindlich vor; die selbständigen Flächen sind nur, auf Grund der an den Körpern angeschauten Flächen, als Abstraktionen in unserem Geiste vorhanden. Eine jede Fläche am Würfel ist von vier geraden Linien eingeschlossen und begrenzt; gerade sind dieselben deßhalb, weil sie von Vorn nach Hinten, oder von Rechts nach Links zwischen je zwei Eckpunkten die kürzesten sind, wie überhaupt die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. Eine jede solche Gerade, welche in Bezug auf den Würfel auch Kante heißt, hat nur eine einzige Ausdehnung, z. B. von Oben nach Unten, von Rechts nach Links, von Vorn nach Hinten. Wollte man eine solche Linie oder Kante, welche die Fläche begrenzt, von derselben abtrennen, so daß man dieselbe selbständig hätte, so würde man wiederum einen nach drei Richtungen hin ausgedehnten Körper erhalten, aber nicht eine Linie, auch keine Fläche. Also ist die Linie, hier die gerade, die Grenzlinie der Fläche, welche sich am Körper befindet, nur nach einer Richtung ausgedehnt und etwas auf dem Grunde der sinnlichen Anschauung von uns Abstrahirtes, in der Wirklichkeit gar nicht Vorhandenes. Jede der zwölf Kanten oder geraden Linien hört auf in einem Punkte oder wird von zwei Punkten begrenzt, welche gar keine Ausdehnung haben und nur eine Stelle im Raume bezeichnen, die wir gerade fixiren wollen. Da der Punkt gar keine Ausdehnung hat, so kann man auch nicht von der Größe oder der Gestalt der Punkte reden; es giebt weder große, noch kleine, weder runde, noch eckige Punkte. Das Zeichen eines Punktes ist nur ein Bild desselben, unter welchem wir uns die Sache oder den Begriff selbst vorstellen, kein wirklicher Punkt.

Mathematische Körper, Flächen, Linien und Punkte sind abgezogene, abstrakte Begriffe, zu denen wir auf dem Grunde der sinnlichen Anschauung hingeleitet werden. Der erste hat drei, die zweite zwei, die dritte eine, der vierte keine Ausdehnung. Denken wir uns die Kante des Würfels in's Unendliche wachsend, so nimmt derselbe den ganzen unendlichen Weltraum ein, von

welchem der kleine vor unsern Augen befindliche Würfel ein dem großen ganzen ähnlicher Theilwürfel wäre.

Wenn aber auch der Punkt als die Grenze der Linie keine Ausdehnung hat, so kann doch derselbe als beliebige Stelle im Raume, welche man gerade fixirt, in Bewegung gesetzt werden. So kann ich mir einen der vorderen Punkte, z. B. den rechten oberen sich so von Vorn nach Hinten bewegend denken, daß er weder nach Rechts, noch nach Links, weder nach Oben, noch nach Unten abwiche, dann würde er die rechte, obere Kante bilden oder erzeugen. Ueberhaupt erzeugt ein Punkt, welcher sich nach irgend einem andern Punkte hinbewegt, ohne die durch beide Punkte bereits festgelegte Richtung auch nur einen Augenblick zu verlassen, die gerade Linie oder Gerade. Aber auch die Gerade kann wieder in Bewegung gebracht werden; dabei darf sie sich aber nicht um sich selbst drehen, darf sich auch nicht nach einem Punkte in ihrer eignen Richtung fortbewegen, sondern muß sich nach einem außerhalb derselben und ihrer Richtung liegenden Punkte hinbewegen. So könnte sich die vordere untere Gerade so nach Oben bewegen, daß sie nicht nach Vorn und nicht nach Hinten abwiche und soweit fortbewegte, als sie selbst lang wäre, so entstände die ebene Fläche, oder Ebene, welche die vordere heißt. In derselben Weise könnte man die andern Flächen entstanden denken. Bewegt sich endlich eine von den sechs ebenen Flächen, z. B. die untere so von Unten nach Oben, daß sie weder von Vorn nach Hinten, noch von Links nach Rechts abweicht und so hoch, als die Kante des Würfels lang ist, so entsteht der Würfel selbst. Bewegt sich aber endlich auch der Würfel, so bleibt er doch immer nur ein Würfel und es entsteht kein neues Gebilde. Also: Der sich in der genannten Weise bewegende Punkt erzeugte die Gerade; die sich in der angedeuteten Weise bewegende Gerade erzeugte die ebene Fläche oder Ebene; die in der bezeichneten Art sich bewegende Ebene erzeugte den Körper oder Würfel.

Betrachtet man eine von den sechs ebenen Flächen oder Ebenen, so findet man, daß jede von vier Geraden eingeschlossen ist. Eine solche von vier Geraden eingeschlossene, ebene Fläche heißt deßhalb ein Vierseit. Da der Würfel von sechs der-

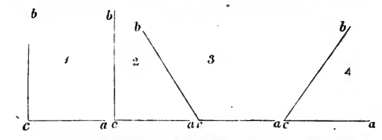
gleichen Vierseiten, deren jedes vier Seiten hat, eingeschlossen wird, so hat man am Würfel im Ganzen 6 mal 4 = 24 Seiten oder Kanten. Jede aber gehört zu je zwei Flächen, z. B. die vordere obere Kante gehört ebenso zur vorderen, wie zur oberen Fläche, daher sind nur die Hälfte von den 24 oder 12 Kanten vorhanden. Diese 12 Kanten haben verschiedene Namen, welche der Schüler bald und leicht selbst findet, z. B. untere vordere, obere vordere, rechte vordere, linke vordere rc. Faßt man die vordere Fläche in's Auge, so hat man eine obere und eine untere Kante oder Seite (Gerade), eine rechte und eine linke, welche je zwei und zwei paarweise gleich gerichtet sind, oder gleiche Lage haben; denn die obern und untern laufen beide von Ost nach West oder von Rechts nach Links; die beiden andern von unten nach oben. Linien, welche dieselbe Lage oder Richtung haben, heißen parallel; soweit man dieselben auch verlängert, so können sie sich doch nimmermehr schneiden, sie können sich einander auch nicht nähern, sondern müssen immer gleichweit von einander entfernt bleiben. Also je zwei und zwei Seiten eines Vierseits laufen mit einander parallel, was sich bei der Betrachtung der übrigen leicht ergeben wird; ein solches Viereck, in welchem die gegenüber liegenden Seiten parallel laufen, heißt ein Parallelogramm; also ist der Würfel von sechs Parallelogrammen eingeschlossen. Von den Kanten des Würfels laufen stets je vier einander parallel; 1) die rechte vordere, rechte hintere, linke vordere, linke hintere; 2) die rechte obere, linke obere, rechte untere und linke untere; 3) die untere vordere, obere vordere, untere hintere, obere hintere. Vergleicht man aber das Verhalten der oberen vorderen Kante und der rechten vorderen Kante, so laufen sie nicht parallel, sondern treffen sich in dem rechten oberen vorderen Eckpunkte und bilden einen Linienwinkel; ebenso trifft noch die rechte obere Kante in demselben Punkte mit der vorderen oberen und der rechten vorderen Kante zusammen, um einen Winkel zu bilden. Der Punkt, in welchem die drei Kanten zusammentreffen, heißt Eckpunkt des Würfels; solcher Eckpunkte giebt es acht, denn die 24 Kanten lassen sich acht mal zu je drei in einem Punkte vereinigen. Je zwei Kanten bilden bei ihrem Zusammentreffen einen Winkel; derselbe heißt Linienwinkel, weil er von zwei Linien gebildet wird;

der Punkt, in welchem sich die Linien schneiden oder treffen, heißt Scheitelpunkt des Winkels; die Linien selbst, durch deren Treffen der Winkel entstanden ist, heißen Schenkel des Winkels. Also sind die Bestandtheile eines Winkels: 1) der Scheitelpunkt; 2) die beiden Schenkel und 3) die zwischen beiden liegende, nicht eingeschlossene ebene oder Winkelfläche. Da an einer jeden von den sechs Flächen vier Winkel oder Ecken vorkommen, so kann man eine solche Fläche nicht nur Vierseit, sondern auch Viereck nennen. Daher: Der Würfel ist von sechs Vierseiten oder Vierecken eingeschlossen, welche Parallelogramme sind. Da ein jedes von den sechs Vierecken je vier Linienwinkel hat, so kommen im Ganzen 24 vor; je drei gehören dazu, um eine sogenannte körperliche Ecke zu bilden, daher kann es am Würfel nicht mehr als acht Ecken oder Eckpunkte geben. Die Namen derselben lassen sich leicht bestimmen, z. B. rechte vordere obere, rechte vordere untere, rechte obere hintere rc. Jede Fläche von den sechs Flächen kann einmal zur vorderen Fläche gemacht werden. Von den Linien, welche die einzelnen Winkel bilden, geht die eine von Osten nach Westen, die andere von Unten nach Oben; die Linien, welche die Schenkel dieser Winkel sind, laufen also in gerade entgegengesetzter Richtung — solche Winkel heißen rechte Winkel oder Rechte. Denkt man sich z. B. um den rechten oberen Eckpunkt noch drei an Gestalt und Größe gleiche Ebenen oder Flächen gelegt, so daß sie zusammen wieder eine Ebene bilden, so wäre der rechte Winkel der vierte Theil dieser Ebene. Alle ebenen oder Linienwinkel am Würfel sind rechte; alle sechs Vierecke sind rechtwinklige Parallelogramme. Mißt man ferner die einzelnen Kanten mit dem Zirkel, so wird man finden, daß dieselben alle gleich sind — daher kann man die rechtwinkligen Parallelogramme, von denen der Würfel eingeschlossen ist, auch gleichseitige nennen und man faßt alle diese Eigenschaften zusammen unter dem Namen Quadrat = rechtwinkliges, gleichseitiges Parallelogramm. Ich kann mir größere und kleinere Quadrate denken, alle stimmen in der Gestalt überein — die sechs Quadrate des Würfels stimmen aber nicht nur in der Gestalt, sondern auch in der Größe überein oder sie sind vollkommen identisch, kongruent oder in jeglicher Be-

ziehung gleich. Sie sind auch ganz auf dieselbe Weise entstanden, indem sich z. B. die untere Kante so von Unten nach Oben bewegte, daß sie weder nach Vorn noch nach Hinten abwich, was man senkrecht nennen kann, während ihre ursprüngliche Lage wagerecht heißt und zwar so hoch, als dieselbe selbst lang ist. Also: Der Würfel ist ein Körper, welcher von sechs kongruenten Quadraten eingeschlossen ist, zwölf Kanten und acht Ecken hat.

Die am Würfel, in den einzelnen Quadraten befindlichen Winkel sind rechte Winkel, von denen ein jeder den vierten Theil einer Ebene beträgt. Denkt man sich eine Gerade in einer Ebene liegend, dann in eine drehende Bewegung gesetzt, so daß sie mitdem einen Punkte festliegend ihre Richtung fortwährend ändert, mit dem andern Endpunkte den zurückgelegten Weg (Kreislinie) bezeichnet, so erhält man verschiedene Winkel, je nachdem man das zwischen je zwei verschiedenen Lagen der sich drehenden Linie liegende Stück der Ebene in's Auge faßt. Der vierte Theil der Umdrehung heißt ein rechter Winkel; ein Winkel, kleiner als ein rechter, heißt spitz; ein Winkel größer als ein Rechter, stumpf; dreht sich die Gerade in die entgegengesetzte Lage, dadurch daß dieselbe eine halbe Umdrehung macht, so hat man den gestreckten Winkel, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ der Umdrehung = zwei Rechten: ein Winkel, größer als zwei, aber kleiner als vier Rechte, heißt ein überstumpfer. Ein Winkel, welcher $\frac{1}{360}$ der Umdrehung ist, heißt ein Grad. Daher: Der Rechte = 90°; der spitze W. mehr als 0°, aber kleiner als 90°; der stumpfe W. $> 90^\circ, < 180^\circ$; der gestreckte W. $= 180^\circ$; der überstumpfe W. $> 180^\circ$ und $< 360^\circ$. Es ergiebt sich daraus weiter, daß alle rechten und alle gestreckten W. W. einander gleich sind; daß die spitzen, stumpfen und überstumpfen W. W. je unter sich zwar gleich sein können, aber nicht gleich sein müssen. Der Grad ist also das Winkelmaß; so oft sich derselbe in einen Winkel hineinlegen läßt, so viele Grade hat ein Winkel; bleibt ein Rest < als ein Grad, so hat man den Winkelgrad wieder in 60 Winkelminuten, die Winkelminute in 60 Winkelsekunden ꝛc. eingetheilt. Das gewöhnliche Winkelinstrument ist der Transporteur, ein in 180° getheilter Halbkreis, welchen sich die Schüler, aus Pappe angefertigt, leicht und wohlfeil ver-

schaffen können. Mit demselben, wie der Lehrer zeigen kann, lassen sich a. gegebene Winkel messen; b. Winkel von gegebener Größe zeichnen; c. Winkel an gegebene Punkte von Geraden in der Ebene antragen; d. die vier Species mit Winkeln vornehmen &c.



Bei der Entstehung des Winkels durch Drehung der Geraden ca um den festliegenden Punkt c aus der Lage ca in die Lage cb ist auf die Größe der Schenkel gar keine Rücksicht genommen worden, sondern nur auf die Größe der Drehung. Je größer die Drehung, desto größer der Winkel oder auch je größer der Unterschied in der Richtung der beiden Schenkel; denn man kann sich einen Winkel auch dadurch entstanden denken, daß zwei Gerade von einem Punkte aus nach verschiedenen Richtungen hinlaufen. Dann ist der Winkel der „Richtungsunterschied zwischen zwei geraden Linien", nicht zu verwechseln mit „dem Unterschiede zweier Geraden", welcher wieder eine Gerade ist. Fig. 1 u. 2 stellen rechte Winkel dar, obgleich die Schenkel des Winkels 2 größer sind, als die des Winkels Nr. 1, so sind doch beide Winkel an Größe gleich. Bei den Winkeln 2, 3 und 4 sind die Schenkel ac und cb, alle einander gleich; die Winkel sind aber trotzdem an Größe durchaus verschieden. Setzt man b bei Nr. 2 als Norden, hat ca die Richtung von West nach Ost, bc von Norden nach Süden, so hat cb in Nr. 4 eine nordöstliche, cb eine nördliche in Fig. 2 und cb in Nr. 3 eine nordwestliche Abweichung. Die cb in Nr. 4 weicht von der ca weniger ab als in Nr. 2 oder gar in Nr. 3 — deßhalb ist der letzte Winkel der größte.

Kehren wir zunächst zu den Quadraten zurück, welche den Würfel einschließen, so kann man außer der Gestalt und Größe auch noch die Lage derselben berücksichtigen. So liegen die

Grundfläche und die obere Fläche, die vordere und die hintere, die rechte und die linke so, daß sie sich niemals treffen, auch sich einander gar nicht nähern, sondern immer um die Länge der Kante von einander entfernt bleiben, d. h. sie sind gleichlaufend oder parallel. Zwei Ebenen können also ebenso gut parallel laufen, als zwei gerade Linien. Betrachtet man aber die obere Fläche und die vordere, die obere und die rechte, die obere und die linke rc., so haben sie nicht gleiche Richtung und Lage; denn die eine richtet sich von Unten nach Oben, die andere von Vorn nach Hinten rc. Sie treffen sich dann und schneiden sich und zwar in einer Geraden, welche die Kante des Würfels ist. Dadurch entsteht der Flächenwinkel; die Linie, in welcher sich beide Flächen oder Schenkel schneiden, heißt die Scheitellinie; zwischen den beiden Flächenschenkeln liegt ein nicht eingeschlossener und begrenzter Raum. Ein solcher Flächenwinkel, wie die Flächen am Würfel bilden, heißt ein rechter Winkel. Denkt man sich noch drei Würfel angesetzt, so daß alle vier in einer Kante sich vereinigen, und läßt man dann die Kanten des Würfels in's Unendliche wachsen, so füllt der neue Riesenwürfel den ganzen Weltraum aus, von welchem dann der rechte Flächenwinkel der vierte Theil ist. Einen solchen Flächenwinkel kann man auch dadurch erzeugen, daß man eines von den sechs Quadraten, z. B. das obere um die vordere obere Kante so lange dreht, bis dasselbe in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Je nach der Größe dieser Drehung kann der Flächenwinkel spitz, recht, stumpf, gestreckt und überstumpf sein. Wie bei einem rechten Linienwinkel zu dem wagerechten einen Schenkel ein senkrechter anderer gehört, so nimmt das Quadrat bei seiner Drehung eine immer veränderte Lage zu seiner ursprünglichen an. Ist die ursprüngliche Lage die wagerechte, so ist sie nach einer Drehung $<$ als $1/4$ der ganzen Umdrehung schief, nach $1/4$ Umdrehung senkrecht, nach abermals $1/4$ Umdrehung oder nach $1/2$ der ganzen Umdrehung wieder wagerecht, nach $3/4$ der Umdrehung senkrecht und nach Vollendung von $4/4$ oder der ganzen Umdrehung wieder wagerecht. Wird dabei die obere hintere Kante und ihre Lage in's Auge gefaßt, so ist dieselbe zuerst wagerecht, dann schief, dann senkrecht, wieder wagerecht, dann senkrecht und endlich wieder wagerecht. Es läßt sich nun

einfach das Senkrecht- und Schiefſtechen von Linien und Flächen zu einander erklären. Eine Linie steht auf einer Linie senkrecht, wenn sie mit derselben einen rechten Winkel, schief, wenn sie mit derselben einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Ebenso steht eine Fläche zur andern senkrecht oder schief, je nachdem der gebildete Flächenwinkel ein rechter oder ein spitzer, resp. stumpfer ist. Zur senkrechten Linie und Ebene gehört die wagerechte; geht zufällig die senkrechte Linie durch den Mittelpunkt der Erde, wie das ruhende, verlängerte Loth einer Pendeluhr, so heißt die senkrechte Linie lothrecht. Alle lothrechten Linien sind senkrecht, nicht alle senkrechten aber sind lothrecht; denn eine Linie kann eine in irgend einer Lage befindliche Linie senkrecht treffen, ohne verlängert durch den Mittelpunkt der Erde zu gehen.

Außer der Stellung und Richtung zweier Linien und Flächen zu einander könnte man auch noch nach der Stellung einer Geraden zu einer Ebene fragen. Trifft eine der sechs Flächen eine andere, so schneiden sich dieselben in einer Geraden; beide Ebenen haben dann unendlich viele Punkte mit einander gemein, welche aber alle in einer geraden Linie liegen. Hätten die beiden Ebenen noch einen weiteren Punkt, welcher nicht in der Geraden läge, gemein, so fielen dieselben ganz in einander und deckten sich. Das läßt sich leicht einsehen, wenn man eine Ebene um eine Gerade dreht; nimmt man aber noch einen Punkt außer der Geraden und ihrer Richtung an und dreht die Ebene um die Gerade, bis der gegebene Punkt in dieselbe hineinfällt, so liegt die Ebene nach ihrer Lage fest. So oft dieselbe Bewegung wiederholt wird, eben so oft fallen die Ebenen zusammen. Also: Durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte liegt die Lage der durch dieselben gehenden Ebene fest oder durch drei Punkte ist die Lage einer Ebene bestimmt. Wie steht es aber bezüglich der Lage einer Geraden zu einer Ebene? Es können verschiedene Fälle Statt finden. So laufen die obere vordere Kante, die rechte obere, die linke obere, die hintere obere zur Grundfläche parallel. Soweit man dieselben auch verlängert, so findet kein Zusammentreffen, kein Annähern Statt — die genannten Kanten bleiben von der Grundfläche immer um die Kante selbst entfernt. Betrachtet man aber eine von den Kanten der vordern und hintern Fläche, oder

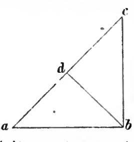
der Seitenflächen in Beziehung auf ihre Lage zur Grundfläche, so treffen die Kanten die Grundfläche und zwar in je einem Punkte. Mehr als einen Punkt kann die Gerade mit der Ebene nicht gemein haben; denn läge z. B. der oberste Punkt einer Kante und auch der unterste in der Grundfläche; so fielen zugleich alle übrigen Punkte der Geraden in die Ebene hinein und die Gerade selbst. Also: Eine Gerade hat mit einer Ebene entweder nur einen oder alle Punkte gemein und fällt ganz in dieselbe hinein. Hat aber eine Kante mit der Ebene einen P. gemein, so zeigen uns alle Seitenkanten des Würfels eine solche Stellung zur Grundfläche, daß dieselben in ihrer Richtung von Oben nach Unten nach keinerlei anderer Richtung hin abweichen, weder nach Vorn noch nach Hinten, weder nach Rechts noch nach Links, noch nach irgend einer andern Zwischenrichtung. Man sagt daher, sie stehen auf der Grundfläche senkrecht. Denkt man sich durch den Fußpunkt der Senkrechten in der Grundfläche nach allen möglichen Richtungen hin Gerade gelegt, so bildet diese Senkrechte mit jeder der Geraden einen Rechten. Weicht aber eine Gerade, welche von Oben nach Unten geht, in ihrer Richtung nach irgend einer andern Seite hin, nach Vorn oder Hinten, Rechts oder Links ꝛc. ab, so steht dieselbe dann zur Grundfläche oder überhaupt Ebene schief. Zieht man in der von der schiefen Linie getroffenen Ebene durch den Fußpunkt derselben nach allen Richtungen hin gerade Linien, so bildet die schiefe Linie mit jeder je einen spitzen und einen stumpfen Winkel, welche zusammen 180° oder zwei Rechte ausmachen und Nebenwinkel heißen. Der kleinste von den genannten spitzen Winkeln heißt der Neigungswinkel. Sie haben den Scheitel, einen Schenkel gemein, während die beiden andern Schenkel eine Gerade bilden. Sind die beiden Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder einzeln ein Rechter und der beiden gemeinschaftliche Schenkel heißt seiner Richtung nach senkrecht; sind die Nebenwinkel ungleich, schief.

An die schon angestellten Betrachtungen knüpfen sich noch eine ganze Reihe anderer. Denn setzt man Gerade, welche bisher nur immer als Kanten des Würfels betrachtet worden sind, in fernere Beziehung zu einem den Würfel mit einschließenden Quadrat oder zum Würfel selbst, so findet man neue Beziehungen

und neue Wahrheiten. Eine Gerade kann mit einer Ebene nur einen Punkt, aber auch alle Punkte gemein haben und ganz in dieselbe hineinfallen. Denken wir uns z. B. die beiden einander gegenüberliegenden Eckpunkte eines Quadrats durch eine Gerade verbunden, so heißt dieselbe die Diagonale des Quadrats. Solcher Diagonalen giebt es zwei; jede theilt das Quadrat in zwei Dreiecke, d. h. Ebenen, welche von drei Seiten eingeschlossen sind und drei Winkel haben. Unter den Seiten sind die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten gleich, die dritte die Diagonale ist zwar größer als eine der beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten oder Katheten, aber doch kleiner, als beide zusammen, weil die Gerade der kürzeste Weg zwischen zweien Punkten ist. Die Diagonale oder dritte Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt Hypotenuse; die beiden Dreiecke haben je zwei unter einander gleiche Seiten und heißen deßhalb gleichschenklig; also: Die Diagonale zerlegt das Quadrat in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, welche über einander gelegt sich gegenseitig decken oder kongruent sind, wie sich das leicht an einem Papierquadrat, welches in der Diagonale zerschnitten wird, zeigen läßt. Daraus ergiebt sich weiter von selbst, daß die Diagonale die Winkel des Quadrats halbirt hat, daß jeder der beiden spitzen Winkel in den beiden Dreiecken nun 45° betragen muß, daß der Rechte und die beiden spitzen Winkel der einzelnen Dreiecks die Hälfte von den vier Rechten oder zwei Rechte oder einen Rechten und zwei halbe Rechte ausmachen müssen. Zieht man noch die zweite Diagonale im Quadrate, so zerfällt das ganze in vier kongruente gleichschenklige Dreiecke. Aus der eben angestellten Betrachtung ergiebt sich weiter, daß alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen. Es giebt aber große und kleine gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke — man sieht daraus, daß von den Winkeln die Größe des Dreiecks nicht abhängig ist, was noch von der Länge der Seiten oder Schenkel der Winkel abhängt, welche für die Winkelgröße nicht entscheidend ist. Haben aber zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke eine Seite gleich, sei es die Kathete oder die Hypotenuse, so stimmen sie in allen ihren Bestandtheilen vollkommen überein und decken sich oder was dasselbe ist: „Aus einer Seite des gleichschenklig-

rechtwinkligen Dreiecks kann man dasselbe so konstruiren, daß es an Größe und Gestalt bestimmt ist". So oft man auch die Konstruktion aus derselben Seite wiederholt, so müssen doch alle also entstandenen Dreiecke dieselben Bestandtheile in derselben Reihenfolge erhalten und sich decken.

a. Eine Kathete ist gegeben.



Ist ab die gegebene Kathete, also bc die andere, denkt man sich beide unter rechtem Winkel zusammengesetzt, so ist dann zwischen den beiden Punkten c und a nur noch die Gerade ac möglich; selbst für den Fall, daß W. abc spitz oder stumpf wäre und ab und ac an Größe ungleich, so bliebe doch die Konstruktion: aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel festliegend und also auch die Kongruenz. Natürlich auch, wenn W. abc = R bleibt, aber ab und bc ungleich sind.

b. Die Hypotenuse ist gegeben.

Man trägt dann an ihre Endpunkte a und c Winkel von 45° an oder denkt sie angetragen; dadurch ist die Richtung der beiden Schenkel cb und ab bestimmt. Beide müssen sich in b schneiden, weil sie zur ab nicht senkrecht stehen oder doch nicht so, daß die mit derselben gebildeten Winkel 2 R oder 180° betragen.

c. Die Höhe ist gegeben, d. h. die Senkrechte von b auf ac.

Denkt man sich das Quadrat fertig, so ist db die halbe Diagonale = $\frac{1}{2}$ ac; man kennt also die halbe und auch ganze Hypotenuse und in dem Dreieck adb, die db, die ad und die Winkel. Da man dasselbe zwei mal zeichnen und an einander geschoben denken kann, so läßt sich das ganze Dreieck abc aus seiner Höhe zeichnen.

Es läßt sich auch noch, sei es hier oder an einer früheren Stelle darauf hindeuten, daß in dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke den gleichen Schenkeln gleiche Winkel und umgekehrt den gleichen Winkeln gleiche Schenkel gegenüber liegen.

Die beiden Diagonalen halbiren sich, der Halbirungspunkt steht von den Ecken des Quadrats und den Seiten gleichweit

ab, oder der Halbirungspunkt der Diagonalen ist centrisch nach den Ecken und Seiten, so daß man um das Quadrat einen Kreis durch seine vier Ecken legen kann und die vier Seiten in den Kreis hineinfallen, ebenso auch in das Quadrat, so daß jede Seite desselben den Kreis berührt oder nur einen Punkt mit demselben gemein hat. (Umschriebener und eingeschriebener Kreis, eingeschriebenes und umschriebenes Quadrat.) Die Diagonalen des Quadrats schneiden sich unter rechten Winkeln; zwei einander gegenüberliegende, welche den Scheitel gemein haben, deren Schenkel gerade Linien bilden, heißen der Lage nach Scheitelwinkel, welche entstehen, wenn sich zwei Gerade durchschneiden, oder wenn man sich die Schenkel eines Winkels rückwärts über den Scheitel verlängert. In diesem Falle, wie überhaupt sind die Scheitelwinkel einander gleich, denn ein und derselbe Nebenwinkel ergänzt sie zu zwei Rechten oder 180°.

Verbindet man den centrischen Punkt der oberen Fläche mit dem centrischen Punkt der Grundfläche, ebenso den centrischen Punkt der vordern und hintern, der rechten und linken Fläche, so erhält man drei Gerade, welche Achsen des Würfels heißen. Dieselben sind gleich groß und schneiden sich rechtwinklig in einem Punkte im Innern des Würfels, welcher von den Eckpunkten des Würfels und den Seitenflächen desselben eine respektive gleiche Entfernung hat oder centrisch ist, so daß man sowohl durch die acht Ecken des Würfels eine Kugel legen kann, als auch eine solche Kugel, welche die sechs Seitenflächen des Würfels in je einem Punkte berührt. (Umschriebene und eingeschriebene Kugel, eingeschriebener und umschriebener Würfel.) Um aber zu messen, wie weit ein Punkt vom andern entfernt ist, dazu hat man die Gerade zwischen beiden Punkten zu messen; die Entfernung eines Punktes von einer Geraden oder einer Ebene aber ist die Senkrechte, welche von demselben nach der Geraden oder nach der Ebene gezogen werden kann.

Verbindet man die rechte obere vordere Ecke mit der linken untern hintern Ecke durch eine Gerade, so heißt eine solche Linie Diagonale des Würfels. Solcher Diagonalen, welche an Größe gleich sind und sich unter schiefen Winkeln schneiden, giebt es vier.

Legt man durch die beiden Diagonalen der oberen und der

untern Fläche, welche die gleichnamigen Ecken verbinden und parallel sind, eine Ebene oder durch die Diagonale des Würfels und eine derselben gegenüber liegende Ecke, so zerfällt der Würfel in zwei an Gestalt und Größe gleiche Theile, von denen jeder in den leeren Raum des andern ganz hineinpaßt. Ein jeder solcher Körper hat dann ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zur Grund- und oberen Fläche, welche beide kongruent, der Lage nach parallel sind; denn Theile von parallelen Ebenen und Geraden sind selbst parallel. Die beiden Seitenflächen sind Quadrate des Würfels, die fünfte Fläche, welche auch eine Seitenfläche ist, hat zwar vier rechte Winkel, die gegenüberliegenden Seiten sind auch parallel und gleich, aber die den rechten Winkel einschließenden oder bildenden Seiten sind ungleich; denn das eine Seitenpaar sind Kanten des Würfels, das andere Diagonalen des oberen und untern Quadrats. *Ein solches Parallelogramm, welches zwar rechte Winkel hat, dessen gegenüberliegende Seiten aber nur gleich sind, heißt Oblongum.* Der einzelne der beiden Körper, welcher ein Dreieck zur Grundfläche hat und eine *dreieckige, senkrechte Säule* ist, sowie das Oblongum kommen später noch ausführlich zur Besprechung.

Fragt man nach den verschiedenen *Stellungen*, welche man einem Würfel geben kann, so kann derselbe entweder auf einer Ecke, oder auf einer Kante, oder auf einer der sechs Flächen stehen, welche letztere Stellung bezüglich der Standfestigkeit die sicherste ist. Der Schwerpunkt eines Würfels liegt in seinem centrischen Punkte.

	h	
l	G	r
	v	
	o	

Denkt man sich die sechs Quadrate, welche den Würfel begrenzen, in eine Ebene gelegt, so erhält man das sogenannte *Netz* des Würfels, nach welchem man, z. B. aus Pappe denselben selbst konstruiren oder anfertigen kann. Dasselbe gestaltet sich folgendermaßen:

Wo die punktirten Linien sich befinden, schneidet man die Pappe zur Hälfte durch, um dann das Umklappen der einzelnen Flächen und endlich das Ver-

kleben mit Papierstreifen und Kleister oder Leim vornehmen zu können.

Wir wenden uns weiter zur Messung, Berechnung und Konstruktion dessen, was am Würfel gemessen, berechnet und konstruirt werden kann, also zur Messung und Berechnung von Linien, Quadrat- und Würfelumfang, von Winkeln, zur Messung, Zeichnung und Antragung von Winkeln, zur Messung des Flächeninhaltes eines einzelnen von den sechs Quadraten und der ganzen Oberfläche, zur Messung und Berechnung des Kubikinhaltes des Würfels 2c.

Wenn es sich um Messung von Linien, Winkeln, Flächen und Körperinhalten handelt, so ist vor allen Dingen zu bemerken, daß 1) ein Gegenstand vorhanden sein muß, welchen man ausmessen soll; 2) ein solcher, welcher als Maßstab dient. Der Maßstab ist je nach der Beschaffenheit des zu messenden Gegenstandes verschieden, weil derselbe immer von derselben Art sein muß, wie der zu messende Gegenstand. Zur Ausmessung von Linen bedient man sich wiederum einer Linie, Flächen werden durch eine Fläche, Winkel durch einen Winkel, Kubikinhalte durch einen bestimmten Kubikinhalt gemessen, z. B. ein größerer Würfel durch einen kleineren. Ist nun der Maßstab stets gleichartig mit dem zu messenden Gegenstand, so daß bei der Messung von Raumgrößen mit einer, zwei oder drei Ausdehnungen nur ein Maßstab von ebensoviel Ausdehnungen angewendet werden kann, so hat man bei der Messung zu untersuchen, wie oft sich bei zu messenden Linien und Flächen der Linien- oder Flächenmaßstab abtragen läßt oder wie oft man den gegebenen Linien- oder Flächenmaßstab nehmen muß, um die vorliegende Linie oder Fläche zu erzeugen, ebenso, wie oft der Körper- oder Kubikmaßstab zu nehmen wäre, um den gegebenen Körper zu bilden oder den Raum desselben, wenn er leer wäre, auszufüllen. Es ist weiter leicht zu begreifen, daß ein Maßstab angewendet wird, welcher kleiner ist als die zu messende Größe; nähme man einen größeren, so würde derselbe in der zu messenden Größe nur theilweise enthalten sein und die Quotienten, welche sagten, wie oft? würden Brüche sein.

Messung der verschiedenen Linien, Umfänge rc. beim Würfel.

Der gewöhnliche Linienmaßstab ist der Fuß. Der Einfachheit wegen und um die in verschiedenen Ländern verschieden langen Fuße mit einander vergleichen, bezüglich in einander verwandeln zu können, hat man den pariser Fuß (′ par.) zu 12 pariser Zoll (″ par.) zu 12 pariser Linien (‴ par.) als Grundlängenmaßheit angenommen. Derselbe ist der sechste Theil einer bestimmten, in natura vorhandenen eisernen Stange, der Toise von Peru bei 13° R. oder 16¼° C. Der preußische oder rheinländische, sowie der weimarische sind auch 12theilig; der erstere hat aber nur 139,13 = $139^{13}/_{100}$‴ par., der letztere 125‴ par. Andere Fuße anderer Länder haben wieder andere Längen, wie wir leicht aus den in dem größeren Logarithmenwerke von Vega vorhandenen Tabellen und Verhältnissen oder anderwärts her entnehmen können (Sammlung mathem. Tafeln. Leipz. Weidmann 1840. Tafel XI. S. 620. oder Döring, Handbuch der Münz-, Wechsel-, Maß- und Gewichtskunde rc. 2. Aufl. Koblenz, 1854. Hölscher, an den betr. Stellen). Der kleinste Maßstab, welcher vorkommen kann, ist also eine Linie (par., rheinl. oder weim.); man könnte zwar auch die Linie wieder in 12 gleiche Theile zerlegen u. s. w., allein man würde bald zu der Grenze kommen, daß weder unsere Instrumente, noch unsere Sinne genügend wären. Im Nothfalle können noch halbe oder Viertel-Linien rc. angedeutet werden.

Die angedeuteten Zahlen dienen zunächst dazu, eine Länge, welche in pariser, preußischem oder weimarischem Maße ausgedrückt ist, in eine des anderen Landes zu verwandeln.

1) Wieviel preußische oder weimarische Fuße sind 15 pariser Fuß?

Da 1′ par. = 144‴ par., so sind

15′ par. = 15.144 = 2160‴ par.;

da aber 139‴ par. einen rheinl. Fuß bilden, so bilden 2160‴ par. soviel rheinl. Fuß, als 139 in 2160 enthalten ist:

```
139 2160 15
     139
     ---
      770
      695
      ---
       75
```

Antw. 15 par. Fuß sind $15^{75}/_{139}$' rheinl. Aber $^1/_{139}$' rheinl. = 1''' par., daher 15' par. = 15' rheinl. und 75''' par. Das ließ sich auch leicht so finden: 1' par. = 144''' par. = 139''' par. + 5''' par. = 1' rheinl. + 5''' par.; daher 15' par. = 15' rheinl. + 5 mal 15''' par. Durch Ansatz: 139:144 = 15: x; $x = \frac{144.15}{139}$;

oder x' rheinl.	15' par.
1	144''' par.
139	1' rheinl.

Da 1' par. größer ist, als 1' rheinl., so sind auch 15' par. größer, als 15' rheinl. und zwar sovielmal so groß, als 139 in 144 enthalten ist; $x = 15.\frac{144}{139} = \frac{15.144}{139}$.

In ähnlicher Weise verwandelt man die 15' par. in 15' weim. Denn 1' par. = 144''' par. = 125''' par. + 19''' par.; also sind 15' par. = 15 weim. + 15 mal 19''' par. Aber 15 mal 19''' par. = 250''' par. + 35''' par. = 2' weim. + 35''' par. Daher 15' par. = 17' weim + 35''' par. = $17^{35}/_{125}$' weim. = $17^7/_{25}$' weim.

Oder 125 : 144 = 15 : x;

$$x = \frac{144.15}{125} = \frac{144.3}{25} = 17^7/_{25}' \text{ weim.}$$

Oder x' weim.	15' par.
1	144''' par.
125	1' weim.

$$x = \frac{144.15}{125}.$$

Daraus die Regel: Willst Du pariser Fuße in rheinländische oder weimarische verwandeln, so multiplicire ihre Anzahl mit 144 und theile entweder mit 139 oder mit 125; der Rest bedeutet pariser Linien.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich verfahren, um rheinländische oder weimarische Fuße in pariser Fuße umzuwandeln. Man hat dann die Anzahl der rheinländischen oder weimarischen Fuße in pariser Linien zu verwandeln, d. h. mit 139 oder 125 zu multipliciren und mit 144 zu theilen. So sind also 15' weim. = $\frac{15.125}{144}$ par. und 15' rheinl. $\frac{15.139}{144}$' par.

Endlich ist es auch möglich, rheinländisches und weimarisches Maß gegenseitig in einander umzuwandeln. Denn 15' weim.

sind 15.125‴ par., und da 1′ rheinl. = 139‴ par., so sind $\frac{15.125'}{139}$ rheinl. = 15′ weim. und umgekehrt 15′ rheinl. = $\frac{15.139'}{125}$ rheinl. Der Rest bezeichnet ebenfalls pariser Linien, da man in eine Anzahl pariser Linien hineintheilt.

Bisher ist immer von solchem Längenmaße die Rede gewesen, bei welchem eine höhere Einheit zwölf niedere hat oder von dem Duodecimalmaße (dd); der Fuß, Zoll und die Linie können aber auch zehntheilig sein, so daß zehn niedere Einheiten, unserem Zahlsystem analog, je eine höhere bilden. Es kann dann verlangt werden, Längen dd in Längen d und umgekehrt zu verwandeln.

Aufgabe. 6′ 5″ 9‴ dd, wieviel sind es d?

Zunächst, wenn überhaupt eine Vergleichung Statt finden soll, muß entweder eine Länge dd = einer Länge d sein oder man muß doch wenigstens das Verhältniß beider kennen. Es ist üblich, daß 1′ dd = 1′ d oder 144‴ dd = 100‴ d sind, wodurch die Möglichkeit zur Verwandlung sofort gegeben ist.

Denn 6′ dd = 6′ d; dann sind ferner 5″ 9‴ dd = 69‴ dd; es machen aber 144‴ dd = 100‴ d, 1‴ dd = $\frac{100'''}{144}$ d, also 69‴ dd = $\frac{69.100'''}{144}$ d = $47\frac{11}{12}$‴ d = 4″ $7\frac{11}{12}$‴ d. Daher im Ganzen 6′ 5″ 9‴ dd = 6′ 4″ $7\frac{11}{12}$‴ d. Soll man also Zolle und Linien dd in Zolle und Linien d verwandeln, so multiplicirt man die in Linien dd verwandelte Länge mit 100 und theilt mit 144.

Bei der umgekehrten Aufgabe hätte man die Anzahl der Linien d mit 144 zu multipliciren und mit 100 zu theilen.

Aufg. 9′ 8″ 9‴ d, wieviel sind es dd? Die Fuße bleiben 9′ d = 9′ dd. Ferner 8″ 9‴ d = 89‴ d sind noch zu verwandeln. Da 100‴ d = 144‴ dd sind, so muß 1‴ d = $\frac{144'''}{100}$ dd sein, folglich 89‴ d = $\frac{144.89'''}{100}$ dd = $128\frac{4}{25}$‴ dd = 10″ $8\frac{4}{25}$‴ dd. Also im Ganzen sind 9′ 8″ 9‴ d = 9′ 10″ $8\frac{4}{25}$‴ dd. Natürlich hätte man auch anders verfahren können, z. B. nach der sogenannten Zerfällungsmethode.

Also 9′ —″ —‴ d	=	9′ —″ —‴ dd.
5„ — „	=	—„ 6„ —„ „
30 „	=	—„ 3„ $7\frac{20}{100}$ „
3 „	=	—„ —„ $4\frac{32}{100}$ „
6 „	=	—„ —„ $8\frac{64}{100}$ „
9′ 8″ 9‴ dd	=	9′ 10″ $8\frac{4}{25}$‴ dd.

Wollte man das Netz eines Würfels oder überhaupt Linien, welche länger sind als das Reißbret doch auf demselben zeichnen, so müßte man irgend einen Theil auftragen und als das Ganze gelten lassen. So könnte man anstatt des Fußes oder 12″ dd nur 1″ dd, oder anstatt des Fußes oder 144‴ dd nur 1‴ dd auftragen, so daß alle Linien auf dem Reißbrete nur $1/12$ oder $1/144$ der wirklichen Länge der Linien ausmachten, so hätte man nach dem Sprachgebrauche eine 12 oder 144malige Verjüngung der Linie eintreten lassen. Eine Linie auf dem Reißbrete bedeutet dann eine 12 oder 144 mal so große in der Wirklichkeit. Im Großherzogthum Sachsen Weimar-Eisenach hat man 16′ weim. à 125‴ par. = 2000‴ par. = einer Geometerruthe à 10′ à 200‴ gesetzt. Stellt man nun 1 Ruthe (°) von 2000‴ par. durch 1‴ par. oder $1/2$ Ruthe oder 1000‴ par. durch 1‴ par. auf dem Reißbrete dar, so hat man entweder den 2000 oder 1000 theiligen Linienverjüngungsmaßstab. Es ist üblich, daß 1‴ par. auf dem Reißbrete 1000‴ par. oder eine halbe Ruthe in der Wirklichkeit repräsentirt.

Nach diesen Auseinandersetzungen über das Längenmaß kann man mit Hülfe eines Längenmaßstabes die Kanten eines Würfels wirklich messen. Dieselben sind alle gleich — setzt man zu zwei gleichen Kantenlinien gleiche Stücke hinzu, nimmt man von denselben gleiche Stücke hinweg, nimmt man dieselben gleich oft oder theilt man dieselben in eine gleichgroße Anzahl gleicher Theile, so sind die nach diesen Verfahrungsweisen erhaltenen Linien immer wieder gleich. Diese von selbst einleuchtenden Sätze lassen sich noch bei den Winkeln, Flächen 2c. wiederholen, so daß man zuletzt zu dem Grundsatze kömmt: W e r d e n m i t g l e i c h e n G r ö ß e n g l e i c h e R e c h n u n g s w e i s e n v o r g e n o m m e n, s o g e l a n g t m a n z u g l e i c h e n R e s u l t a t e n. Oder: Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches; Gleiches von Gleichem abgezogen läßt Gleiches; Gleiches gleichoftmal genommen giebt Gleiches; Gleiches in gleichviele gleiche Theile getheilt giebt Gleiches. Die damit zusammenhängenden Umkehrungen lassen sich nun leicht aufstellen. Der allgemeinste Satz lautet: N i m m t m a n m i t g l e i c h e n R a u m g r ö ß e n u n g l e i c h e V e r f a h r u n g s w e i s e n v o r, s o w e r d e n d i e s e l b e n s c h l i e ß l i c h u n g l e i c h. Im Einzelnen: Addirt man zu gleichen Linien un-

gleiche, so wird die Summe ungleich; addirt man zu ungleichen Linien ungleiche, so kann die Summe gleich oder ungleich werden; zieht man von gleichen Linien ungleiche ab, so werden die Unterschiede ungleich und zwar muß diejenige Linie die kleinere werden, von welcher die größere abgezogen worden ist; zieht man von ungleichen Linien ungleiche ab, so können die Unterschiede ungleich bleiben oder gleich werden; nimmt man gleiche Linien ungleichoft, so werden die Resultate ungleich; nimmt man ungleiche Linien ungleichoft, so können sie ungleich werden, aber auch gleich; theilt man gleiche Linien in ungleichviele unter sich gleiche Theile, so werden die Theile ungleich; wenn man ungleiche Linien in ungleichviele unter sich gleiche Theile theilt, so können die Theile gleich oder ungleich werden.

Hat man eine Kante des Würfels gemessen und z. B. 4″ dd lang gefunden, so beträgt der Umfang des ganzen Würfels oder betragen die zwölf Kanten zusammen 4 mal 12 oder 48″ = 4′ dd. Eine jede Achse ist der Kante des Würfels gleich. Der Umfang eines einzelnen Quadrats ist eine Linie, welche so groß ist als die vier Seiten desselben zusammengenommen = der Summe der vier Seiten. Wäre also die Kante eines Würfels 4″ dd, so wäre der Umfang des einzelnen Quadrats = 16″ dd = 1′ 4″ dd. Dabei ist es räthlich und praktisch, von einem Würfel auszugehen, dessen Kante 1″ ist, die Kante dann um stets einen Zoll wachsen zu lassen, so daß dieselbe 2″, 3′ ꝛc. beträgt und dann zu untersuchen, wie der Umfang des neuen Würfels oder eines einzelnen Quadrats desselben mit dem Umfange des ersten Würfels oder eines einzelnen Quadrats desselben zusammenhängt und endlich das gefundene Gesetz in Worten aussprechen zu lassen.

Kante des Wrfls.	Umfang des W.	Umfg. eines einz. Quadrats.
1″ dd	12″ dd o. 1′ dd	4″ dd.
2″ „	24″ „ 2′ „	8″ „
3″ „	36″ „ 3′ „	12″ „ o. 1′
4″ „	48″ „ 4′ „	16″ „ o. 1′ 4″ ꝛc.

Daraus ergiebt sich, daß wenn ein Würfel von einer gewissen Kante einen gewissen Umfang des einzelnen Quadrats hat, dieser Umfang für Würfel und Quadrat 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß wird, wenn die Kante 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß wird. Also: Die

Kante eines Würfels, der Umfang eines Würfels und der Umfang eines einzelnen Quadrats desselben wachsen in demselben Verhältnisse. Man könnte noch fragen, wie groß die Diagonale eines einzelnen Quadrats oder auch des Würfels wäre, wenn die Seite oder Kante des Würfels bekannt wäre; da aber diese Aufgabe außer dem Satze des Pythagoras die Ausziehung der zweiten oder Quadratwurzel voraussetzt, so soll die Lösung derselben, sowie der übrigen Aufgaben, welche die Ausziehung einer dritten oder Kubikwurzel voraussetzen, später angedeutet werden.

Aufgaben.

1) Wieviel betragen folgende Maße in ihren nächst niederen Einheiten: 7′; 8′; 9′; 10′; 13½′; 20¼′; 3° 8′ 5″; 4° 9′ 7″ 3‴; 5′ 8″ 3‴; sowohl dd., als d, wobei wie immer 1′ dd = 1′ d vorausgesetzt ist?

2) Man verwandle folgende niedere Einheiten, soweit möglich, in ihre höheren: 583‴; 367″; 6378‴; 938′; 7305‴; 66″; 9345‴; 888‴; 999‴; 1000‴, sowohl dd, als auch d.

3) Man drücke folgende Längenmaße als Decimalbrüche der nächst höhern Einheit aus: 5° 7′ 8″ 3‴ d.; 7° 3′ 4″ d.; 2′ 7″ 8‴; 9″ 3‴; 5° 9′ 3″ 2‴; 5° 0′ 0″ 5‴.

4) Man zähle folgende Längenmaße, dd und d zusammen: 5° 8″ 2‴ + 8′ 9″ 3‴ + 2′ 5″ 7‴ + 9° 3′ 2‴ + 9″ 7‴ + 8° 7′ 6″ 5‴.

5) Man subtrahire 8° 9′ 7″ 3‴ — 6° 8′ 3″ 9‴; 5° 7′ 9″ — 3° 8′ 9″ 7‴; 11′ 5″ 7‴ — 3′ 8″ 9‴; 16° 7′ 8″ 9‴ — 11° 8′ 9″ 10‴, sowohl dd, als d.

6) Man nehme folgende Linien 3° 8′ 5″ mal 6; 7° 9′ 3″ 4‴ mal 8; 9′ 5″ mal 5¾; 8′ 3″ 7‴ mal 9,7; 7′ 7″ 7‴ mal 7,36 sowohl dd, als d.

Dabei wird vorausgesetzt, daß der Schüler schon verstehe, daß zwei benannte Zahlen gar nicht mit einander multiplicirt werden können. Was soll z. B. der Ausdruck 7 Zoll mal 7 Zoll oder 49 Zoll mal Zoll bedeuten? Was soll das „Zoll mal Zoll“ bedeuten? Erst später, beim Flächeninhalte des Quadrats, des Oblongums &c. kann angedeutet werden, in welchem Sinne z. B. eine benannte Seite des Quadrats mit sich selbst multiplicirt, oder zwei benannte Seiten mit einander multiplicirt werden können.

7) Man theile eine Gerade von 7° 8′ 5″ dd u. d in 3; 6; 7; 8,3 rc. gleiche Theile.

8) Wie oft ist eine Linie von 3° 5′ 8″ in folgenden Linien enthalten: 7° 8′ 3″; 9° 8′ 5″; 33° 3′ 5″ 7‴?

9) Man verwandle folgende Maße dd in Maße d: 3° 7′ 8″; 9° 3′ 5″; 6° 3′ 7″ 8‴; 9° 11′ 11″ 11‴.

10) Das Mètre ist der 40 millionste Theil des Erdmeridians = 3,18620 preuß. F. Das Mètre hat folgende Ober- und Unterabtheilungen:

1 Myriametre = 10 Kilometern
1 Kilom. = 10 Hektom.
1 Hektom. = 10 M.
1 Mètre = 10 Decim. 1 Dekam. = 10 M.
1 Decim. = 10 Centim.
1 Centim. = 10 Millim.

Wieviel Millimeter sind:
7 M.; 6 M. 3 Dekam.; 5 Hektom. 8 Dekam. 3 M.; 8 Dekam. 4 M. 7 Decim.; 9 Kilom. 3 Hektom.

10) Schreibe folgende Meterausdrücke als Decimalbrüche:
7 Kilom. 8 Hektom. 3 Dekam. 5 M.; 7 Hektom. 8 Dekam. 7 M.; 9 M. 3 Decim. 5 Centim.; 8 M. 2 Decim. 3 Millim.

11) Man löse folgende Decimalbrüche auf:
9,3 M.; 9,345 Hektom.; 9,345 Dekam.; 8,27 Dekam.; 0,45 Decim.

12) Da eine halbe Ruthe oder 1000‴ par. auf dem Plane einer Flur oder einer Stadt durch eine Linie dargestellt werden, wie viel Ruthen hat ein Umfang in der Natur, wenn der verjüngte 7‴; 12‴; 300‴; 475‴ enthält?

13) Wenn eine Linie in der Natur von 6° 7′ 4″ dd durch 9′ 11″ dargestellt wird, welches ist dann das Verjüngungsverhältniß? Wie kann man überhaupt bei Linien sehr leicht das Verjüngungsverhältniß finden?

14) Verwandle 8′ 9″; 9° 7′ 8″; 5° 7′ 9″ 3‴ des weim. Maßes in pariser Maß und umgekehrt.

15) 15′; 7′ 9″; 17° 3′ 5″ in Paris, wieviel in weim. Maße? und umgekehrt.

16) 8° 9′ 7″; 15′; 19′; 27′ rheinl., wieviel par. und weim.?

17) 18′; 5′ 3″; 9′ 7″ 8‴ par., wieviel rheinl.?

18) Wenn 1 österreichischer Fuß = 1,007 preuß. F. ist, oder wenn 1000 österr. = 1007 preuß. Fußen sind, wieviel österr. sind 8° 9′; 7° 3′ 5″ rheinl.; 9′ 7″ 8‴ und 8° 3′ weim.; 7° 3′ und 8° 3′ 5″ par.?

19) Die Kante eines Würfels ist 4′ 3″; 9″ 8‴; 7′ 3″ 2‴; 8″ 9‴, sowohl dd, als auch d, wie groß ist der Umfang eines einzelnen Quadrats und der ganzen Kanten zusammen?

20) Der Umfang eines Quadrats ist 28′; die Seite eines andern ist 3; 3¼; 5¼ mal so groß, wie die des gegebenen, wie groß ist sein Umfang?

21) Der Umfang eines Würfels ist 8′; wie groß ist der Umfang eines andern Würfels, wenn sich die Kante des ersten zur Kante des zweiten, wie 8 : 9 : 10 : 11 : 12 verhält?

22) Der Umfang eines Quadrats beträgt 32′; 8′ 9″ 4‴; 7° 8′ 9″; 10′ 5″ 6‴; 2′ 4″ 8‴; wie groß ist die Seite?

23) Der Umfang eines Würfels beträgt 96‴; 144‴; 36′; 10′ 9″ 8‴; 3° 7′ 8″ 4‴; wie groß ist die Kante desselben?

24) Gärten, Spielplätze, Aecker, Exercierplätze, Teiche rc. haben folgende Umfänge als quadratförmige Flächen: 100°; 76°; 36°; 144°; 48° — man soll verjüngte Flächen zeichnen, so daß die Ruthe als eine pariser Linie dargestellt wird. Dabei ist der unter den Hülfsmitteln beschriebene Maßstab zu benutzen.

Flächenmessung am Würfel.

Am Würfel kann entweder die Fläche eines einzelnen Quadrats ausgemessen und berechnet werden oder die Gesammtoberfläche des Würfels, welche aus den sechs gleich großen Quadraten des Würfels besteht. Um also die Oberfläche des Würfels zu finden, hat man nur die Fläche des einzelnen Quadrats sechs mal zu nehmen. Es kömmt also darauf an, die Fläche eines Quadrats zu finden, wenn man die Seite desselben kennt. Da man Flächen nur wieder durch eine Fläche, als einen gleichartigen Maßstab ausmessen kann, so kömmt es darauf an, für das Quadrat einen solchen Flächenmaßstab zu finden, welcher irgendoft auf dem zu messenden Quadrat oder auf der zu messenden Fläche überhaupt sich abtragen ließe oder welchen man irgendoft zu nehmen hätte, um das Quadrat oder überhaupt die vorliegende Fläche zu bilden. Man hat aus Gründen, welche sich im Ver-

laufe der Flächenberechnung von selbst ergeben werden, ein kleines Quadrat als Flächenmaßstab angenommen, dessen Seite eine Linie, ein Zoll, ein Fuß oder eine Ruthe ist, Quadratlinie (□‴), Quadratzoll (□″), Quadratfuß (□′), Quadratruthe (□°). Wir wollen von der Quadratlinie ausgehen und dabei die Linie, welche die Seite bildet, so voraussetzen, daß 12‴ einen Zoll bilden, 12″ einen Fuß ꝛc., also dd.

Man zeichne sich zunächst eine Quadratlinie, d. h. ein kleines Quadrat, dessen Seite eine Linie lang ist. Dann lasse man die Seite desselben um eine Linie wachsen, so erhält man ein Quadrat, dessen Seite zwei Linien lang und welches 4 □‴ Fläche enthält. Nun zeichnet man ein Quadrat dessen Seite drei Linien lang und dessen Flächeninhalt 9 □‴ ist, dann ein ferneres, dessen Seite 4‴ lang und dessen Fläche 16 □‴ groß ist ꝛc. So fährt man fort, bis man endlich ein Quadrat erhält, dessen Seite 12‴ oder 1″ lang ist und welches 144 oder 12 mal 12 □‴ enthält. In ähnlicher Weise verfährt man mit dem Quadratzoll, bis man den Quadratfuß erzeugt und mit dem Quadratfuße, bis man die Quadratruthe gebildet hat. Sucht man dann die einzelnen Sätze, welche sich bei dieser ganzen Betrachtung ergeben, zusammen zu stellen, so sind es etwa folgende.

1) Hat man irgend ein Quadrat und macht die Seite desselben 2, 3, 4 ꝛc. bis 12 mal so groß, so wird die Fläche 2 mal 2, 3 mal 3, 4 mal 4 ꝛc. bis 12 mal 12 mal so groß.

2) Der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seitenlänge man in Linien, Zollen, Fußen oder Ruthen kennt, wird gefunden, wenn man diese Zahl mit sich selbst multiplicirt oder ihr Quadrat nimmt und die entsprechende Flächeneinheit hinzufügt.

3) Die Eintheilungszahl (Reduktionszahl) beim Flächenmaße, welchem ein zwölftheiliges Längenmaß zu Grunde liegt, ist 144; hätte man zehntheiliges Längenmaß zu Grunde gelegt und die obigen Betrachtungen angestellt, so wäre man zur Flächenreduktionszahl 100 gekommen.

4) Ein Quadrat ist in einem andern ebenso oft enthalten, als die Quadrate der beiden Seiten, welche vorher auf gleiche Benennung gebracht worden waren.

5) Kennt man den Flächeninhalt eines Quadrats in irgend welchen Quadrateinheiten, so findet man die Seite desselben,

wenn man die Zahl, welche den Flächeninhalt ausdrückt, in zwei gleiche Faktoren zerlegt und einen davon nimmt, d. h. die Quadratwurzel auszieht.

Der erste Satz ist an sich selbst klar; der zweite bedarf nur einer Erläuterung. Denn hätte man die Aufgabe: Wie groß ist die Fläche eines Quadrats, wenn die Seite desselben 5′ 4″ 7‴ dd hat? so könnte man entweder die ganze Länge in Linien verwandeln, ihr Quadrat nehmen und Quadratzolle und Quadratfuße reduciren; oder man könnte die ganze Länge in Zolle verwandeln oder endlich in Fuße und ihr Quadrat nehmen, immer würde man zu demselben Resultate gelangen.

a) $5' \; 4'' \; 7''' = 64'' \; 7''' = 12$ mal $64''' + 7''' = 775'''$ dd. Daher beträgt die Fläche dieses Quadrats 775 mal 775 oder $600625 \square'''$. Reducirt man, so sind $600625 \square'''$ $= 28 \square' \; 139 \square'' \; 1 \square'''$. Also die Fläche $= \frac{775 \,.\, 775}{12 \,.\, 12} \square''$

b) $5' \; 4'' \; 7''' = 64^{7}/_{12}'' = \frac{775}{12}''; \; \frac{660625}{144} \square'' = 4171 \, ^{1}/_{144} \square''$ $= 4171 \square'' \; 1 \square'' = 28 \square' \; 139 \square'' \; 1 \square'''$.

c) $5' \; 4'' \; 7''' = 5' \; 4^{7}/_{12}'' = 5^{55}/_{144}'$. Also die Fläche $=$ $5^{55}/_{144} \,.\, 5^{55}/_{144} \square' = \frac{775 \,.\, 775}{144 \,.\, 144} \square' = \frac{600625}{20736} \square' = 28 \frac{20009}{20736} \square'$. Aber $1 \square'$ hat $144 \square''$, ein $\square''$ wieder $144 \square'''$, also ein $\square'$ hat 144 mal $144 = 20736 \square'''$. Demnach ist $\frac{1}{20736} \square' = 1 \square'''$, und $\frac{20017}{20736} \square'$ sind $20017 \square'''$. Verwandelt man diese in $\square''$ und $\square'''$ so hat man $139 \square' \; 1 \square'''$. Im Ganzen $28 \square'$ $139 \square'' \; 1 \square'''$.

Man ersieht also deutlich, daß es einerlei ist, ob man die Zahl, welche die Seitenlänge ausdrückt, resolvirt, dann mit sich selbst multiplicirt, dann reducirt; oder ob man vorher reducirt und die so erhaltene gemischte Zahl mit sich selbst multiplicirt und den Bruch der höchsten oder höhern Einheit in niedere resolvirt. Der gewöhnliche Fehler der Schüler besteht darin, daß sie 5′ 4″ 7‴ mit sich selbst zu multipliciren glauben, wenn sie die Fuße mit den Fußen ꝛc. multipliciren. Dadurch käme man zu dem ganz falschen Resultate: $25 \square' \; 16 \square'' \; 49 \square'''$. Das Falsche der Sache ergiebt sich aus den später gegebenen Andeutungen, um welche Flächenstücke ein Quadrat wächst, wenn man die Seite desselben wachsen läßt, das neue Quadrat konstruirt und seine Fläche mit der Fläche des ursprünglichen vergleicht.

Das unter 3) Gesagte ist an sich selbst deutlich; was 4) anlangt, so erläutert es sich durch ein Beispiel. Wäre die Seite eines Quadrates z. B. 7′, die eines andern 14′ lang, so wäre die Fläche des ersten 49 □′, die des zweiten 196 □′; daher das erste im zweiten ebenso oft enthalten, als 49 in 196 oder 4 mal. Das mußte schon darum der Fall sein, weil die Seite des zweiten 2 mal so groß war, als die des ersten. Hätte man 7′ und 9′ Seitenlänge gehabt, so wäre das zweite sovielmal so groß, als 49 □′ in 81 □′ enthalten wäre, oder $1\frac{32}{49}$ mal.

Den ersten Satz kann man, wie sich leicht aus der Ansicht der dort angedeuteten Konstruktion oder Zeichnung ergiebt, auch umdrehen: Macht man die Seite eines Quadrats $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ 2c. mal so groß, so wird die Fläche $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ 2c. des ursprünglichen Quadrats. Hätte man also z. B. eine quadratische Zeichnung oder Landkarte und wollte eine andere anfertigen, welche $\frac{1}{25}$ oder $\frac{1}{100}$ der ursprünglichen an Fläche wäre, so müßte man $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Seitenlänge zur Seite der verjüngten Fläche nehmen. Denn eine Fläche, z. B. ein Quadrat verjüngt darstellen bedeutet, einen beliebigen Theil davon als das Ganze annehmen, so daß man aus der Größe der Kopie einen Schluß auf das Original, oder aus der Größe einer Karte einen Schluß auf die Fläche in der Wirklichkeit machen kann. Da hier einmal das Verjüngungsverhältniß berührt ist, so möge noch eine das Verjüngungsverhältniß bei der weimarischen Landesvermessung betreffende Bemerkung hier eine Stelle finden. Da man 1‴ par. auf dem Reißbrete 1000‴ par. in der Natur bedeuten läßt, so repräsentirt 1 □‴ par. auf dem Reißbrete 1000000 □‴ par. oder $\frac{1}{4}$ □° par. in der Wirklichkeit. Der 1000theilige Längenmaßstab wird also 1000000theilig für die Flächen. Bedeutete 1‴ par. 1000‴ par. in der Natur, so bedeutete eine Quadratlinie par. 4000000 □‴ par. oder 1 □° par.

Das unter 5) Gesagte ergiebt sich leicht. Denn hätte man 100 □‴ Fläche eines Quadrats, oder 121 □‴ oder 144 □‴, so müßten 100 □‴ = 10.10 □‴ sein, also die Seite 10‴; im zweiten Falle 11‴, im dritten 12‴. Hätte ein Quadrat $\frac{4}{25}$ □′, so müßte die Seite $\frac{2}{5}$′ sein, weil $\frac{2}{5}$ mal $\frac{2}{5}$ = $\frac{4}{25}$ □′ ist. Wäre nun der Flächeninhalt 13 □′, so müßte die Quadratseite größer als 3′, aber kleiner als 4′ sein. Der Schüler

glaubt nun schnell, daß die Zahl eine gemischte Zahl zwischen 3 und 4 liegend sein müsse; allein man kann denselben bald überzeugen, daß kein ächter oder unächter Bruch mit sich selbst multiplicirt eine ganze Zahl ausmachen kann. Auf diesem Standpunkte kann man also nur sagen, die Seite sei eben weder eine ganze Zahl, noch ein vollständig auszudrückender Bruch, da man mit dem Irrationalen und Inkommensurablen sich hier nicht beschäftigen will. Beim Rechenunterrichte wird gezeigt, wie man durch Ausziehung der Quadratwurzel aus Zahlen, welche nicht selbst Quadrate sind, sich denselben bis zu jedem Grade der Genauigkeit annähern kann, so daß man außer den Ganzen, die $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ zc. finden, die eigentliche Quadratwurzel selbst aber als eine in unserm Zahlsysteme ausgedrückte Zahl nie vollständig oder fix und fertig darstellen kann. Wollte man die Länge der Kante des Würfels aus seiner Oberfläche finden, so hätte man zuerst dieselbe mit 6 zu theilen, um ein einzelnes von den sechs Quadraten zu finden und aus dem Flächeninhalte die Quadratwurzel auszuziehen. Wäre z. B. die Oberfläche des Würfels = 96 □″, so wäre ein einzelnes Quadrat 16 □″, also die Seite 4″ lang.

Es könnte noch der Fall vorkommen, daß ein im zwölf- oder zehntheiligen Maße ausgedrückter Flächeninhalt vom einen in das andere umgewandelt werden sollte. Zu diesem Zwecke könnte man sich eine Tabelle anlegen, wie folgt.

Da 1′ dd = 1′ d, so ist auch 1 □′ dd = 1 □′ d; daher auch 144 □″ dd = 100 □″ d und 144.144 oder 20736 □‴, sind 100.100 oder 10000 □‴.

Beispiel

7 □′ 76 □″ 99 □‴ dd, wie viel sind es d?

x □″ d	76 □″ dd	x □‴ d	99 □‴ dd
144	100 □″ d	20736	10000 □‴ d

x = $52\frac{7}{9}$ □″ d. x = $47\frac{107}{144}$ □‴ d

= 52 □″ $77\frac{7}{9}$ □‴ d = $47\frac{107}{144}$‴

Zusammenstellung

7 □′ 52 □″ $77\frac{7}{9}$ □‴ d

$47\frac{107}{144}$

7 □′ 53 □″ $15\frac{75}{144}$ □‴ d = 7 □′ 76 □″ 99 □‴ dd.

Wie sich von selbst versteht, würde man auf dem andern möglichen Wege ganz zu demselben Resultate gelangen. Denn verwandelt man die 76 □″ dd durch Multiplikation mit 144 in □‴ dd und zählt die 99 □‴ dazu, so erhält man 11043 □‴. Man fragt dann

$$\begin{array}{r|l} x \, \square''' \, d & 11043 \, \square''' \, dd \\ 20736 & 10000 \, \square'' \, d \\ \hline \end{array}$$

$$x = 5325\tfrac{75}{144} \, \square''' \, d.$$

Alle Würfel sind einander ähnlich; nennt man die Kanten a und b bei zwei verschiedenen Würfeln, so sind die Oberflächen 6a□ und 6b□, also verhalten sich die Oberflächen, wie die Quadrate über den Kanten; zu einer 2, 3, 4 ꝛc. n mal so großen Kante gehört eine 4, 9, 16. n□ mal so große Oberfläche. Ist die Fläche eines Quadrats = F, so muß man, um die Seite zu finden, die Zahl F in zwei gleiche Faktoren zerlegen und einen davon nehmen, d. h. die Quadratwurzel ausziehen; ist O die Oberfläche des Würfels, so hat man dieselbe mit 6 zu theilen und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zu ziehen, um die Kante zu finden.

Aufgaben über den Flächeninhalt des Quadrats und damit Zusammenhängendes.

1) Es sollen reducirt werden: 338 □‴; 5638 □″; 536 □′; 345 □″; 786 □‴ dd.

2) Reducire: 536 □‴; 7846 □‴; 893206 □‴; 5378 □″; 1379 □″; 367 □′; 3456 □′, dd.

3) Folgendes Duodecimalmaß: 3 □° 5 □′; 7 □° 3 □′ 100 □″; 98 □′ 99 □″ 99 □″ 66 □‴; 9 □′ 36 □″ 77 □‴ soll in das entsprechende zehntheilige Maß umgewandelt werden.

4) Verwandle folgendes zehntheilige Flächenmaß: 7 □° 38 □′; 9 □° 32 □′ 25 □″; 88 □′ 99 □″ 99 □‴; 33 □″ 66 □‴ in das entsprechende zwölftheilige Flächenmaß.

5) Ein quadratischer Garten enthält auf einem Stadtplane 36 □‴, wie groß ist derselbe in der Natur?

6) Ein quadratischer Acker hat in der Natur 36 □° 33 □″ 37 □‴, wie groß an Fläche muß derselbe auf dem verjüngten Plane dargestellt werden?

7) Die Seite eines Quadrats ist 6′; 7′; 8′; 6° 7′; 8° 7′ 5″; 9′ 8″ 6‴ dd.; ebenso 5′; 7′ 5″; 8° 3′; 9′ 5″; 7′ 7″ 5‴; 9′ 9″ 7‴ d.; wie groß ist der Flächeninhalt?

8) Ein quadratförmiger Garten hat eine Seite von 18° 6′ d.; die Quadratruthe kostet 4 Thlr. 15 sgr.; was kostet der ganze Garten?

9) Ein quadratischer Saal, dessen Seite 20° 5′ groß ist, soll mit Bretern ausgelegt werden; was kostet die Belegung, wenn ein Quadratfuß Bret 3 sgr. 6 pf. kostet?

10) Der Umfang eines Quadrats ist 64″; 72‴; 96″; 100′, sowohl dd, als auch d, wie groß ist der Flächeninhalt?

11) Was kostet ein quadratisches Blech, dessen Seite 5′ 8″; 7′ 9″; 6′ 3″ lang ist a. von Eisenblech, b. von Zinkblech, c. von Kupferblech, wenn der betreffende Quadratfuß 5 sgr., 6 sgr. 12 sgr. kostet?

12) Um aus dem bekannten Flächeninhalte eines Quadrats die Länge der Seite wieder zu finden, hat man den Flächeninhalt in zwei gleiche Faktoren zu zerlegen und einen davon zu nehmen oder die Quadratwurzel auszuziehen. Sollte der Schüler dazu auf dieser Stufe die Fertigkeit noch nicht besitzen, so kann derselbe doch angehalten werden, versuchsweise aus wirklichen Quadraten die Wurzel zu ziehen oder die Seite so genau zu bestimmen, daß dieselbe größer als n, aber kleiner als n + 1 ist. Dazu muß der Ausdruck des Flächenmaßes in die kleinsten Quadrateinheiten zerlegt werden. Also, wäre der Flächeninhalt 156□‴ dd, so müßte die Seite > 12, aber < 13 sein; denn 12.12 = 144 und 13.13 = 169.

a) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, wenn die Fläche im Decimalmaße beträgt:

480249□‴; 760384□‴; 94□′ 28□″ 41□‴; 218□′; 395□‴; 8□″ 77□‴; 8□″ 97□‴; 9□″ 74□‴.

b) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, wenn die Fläche im Duodecimalmaße beträgt:

1□′ 136□″ 81□‴; 30□′ 113□″ 49□‴; 38□′ 103□″ 16□‴; 3□° 7□′ 76□″; 36□′ 76□″ 99□‴.

13) Wie groß ist ein Quadrat, welches eine 2, 3, 4, 5 . . . n mal so große Seite als ein anderes hat, wenn der Inhalt des andern 7□′; 8□′ 5□″; 9□° 6□″ 7‴ dd hat?

14) Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Quadrate, wenn sich ihre Seiten, wie 6 : 7; wie 1 : ½; wie 5 : 6¾; 7½ : 9³⁄₇ verhalten?

15) Wie groß muß die Seite eines Quadrats werden, das einen 4, 9, 16, 25, 36 . . . n^2 mal so großen Flächeninhalt erhalten soll?

16) Wie groß aber, wenn die Fläche 6, 10, 28 ꝛc. mal so groß werden soll?

17) Ein Quadrat soll ¼; ⅓; 4/9; 16/25; 25/36; 18/19; 16/17 eines andern werden, wie groß muß man die Seite machen?

18) Ein quadratischer Platz kostete 12450 fl. 54 kr., die Quadratruthe d. wurde mit 8 fl. 24 kr. bezahlt. Wie groß war der Inhalt und die Seite des Platzes?

19) Wenn ein Quadrat mit Bretern belegt 25 sgr. kostet, wie theuer ist ein großer quadratischer Saal zu dielen, wenn die Seite desselben 80 mal so groß ist?

20) Diagonale eines Quadrats 10'; gesucht die Seite und der Inhalt.

21) Inhalt 100 □'; gesucht die Diagonale.

Kubikinhalt des Würfels.

Um etwas Körperliches, den Kubikinhalt des Würfels zu messen, muß man einen körperlichen oder kubischen Maßstab annehmen. Setzen wir einmal voraus, daß sich die Kante des zu messenden Würfels mit dem gewöhnlichen Längenmaßstabe, im äußersten Falle, durch die Linie ausmessen lasse, wobei an die Möglichkeit gar nicht gedacht wird, daß eine Linie durch die kleinste Einheit des Längenmaßstabes sich gar nicht messen lasse, so ist die kleinste Einheit des kubischen Maßes die Kubiklinie, k‴, d. h. ein kleiner Würfel, an welchem jede Kante eine Linie lang ist. Die nächst größeren Einheiten des Körpermaßes wären dann der Kubikzoll, k″; der Kubikfuß k′; die Kubikruthe k°; Kubikmeile, wenn es sich um die Ausmessung sehr großer Körper handelt.

Um recht deutlich zu zeigen, wie der Kubikinhalt eines Würfels, z. B. einer Kubiklinie wächst, wenn man die Kante allmälig um einzelne Linien wachsen läßt, müßte man einen Vorrath von 1728 Kubiklinien haben. Um einen Würfel von

zwei Linien Kantenlänge zu erhalten, müßte man acht Kubiklinien zusammen setzen und zu einem Würfel anordnen; 27 Kubiklinien bildeten einen Würfel, dessen Kante 3 Linien, 64 k''' bildeten einen Würfel, dessen Kante 4''' lang wäre. Führe man so fort, so würde man bald erkennen, daß ein Würfel von 5''' Kantenlänge 125 k''', von 6''' 216 k''', von 7''' 343 k''', von 8''' 512 k''', von 9''' 729 k''', von 10''' 1000 k''', von 11''' 1331 k''', von 12''' 1728 k''' hätte. Da aber 12''' einen Zoll bilden, so hätte man einen Kubikzoll, welcher 1728 k''' hat. Setzt man solche Anschauung fort, so findet man für das zwölftheilige Längenmaß, daß 1728 k'' = 1 k', 1728 k' = 1 k° sind.

Hat man aber nicht 1728 k''' zur Hand, so müßte man anders verfahren. Hätte man nämlich zuerst eine Kubiklinie und stellt sich einen Würfel vor, dessen Kante zwei Linien lang wäre, so betrüge die Grundfläche vier Quadratlinien. Denkt man sich durch den neuen Würfel in der Höhe einer Linie eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt, also von rechts nach links, eine zweite durch die Mitte der vorderen Fläche und zwar nach hinten, eine dritte durch die Mitte der oberen Fläche und zwar von oben nach unten, so zerfiele der ganze Würfel in 8 k'''. Also: Ist die Kante eines Würfels 2''', so beträgt der Kubikinhalt 2 mal 2 mal 2 oder 8 Kubiklinien. Hätte man einen Würfel von drei Linien Kante, so müßte man in einer Höhe von 1''' und 2''' parallel zur Grundfläche eine Ebene legen von rechts nach links, ebenso hätte man durch $1/3$ und $2/3$ der vordern Fläche Ebenen von vorn nach hinten, endlich durch $1/3$, $2/3$ der oberen Fläche Ebenen von oben nach unten zu legen, wodurch der Würfel von 3''' Kantenlänge in 27 k''' zerfiele. Also: Ist die Kante eines Würfels 3''' lang, so ist der Kubikinhalt 3 mal 3 mal 3 oder 27 k'''. Also die Betrachtung fortsetzend, läßt man die Kante des Würfels 4, 5, 6 2c. 12''' lang werden und findet den Kubikinhalt 64; 125, 216 2c. 1728 k'''. Das läßt sich überhaupt so erweitern, daß wenn man sich einen Würfel von beliebiger Kante denkt, der Kubikinhalt eines andern mit 2, 3, 4 2c. so großer Kante 8, 27, 64 2c. mal so groß wird.

Daher:

1) Läßt sich die Kante eines Würfels mit einem Längenmaße

m messen, z. B. mit der Linie, dem Zolle, dem Fuße, der Ruthe ꝛc., so daß l eine ganze Zahl ist, welche sagt, wie oft das Maß m in der Kante enthalten ist, so findet man den Kubikinhalt, wenn man l dreimal mit sich selbst multiplicirt und zu dem Produkt aus den drei gleichen Faktoren l.l.l die entsprechende Kubikeinheit hinzufügt. Wäre z. B. $l = 7', 8', 9^{0}$, so wäre der Kubikinhalt $K = 7.7.7 = 343$ k″, oder $= 8.8.8 = 512$ k′, oder $= 9.9.9 = 729$ k⁰.

2) Setzt man anstatt des zwölftheiligen Längenmaßes zehntheiliges voraus, so wäre nicht mehr 1728 die Eintheilungszahl (Reduktionszahl), sondern 1000, weil $10.10.10 = 1000$ ist.

3) Macht man die Kante eines Würfels n mal so groß, so wird der Kubikinhalt n mal n mal n oder n^3 mal so groß; daher verhalten sich zwei Würfel, deren Kanten mit demselben Längenmaße gemessen sind, so wie sich diese Kanten 3 mal mit sich selbst multiplicirt zu einander verhalten. Ist z. B. die Kante eines Würfels 4′, die eines andern 7′, so verhält sich der erste Würfel zum zweiten, wie 64 : 343 oder der zweite ist $5\frac{23}{64}$ mal so groß.

4) Wäre die Kante des Würfels nicht in Linien, Zollen, Fußen ꝛc., sondern in einer Verbindung dieser Längenmaße gegeben, z. B. 5′ 7″; 5′ 7″ 3‴; 5′ 0″ 3‴; 7″ 2‴ ꝛc. so könnte man Alles auf die kleinste Benennung bringen, z. B. 5′ 7″ = 67″; 5′ 7″ 3‴ = 807‴; 5′ 0″ 3‴ = 723‴; 7″ 2‴ = 86‴, dann den Kubikinhalt berechnen und, dafern derselbe nicht nur Kubiklinien, sondern auch Kubikzolle, Kubikfuße und Kubikruthen enthielte, dieselben durch die Reduktionszahl 1728 ausscheiden. In den obigen Beispielen hätte man:

a) 67 mal 67 mal 67 = 300763 k″ = 174 k′ 91 k″. Anstatt aber 5′ 7″ in Zolle zu resolviren, könnte man auch die Zolle zu Fußen reduciren und hätte $5\frac{7}{12}'$ oder $\frac{67}{12}'$; $\frac{67}{12}$ mal $\frac{67}{12}$ mal $\frac{67}{12} = \frac{300763}{1728}$ k′ = 300763‴ k; man gelangt also ganz zu denselben Resultate.

b) 5′ 7″ 3‴ = 807‴; K = 807 . 807 . 807 k‴ = 525557943 k‴ = 176 k′ 14 k″ 567 k‴. Aber 5′ 7″ 3‴ $= 5\frac{29}{48}' = \frac{269}{48}$, also der Kubikinhalt $= \frac{269.269.269}{48.48.48} = \frac{19465109}{110592}$ k′. Resolvirt man, so ergiebt sich K = 176 k′ 14 k″ 567 k‴;

denn man findet bei der Division zuerst den Quotienten $176\frac{917}{110592}$ k′; resolvirt man $\frac{917}{110592}$ mit 1728, so findet man $\frac{1584576}{110592} = 14$ k″ und $\frac{36288}{110592}$ k″; hebt man diesen Bruch, so hat man $\frac{567}{1728}$ k″ oder 567 k‴.

c) 723‴ mal 723‴ mal 723‴ = 377933067 k‴ = 126 k′ 983 k″ 459 k‴. Hätte man reducirt, so wären 5′ 0″ 3‴ = $5\frac{3}{144} = \frac{723}{144}$′ gewesen; daher $\frac{723 \cdot 723 \cdot 723}{144 \cdot 144 \cdot 144}$ k′ = $\frac{377933067}{2985984}$ k′. Dividirt und resolvirt man, so ergiebt sich wiederum dasselbe Resultat = 126 k′ 983 k″ 459 k‴.

d) 86‴ . 86‴ . 86‴ = 636056 k‴ oder 368 k″ 152 k‴. Hätte man reducirt, so hätte man $\frac{86}{144}$′ gehabt; daher K = $\frac{86 \cdot 88 \cdot 86}{144 \cdot 144 \cdot 144} = \frac{638058}{2985984}$ k′; resolvirt man, so kömmt man zu demselben Resultate.

Anstatt also die Kante in der kleinsten Benennung auszudrücken, dieselbe 3 mal mit sich selbst zu multipliciren und die entsprechende Kubikeinheit hinzuzufügen, konnte man auch den Zahlwerth der Kante auf die höchste vorhandene Benennung bringen und diesen Bruch 3 mal mit sich selbst multipliciren und die entsprechende Kubikeinheit hinzufügen; den Bruchtheil der höchsten Kubikeinheit mußte man dann resolviren.

5) Handelte es sich darum, aus dem bekannten Kubikinhalte eines Würfels die Länge der Kante desselben zu bestimmen, so müßte man rückwärts die den Kubikinhalt ausdrückende Zahl in drei gleiche Faktoren zerlegen und einen davon nehmen oder die dritte Wurzel ausziehen. Hätte z. B. ein Würfel einen Kubikinhalt von 4913, 17576, 39304 xc. k‴, so müßte die Kante 17, 26, 34 xc. ‴ betragen, weil 17.17.17 = 4913; 26.26.26 = 17576; 34.34.34 = 39304. Sollte man aber die Kante des Würfels bestimmen, welcher 500 k‴ hat, so kann dieselbe weder 7‴ sein, weil 7.7.7 = 343, noch 8, weil 8.8.8 = 512. Die Kante muß größer als 7, aber kleiner als 8 sein und näher an 8 liegen. Dieselbe ist aber nicht 7 und ein ächter Bruch, weil eine gemischte Zahl 3 mal mit sich selbst multiplicirt, keine ganze Zahl werden kann. Eine solche Zahl heißt Irrationalzahl;



man kann sich derselben bis zu jedem Grade der Genauigkeit nähern, indem dieselbe = 7‴ + einigen Zehnteln + einigen Hunderteln + ꝛc. sein muß. Das Ausziehen der dritten oder Kubikwurzel aus Zahlen, welche wirklich durch 3malige Multiplikation einer Zahl mit sich selbst, oder auch nicht, entstanden sind, muß gezeigt werden.

6) Hat man verschiedene Würfel von gleicher Kante, so stimmen dieselben, was Größe und Gestalt anlangt, vollkommen überein; sie haben gleiche und gleichgestaltete Quadrate zu Begrenzungsflächen; die Achsen, Diagonalen sind gleich; die Diagonalebenen kongruent. Man kann also behaupten, daß ein Würfel durch seine Kante oder Diagonale, oder auch durch die Diagonale eines Begrenzungsquadrats bestimmt sei, so daß man einen sichern Schluß auf seine Größe machen kann. Den weiteren Zusammenhang zwischen der Diagonale eines Quadrats, der Diagonale des Würfels ꝛc. werden wir erkennen, wenn wir ein Quadrat zeichnen, den Zusammenhang seiner Seite mit der Diagonale und endlich den Zusammenhang der Seite des Quadrats und der Diagonale mit der Diagonale des Würfels erkennen. Haben mehrere Würfel eine ungleiche Kante, so stimmen dieselben zwar nicht mehr an Größe, doch aber noch an Gestalt überein und gleichen sich wie dem Alter nach verschiedene ähnliche Brüder.

Wir haben am Würfel kennen gelernt: Punkte, gerade Linien, Quadrate, Dreiecke, körperliche Ecken, einen Körperraum. Punkte kann man weder bezüglich ihrer Größe und Gestalt zugleich, noch in Berücksichtigung ihrer Größe oder Gestalt allein betrachten — weil sie weder Größe, noch Gestalt haben, was daher rührt, daß sie keine Ausdehnung haben. Die geraden Linien, welche am Würfel vorkommen, kann man zuerst nach Größe und Gestalt vergleichen; stimmen dieselben in beiderlei Hinsicht überein, so decken sie sich. Alle geraden Linien aber haben dieselbe Gestalt, denn sie sind alle nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden — indem ein Punkt nach einem andern Punkte sich so bewegt, daß er die dadurch angedeutete Richtung keinen Augenblick verläßt. Es kömmt also bei der Kongruenz der Geraden nur noch auf ihre Größe an. Daher sind kongruent, an Größe und Gestalt gleich, die zwölf Kanten; die Diagonalen der Quadrate; die Seiten- und

Eckenhalbmesser; die Diagonalen des Würfels. Was aber kongruent, ist auch einzeln an Größe und Gestalt gleich. An Größe verschieden, aber an Gestalt gleich sind die Kanten, Quadrat- und Würfeldiagonalen; an Gestalt sind alle Geraden gleich oder ähnlich. Betrachtet man die sechs Seitenflächen, so sind dieselben an Größe und Gestalt gleich, weil sie ganz nach demselben Bildungsgesetze entstanden sind.

Wie ein Würfel entsteht, ist schon angedeutet worden — es bewegt sich ein Quadrat bis zur Höhe der eignen Seite senkrecht nach oben. Denkt man sich die Entstehung zwei- oder mehrere Male wiederholt, so erhält man zwei oder mehrere Würfel, welche nach einem und demselben Bildungsgesetze entstanden und deßhalb an Größe und Gestalt übereinstimmend, identisch sind. Hätten wir zwei solche kongruente Würfel, so hörte der Begriff des Deckens, wie bei Geraden und Quadraten auf; man müßte sich den einen Raum vollkommen leer denken, dann würde der andere Würfel denselben ausfüllen. Bei solchen kongruenten Würfeln stimmen alle Seitenflächen in Größe und Gestalt und Anordnung überein; ebenso alle Linien; ebenso alle Flächen- und Linienflächenwinkel. Ebenso ist jede Ecke, welche man ein Dreikant nennen könnte, ganz auf dieselbe Weise entstanden, also kongruent; es treffen sich nämlich drei kongruente Quadrate in einem Punkte. Man sieht nun auch leicht, daß die Konstruktion eines Würfels festliegt, wenn man die denselben erzeugende Quadratfläche kennt; diese hängt aber wieder von der erzeugenden Seite ab; also kennt man einen Würfel nach Größe und Gestalt, wenn man die Kante desselben kennt. Würfel, welche an Größe gleich sind, können an Gestalt nicht verschieden sein; aber gestaltgleiche Würfel können an Größe verschieden sein. Denn ähnliche Würfel entstehen nach einem ähnlichen Bildungsgesetze; zwei an Größe verschiedene, aber an Gestalt gleiche Quadrate bewegen sich senkrecht empor, so hoch als die Quadratseite lang ist. Vergleicht man die beiden ähnlichen Würfel, so findet man, daß dieselben in allen Winkeln (Linien-, Flächen- und Linienflächenwinkeln) übereinstimmen: daß je zwei Seitenflächen einander ähnlich sind und in demselben Größenverhältnisse stehen, daß also auch die gleiche Winkel einschließenden oder ähnlichen Kanten und Flächen, gleiche Größenverhältnisse zeigen. Es ist aber

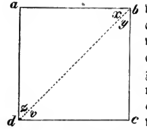
deutlich, daß das Verhältniß je zweier Flächen des Würfels von dem Verhältnisse der Kanten mit sich selbst multiplicirt und auf die Flächeneinheit bezogen, abhängt. Deßhalb sind alle Würfel ähnlich, weil sie in allen Winkeln und Verhältnissen der Kantenpaare übereinstimmen. Ist die Kante des einen Würfels a, die des andern b Längeneinheiten, so ist der Kubikinhalt bezüglich a.a.a und b.b.b Kubikeinheiten. Dieselben verhalten sich also wie $a^3 : b^3$ oder wie die dritten Potenzen ihrer Kanten.

7) Wollte man einen Würfel, z. B. von 27 k‴ verdoppeln, verdreifachen, vernfachen, oder halbiren, dritteln ꝛc. so müßte man die Kante desselben größer oder kleiner machen. Die Kante 3‴ müßte dann mit der dritten Wurzel aus 2, 3, . . . n oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . . n multiplicirt werden.

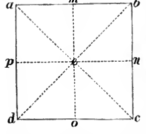
8) Nimmt man einmal auf den Stoff und das mit demselben zusammenhängende Gewicht Rücksicht, setzt man ferner eine Anzahl gleich großer Würfel von verschiedenem Stoffe voraus, so würde das Gewicht eines Kubikzolles Wasser = $1\frac{1}{9}$ Loth früher, jetzt 1,072 Loth sein; des Tannenholzes $\frac{1}{2}$. 1,072; des Spiritus $\frac{4}{5}$. 1,072; des Eisens $7\frac{1}{2}$. 1,072; des Quecksilbers $13\frac{1}{2}$. 1,072 Loth. Sind zwei Würfel von Wasser und Eisen gleichschwer, so muß der eiserne Würfel einen $7\frac{1}{2}$ mal so kleinen oder das Wasser einen $7\frac{1}{2}$ mal so großen Raum einnehmen. Das Eisen ist $7\frac{1}{2}$ mal so dicht oder hat ein $7\frac{1}{2}$ mal so großes specifisches Gewicht als das Wasser; die Zahlen, welche sagen, wie vielmal so schwer, oder so leicht ein Kubikzoll (irgend welches Volumen) eines Stoffes ist in Bezug auf einen Kubikzoll (ebenso großes Volumen) Wasser, heißen specifische Gewichtszahlen.

9) Zwölf- und zehntheiliges Kubikmaß lassen sich in einander umwandeln, da 1 k′ dd = 1 k′ d, oder 1728 k″ dd = 1000 k″ d ꝛc.

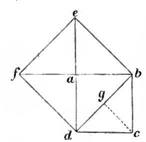
Um eines von den sechs Quadraten, von welchen der Würfel eingeschlossen ist, zu zeichnen und zwar entweder in derselben Größe oder verjüngt, so hätte man die Kante des Würfels zu messen und entweder in natürlicher Größe oder verjüngt aufzutragen. Sei ab die Kante, so braucht man nur, um das Quadrat zu zeichnen, bei b einen rechten Winkel aufzusetzen, mit dem rechtwinkligen Dreieck und bc so groß zu machen als ab;



dann setzt man bei c einen rechten Winkel auf die bc, macht cd = bc = ab und verbindet endlich d mit a. Man hätte aber auch nur den rechten W. dab zu zeichnen und da = ab zu machen und mit einer Zirkelöffnung = ab von b und d aus Bögen zu schlagen gebraucht, welche sich in c schnitten; Punkt c mußte man dann mit d und b verbinden. Die Diagonale db zerlegt das Quadrat in zwei kongruente, an Gestalt und Größe gleiche Dreiecke; legt man dieselben auf einander, so fällt der Winkel x auf den Winkel y und z auf v; daher muß $x = y = \frac{90}{2}° = 45°$ sein, ebenso $x = z = 45°$. In dem Dreieck dab, welches zwei gleiche Seiten hat ad = ab und gleichschenklig heißt, ist W. a = 90°, die beiden andern W. x und W. z sind 45°, folglich betragen die W. zusammen zwei Rechte oder 180°; ein Dreieck, in welchem ein Winkel ein Rechter ist, die beiden andern spitz, heißt **rechtwinklig**; also die beiden Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenklig, außerdem kongruent. Die Diagonale halbirt die Winkel des Quadrats, so daß jeder 45° beträgt.



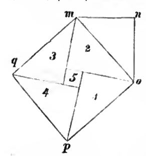
Zöge man in dem Quadrate abcd auch noch die andere Diagonale ac, so zerfiele das Quadrat in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke; die Diagonalen sind gleich; die Diagonalen halbiren sich im Durchschnittspunkte e, so daß ae = ec = de = eb ist; die Diagonalen schneiden sich unter rechten Winkeln. Da nun ae = de = eb = ec ist, so liegt der Punkt e von den vier Ecken des Quadrats gleichweit ab, so daß man durch die vier Ecken von e aus einen Kreis legen kann — **der Punkt e ist centrisch nach den Ecken.** Aber, wenn man von e aus Senkrechte mit dem Winkelhaken auf die vier Seiten fällt, so sind dieselben auch gleich — folglich stehen die vier Seiten von dem Punkte e gleichweit ab, oder **der Punkt e ist centrisch nach den Seiten,** so daß man von e aus mit em = en = eo = ep in das Quadrat einen Kreis beschreiben kann.



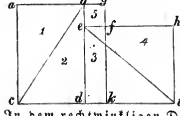
Vergleicht man das Quadrat abcd mit dem Quadrate dbef, welches man mit der Diagonale als Seite bauen kann, so hat das Quadrat abcd zwei solche Dreiecke, deren das Quadrat über der Diagonale oder Quadrat dbef vier hat; daher ist das Quadrat der Diagonale eines Quadrats zweimal so groß, als das ursprünglich gegebene Quadrat, oder auch: das Quadrat der Seite eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt (Hypotenuse), ist zweimal so groß, als das Quadrat der einen gleichen Seite (Kathete). Sei die Seite des Quadrats oder die Kathete des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks = 6″, so beträgt die Fläche des Quadrats 36 □″ und die Fläche des Quadrats, welches mit der Diagonale als Seite gemacht werden kann, 72 □″ oder 2.36 □″, oder ¼ und ½ Quadratfuß. Wäre also das Quadrat der Diagonale = 200 □″, so müßte das Quadrat selbst = 100 □″ sein, also die Seite = 10″. Es kann also aus der Größe des Diagonalenquadrats auf die Seite des ursprünglichen Quadrats oder der Würfelkante ein Schluß gemacht werden. Wäre ab = 6″, so ist die ganze Quadratfläche = 36 □″, also das Dreieck dab = 18 □″ = 6 mal 6 getheilt durch 2. Man findet also die Fläche des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, wenn man die beiden Katheten mit einander multiplicirt, das Produkt durch 2 theilt und die entsprechende Flächeneinheit hinzufügt. Um aber die Fläche des Dr. dcb, welches gleichschenklig und rechtwinklig ist, zu finden, konnte man $\frac{dg}{2}$ mit gc und $\frac{gb}{2}$ mit gc, d. h. die halbe Hypotenuse mit der halben, weil gc = dg ist, multipliciren.

Die Diagonale des Quadrats, einer Begrenzungsfläche des Würfels, die Kante des Würfels und die Diagonale des Würfels schließen auch mit einander ein Dreieck ein; die beiden ersten Seiten schließen den rechten Winkel ein oder sind die Katheten, die dritte ist die Hypotenuse. Kennt man die Kante des Würfels,

so findet man die Diagonale eines Quadrats, aus beiden, unter rechtem W. zusammengesetzt, die Diagonale des Würfels. Wäre z. B. Linie ab, wie früher die Kante des Würfels, oder Seite des Quadrats, so wäre db die Diagonale des Quadrats. Setzt man beide unter rechtem Winkel zusammen, verbindet die Endpunkte, so erhält man die Diagonale des Würfels, nämlich mo.



Errichtet man über mo ein Quadrat mopq, so kann man das Dreieck mno viermal hineinlegen; rechnet man nun noch das in der Mitte liegende Quadrat hinzu, welches mit dem Unterschiede der beiden Katheten errichtet worden ist, welcher Unterschied verschwände, wenn die Katheten gleich wären, so besteht also die Fläche des Quadrats des mo aus viermal Dreieck mno + dem kleinen Quadrate. Aber diese fünf Flächen kann man auch so anordnen, daß dadurch genau die Quadrate über den beiden Katheten gebildet werden. Nämlich:



Die Dreiecke 1, 2, 3, 4 u. die Quadratfläche 5 lassen sich, wie Fig. zeigt, so anordnen, daß 1) agkc oder das Quadrat der größern Kathete und fhik oder das Quadrat der kleineren Kathete herauskömmt. Folglich: In dem rechtwinkligen Dreieck mno ist das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Summe der beiden Quadrate über den Katheten.

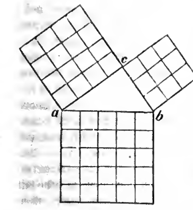
Also: Quadrat über mo = Quadrat über mn + Quadrat über no; aber das Quadrat über no ist = 2 mal Quadrat über nm; folglich

Quadrat über mo = Quadrat über mn + 2 mal Quadrat über mn = 3 mal Quadrat über mn.

Also mo□ = 3. mn□

mo = mn mal $\sqrt{3}$. oder

mo. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ = mn; was den Zusammenhang der Diagonale des Würfels mit der Kante des Würfels angiebt.



Am einfachsten und anschaulichsten gestaltet sich der Satz des Pythagoras, wenn man für das rechtwinklige Dreieck abc die Hypotenuse ab = 5 Längeneinheiten, ihr Quadrat = 25 Quadrateinheiten; die größere Kathete ac = 4 Längeneinheiten, ihr Quadrat = 16 Quadrateinheiten und die kleinere Kathete bc = 3 Längeneinheiten, ihr Quadrat = 9 Quadrateinheiten annimmt, dann ist das Quadrat der Hypotenuse = 25 Quadrateinheiten ebenso groß, als die Summe der beiden Kathetenquadrate = 16 Quadrateinheiten + 9 Quadrateinheiten. Dieß findet immer Statt bei allen rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten sich verhalten wie 3 : 4 : 5. Pythagoras (590 v. Chr. in Unteritalien) soll diese Wahrheit schon in Egypten kennen gelernt und auf alle rechtwinkligen Dreiecke erweitert haben. Vor Freude darüber soll er eine Hekatombe oder 100 Ochsen geopfert haben. „Seitdem", sagt Börne, „werde es allen Ochsen Angst, sobald eine neue Wahrheit erfunden werde."

Aufgaben.

1) Man resolvire 36 k'; 439 k' 300 k'; 1649 k' 736 k" 999 k'''; 356 k' 666 k" 379 k''', dd; desgleichen 375 k'; 938 k' 76"; 839 k' 766 k" 99 k'''; 536 k' 839 k" 3 k'''.

2) Man reducire 3768 k'''; 5376 k"; 3935 k'; 88 k' 999 k" 1238 k''', dd; 378945 k'''; 999999 k"; 36789 k'; 376 k' 99 k" 367 k''', d.

3) Man verwandle zwölftheiliges Kubikmaß in zehntheiliges und umgekehrt. 1 k' dd = 1 k' d ꝛc. 736 k" 999 k''' dd, wieviel sind es Decimal?

Da 1 k' dd = 1 k' d, so sind auch 1728 k" dd = 1000 k" d, also auch 1728 . 1728 k''' dd = 1000 . 1000 k''' d, oder 2985984 k''' dd = 1000000 k''' d. Also hat man nur die 736 k" 999 k''' in k''' dd zu verwandeln; man findet 1272777 k'''. Denn hätte man noch zu fragen

x k‴ d sind 1272777 k‴ dd
1728 1 k″ dd
1728 1 k′ dd
1 1 k′ d
1 1000 k″ d
1 1000 k‴ d;

Oder kürzer:

x k‴ d 1272777 k‴ dd
2985984 1000000 k‴ d.
x = 426254,4 k‴ d
= 426 k″ 254,4 k‴ d

man fände dann x in Kubiklinien d., welche man noch zu reduciren hätte.

88 k′ 799 k″ 378 k‴ dd, wieviel d?
884 k′ 99 k″ 425 k‴·dd., wieviel d?

4) Aus der Kante eines Würfels den Kubikinhalt zu finden: 7′; 8′ 5″; 9″ 3‴; 5′ 3″ 7‴; 9′ 9″; 7′ 5″ 8‴, dd; 7° 8′; 9′ 8″; 8′ 8″ 8‴; 7′ 5″ 7‴, d.

5) Wie viel Würfel von 4″ Kante lassen sich aus einem andern von 3′ 4″ Kante bilden?

6) Ein würfelförmiges Gefäß hat eine Kante von 3′ 5″ dd., wieviel Kubikzoll Wasser gehen in dasselbe? Wieviel Kubikfuß? Wie groß ist das Gewicht des Wassers, wenn 1 k″ = $1^{2}/_{9}$ Loth und 1 k′ = 66 preuß. Pfund schwer ist? oder nach dem neuen Gewicht 1 k′ = $61^{43}/_{57}$ Pfund und ein k″ = $1^{72}/_{1000}$ Loth.

7) Die Seite eines marmornen Würfels ist 2′ 6″, wie groß ist sein Gewicht, wenn das specif. Gewicht = 2,7 ist? Wie groß das eines Würfels von Granit von 3′ Seite, bei dem spec. Gew. 2,7?

8) Ein Gefäß in Würfelform, oben offen, 10″ dd lang; die Dicke der Seitenwände 5‴; das specif. Gewicht des Holzes = 0,7; wie groß ist das Gewicht des Gefäßes mit Wasser gefüllt?

9) Ein Würfel von Holz, mit dem specif. Gewichte 0,7 und der Kante von 9″ wird in das Wasser eingetaucht, wie tief sinkt er ein?

10) Der Kubikinhalt eines Würfels beträgt 33 k′ 97 k″; 100 k′ 1298 k″; 8120601 k‴; 12812904 k‴; 541343375 k″, dd.; 50653 k‴; 456 k″ 533 k‴; 13 k′ 997 k″ 521 k‴;

33 k′ 698 k″ 267 k‴; 99 k″ 366 k‴; 566 k′ 137 k″, dd., gesucht die Kante.

11) Man soll einen Würfel 2, 3, 4, . . . n mal so groß machen; desgleichen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . ., n mal so groß; wievielmal so groß muß man die Kante des Würfels machen?

12) Wie verhalten sich die Kubikinhalte mehrerer Würfel, deren Kanten 5′; 7′; 8′; 9′ 5″; 10′ 11″ dd sind?

13) Wie wächst der Kubikinhalt eines Würfels, wenn die Kante desselben 2, 3, 4 ꝛc. . . . n mal, oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . ., n mal so groß wird?

14) Wie kann man 7 k′ weim. in pariser oder rheinländische, und 36 k′ par. in weim. oder rheinl. und 100 k′ rheinl. in weim. oder pariser verwandeln?

x k′ p. — 77 k′ weim. beispielsweise
1 k′ w. — 125.125.125 k‴ w.
144.144.144 k‴ w. — 1 k′ par. ausmachen?

$$x = \frac{77 . 125 . 125 . 125}{144 . 144 . 144} \text{ k′ par.}$$

Sollten die 77 k′ weim. in par. verwandelt werden, so hätte man

$$x = \frac{77 . 125 . 125 . 125}{139 . 139 . 139}$$

100 k′ par., wieviel k′ weim. oder rheinl.?

$$x = \frac{100 . 144 . 144 . 144}{125 . 125 . 125} \text{ k′ weim und}$$

$$x = \frac{100 . 144 . 144 . 144}{139 . 139 . 139} \text{ k′ rheinl.}$$

15) Es sollen folgende Ölgefäße angefertigt werden, welche Würfelform haben und enthalten a. $\frac{1}{4}$ Pfd. b. $\frac{1}{2}$ Pfd. c. $\frac{3}{4}$ Pfd. d. 1 Pfd. e. $13\frac{3}{4}$ Pfd.; wie groß werden die Kanten, wenn 1 k′ preuß. = 66 Pfd. und wenn das mittlere specif. Gewicht der Ölarten = 0,925 gesetzt wird?

16) Die Kante eines Würfels ist 5″ 3‴; 8′ 4″; 7″ 9‴ dd; 6″ 7‴; 9″ 8‴ d.; wie groß ist die Oberfläche desselben?

17) Die Kanten mehrerer Würfel verhalten sich, wie 3 : 4 : 5 : 6; wie verhalten sich die Oberflächen?

18) Der Kubikinhalt eines Würfels beträgt 332 k′ 812 k″ 557 k‴; 11 k′ 390 k″ 625 k‴; 110 k″ 592 k‴ d.; wie groß ist die Oberfläche?

19) Mehrere Kasten von Zink und Eisenblech in Würfelform sollen angefertigt werden; die Kante beträgt 2′ 5″ und 3′ 4″

für die Zink-, sowie 2′ 9″ und 3′ 8″ für die Eisenblechkasten; was kosten dieselben, wenn ein Quadratfuß Zinkblech 7 sgr. und ein Quadratfuß Eisenblech 5 sgr. kostet?

20) Die Seite eines Quadrats ist 10′, wie groß ist die Diagonale?

21) Der Inhalt eines Quadrats ist 3064 □ Toisen, wie groß ist die Seite desselben?

22) Die Seiten eines Quadrats sind 7′ 8″; 9′ 7″; 9″ 9‴ d., wie groß ist die Diagonale des Quadrats?

23) Die Diagonale eines Quadrats beträgt 8″ 7‴; 9′ 3″; 8′ 7″ dd., wie groß ist die Seite des Quadrats?

24) Die Kante eines Würfels ist 32″ 5‴ dd., wie groß ist Oberfläche und Kubikinhalt?

25) Der Kubikinhalt eines Würfels ist 125 k′, wie groß sind Kante, Oberfläche und Diagonale?

26) Die Diagonale eines Würfels ist 5′ dd, wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt?

27) Die Oberfläche eines Würfels beträgt 72 □′ dd, wie groß sind Seite, Kubikinhalt und Diagonale?

28) Drei Würfel mit den Kanten 3′ 5″; 7′ 8″ und 4′ 7″ sollen in einen verwandelt werden, wie groß muß die Kante desselben sein?

29) Zwei Würfel sollen sich ihrem Kubikinhalte nach verhalten, wie 3 : 4, in welchem Verhältnisse stehen ihre Kanten?

30) Zwei Würfel sollen sich verhalten, wie 5 : 7 und sollen zusammen so groß sein, als ein dritter Würfel mit der Kante 9″ 7‴ d; wie groß müssen die Kanten der beiden Würfel sein?

31) Das Gewicht eines Würfels, welcher das specifische Gewicht 10 hat, beträgt 200 Pfd.; ein Kubikfuß destillirten Wassers hat 66 Pfd., wie groß ist die Kante desselben?

32) Ein marmorner Würfel habe den Kubikinhalt 100 k″; wie groß ist der Kubikinhalt eines Würfels von Eichenholz von demselben Gewichte, wenn die specif. Gewichte = 2,837 und 1,17 sind?

33) Das Netz eines Würfels beträgt 100 □″ d., wie groß ist die Kante und der Inhalt?

34) Aus 22 Pfd. Kupfer und 9 Pfd. Zinn wird ein Würfel gegossen; wie groß ist die Seite desselben, wenn die specif. Gewichte sind 8,8 und 7,3?

35) Das Gewicht eines gußeisernen Würfels ist 60 Centner; specif. Gew. = 7,2; wie groß ist Seite und Diagonale?

36) Ein Gefäß von Blech soll die Gestalt eines Würfels bekommen und 40 Quart fassen; wie groß muß eine Seite desselben gemacht werden und wieviel Blech ist erforderlich, wenn das Gefäß oben offen bleibt, 1 preuß. Quart = 64 k″ und 66 Pfd. = 1 Kubikfuß rheinl.

37) Wenn die Seite eines Quadrats 5′; 8′; 9′; 10′ ist, wie groß ist der Radius des Kreises, welcher um und in dasselbe beschrieben werden kann?

Konstruktionsaufgaben

mit dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck (Winkelhaken), Lineal, Zirkel und Maßstab auszuführen.

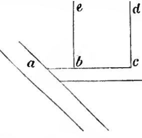
1) Zur Übung im Gebrauch von dem rechtwinkligen Dreieck, dem Lineal und Zirkel führe der Schüler folgende Aufgaben aus:

a. Zwischen zweien Punkten eine Gerade zu ziehen und eine gegebene Gerade zu verlängern;

b. Mit einer gegebenen Zirkelöffnung einen Kreis zu schlagen und von einer gegebenen Geraden mit dem Zirkel ein gegebenes, kleineres Stück abzuschneiden;

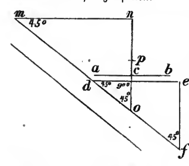
c. In einem gegebenen Punkte einer Geraden mit dem Lineal und Winkelhaken eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Senkrecht heißt eine Linie zu einer gegebenen Linie, wenn sie mit derselben am Fußpunkte zwei einzeln rechte Winkel bildet. Steht eine Linie im Endpunkte einer andern senkrecht, so muß man die eine von beiden Linien verlängert denken oder verlängern, um beide rechte Winkel zu haben.



Man legt das Lineal schief, setzt die Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen oder doch rechtwinkligen Dreiecks an das Lineal, so daß die eine Kathete mit der Geraden zusammenfällt, dann schiebt man das rechtw. Dr. an dem festliegenden Lineal aufwärts, bis der fragliche Punkt, in welchem die Senkrechte errichtet werden soll, in die andere Kathete hineinfällt — man ziehe dann die Senkrechte der andern Kathete entlang bis zu dem Punkte.

d. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf dieselbe eine Senkrechte zu fällen.

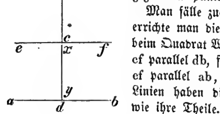


Man verfahre wie bei c; das Dreieck schiebe man so lange aufwärts, bis der fragliche Punkt in die Kathete hineinfällt; dieser entlang zieht man die Gerade, welche die Senkrechte sein muß.

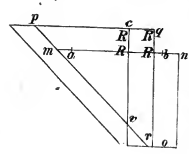
Denkt man sich das Dreieck def mit der Kathete de in die Lage ab, dann in die Lage mno geschoben, so daß der Punkt p in die Senkrechte no hineinfällt, so braucht man nur die pc zu ziehen, welche die gesuchte Senkrechte ist.

e. Zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb derselben und ihrer Richtung eine Parallele zu legen.

Auflösung. Da die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats parallel sind und von der rechts oder links anliegenden unter rechten Winkeln geschnitten werden, so braucht man von dem gegebenen Punkte nur eine Senkrechte zu fällen und auf derselben wiederum eine Senkrechte in dem gegebenen Punkte zu errichten.



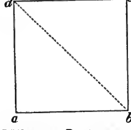
Man fälle zuerst die cd senkrecht, dann errichte man die cf senkrecht, dann ist, wie beim Quadrat W. x = W. y = R, also ef parallel db, folglich auch die ganze Linie ef parallel ab, denn die ganzen geraden Linien haben dieselbe Lage zu einander, wie ihre Theile.



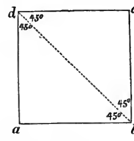
Man konnte den Winkelhaken mit der Kathete mn an die ab anlegen, dann denselben in die Lage pqr oder auch pcv bringen. Dadurch wird die pc auch zu der ab parallel und man nennt diese Art, zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb derselben eine Parallele zu legen, das Abschieben.

2) Ein Quadrat zu konstruiren und zwar:
a. aus der Seite,
b. aus der Diagonale.

Auflösung.



a) Ist ab die Gerade, errichtet man in a eine Senkrechte ad, macht dieselbe = ab und legt durch d eine Parallele dc zu ab und durch b eine Parallele bc zu ad, so ist abcd das gesuchte Quadrat. — Hat man aber einmal den rechten W. bad mit den gleichen Schenkeln ab = ad konstruirt und b mit d verbunden, so hat man die Hälfte des Quadrats. Legt man mit dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dr. cdb und dbc = 45° an, macht die Schenkel bc = dc = ab, so wird das Dreieck dbc mit dab in jeder Beziehung hinsichtlich seiner Seiten, Winkel und der Anordnung dieser Bestandtheile übereinstimmend.



b) Ist db die gegebene Diagonale, und trägt man auf beiden Seiten Winkel von 45° an, und verlängert die Schenkel bis zum Durchschnitt c und a, so erhält man zwei in allen Bestandtheilen und in der Anordnung derselben übereinstimmde gleichschenklig-rechtwinklige Dr. Dr., welche mit der Hypotenuse an einander geschoben das Quadrat bilden.

3) Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren a. aus der Kathete, b. aus der Hypotenuse, c. aus der Höhe.

4) Eine Gerade zu halbiren, in 4, 8 ꝛc. gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man mache dieselbe entweder zur Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks und fälle von der Spitze desselben eine Senkrechte auf dieselbe oder man mache die Gerade zur Diagonale eines Quadrats und ziehe die andere Diagonale, welche die erste halbirt, weil sich die Diagonalen im Quadrat halbiren.

5) Einen rechten Winkel zu zeichnen und zu halbiren.

Aufl. Man mache den rechten Winkel entweder zu einem Winkel im Quadrate und ziehe eine Diagonale oder man mache ihn zum Winkel im gleichschenklig-rechtw. Dr. und fälle von der Spitze eine Senkrechte oder errichte im Halbirungspunkte der Grundlinie eine Senkrechte.

6) Gegeben ist ein Quadrat, man soll um und in dasselbe einen Kreis legen.

Aufl. Der centrische Punkt ist der Durchschnitt der Diagonalen; die halbe Diagonale ist der Radius des um das Quadrat, die halbe Seite ist der Radius des in das Quadrat zu beschreibenden Kreises.

7) Das Netz eines Würfels zu zeichnen; dasselbe auf Pappe zu wiederholen, dieselbe halb durchzuschneiden auf den betreffenden Linien und einen Würfel zu konstruiren.

8) Den Grundriß eines Würfels, den Aufriß und die Diagonalebene zu zeichnen.

9) Was wirft der Würfel für einen Schatten, a. wenn derselbe parallel zum wagerechten Tische gehalten wird und das Licht in der in dem Mittelpunkte der oberen Fläche errichteten Senkrechten sich befindet? b. wenn das Licht in der im Mittelpunkte der vorderen Fläche errichteten Senkrechten sich befindet und die Schattenfläche parallel zur vordern oder hintern Würfelfläche oder senkrecht ist? c. wenn das Licht in der verlängerten Diagonale des Würfels liegt?

10) Welche verschiedene Sellungen kann man einem Würfel geben und in welcher ist seine Standfestigkeit am größten?

11) Wo liegt der Schwerpunkt des Würfels?

Aufl. In der Mitte desselben oder im centrischen Punkte. Denn befestigt man einen Faden in der Mitte des oberen Quadrats und hält den Würfel senkrecht, so liegt der Schwerpunkt in der Verlängerung des Fadens; ebenso, wenn man den Faden im Mittelpunkte der rechten oder linken Quadratfläche anbringt — wo sich beide Fäden oder Linien schneiden, ist des Würfels Schwerpunkt. Beide Linien müssen den Schwerpunkt haben; derselbe kann also nur im Durchschnitt liegen, weil zwei Gerade entweder alle oder nur einen Punkt gemein haben können, den Durchschnittspunkt. Man kann sich auch den Würfel aus unendlich vielen, unendlich dünnen Quadraten zusammengesetzt denken.

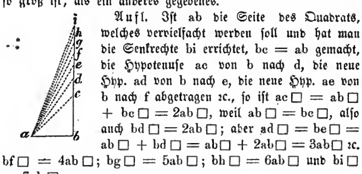
Für jedes liegt der Schwerpunkt im Durchschnitt der beiden Diagonalen oder im centrischen Punkte. Alle centrischen Punkte liegen in der Achse; in der Mitte der Achse der Schwerpunkt.

12) Wie viele Flächen kann man im äußersten Falle an einem Würfel auf einen Blick sehen?

13) Die wichtigsten Stellungen eines Würfels, welcher als Drahtmodell a. auf einer Fläche b. auf einer Kante c. auf einer Ecke steht oder im Halter befestigt ist, zu zeichnen.

14) Mache Gebrauch von dem Maßstabe, welcher noch Zehntellinien angiebt und zeichne verjüngt folgende Quadrate $10^0\ 5'$ Seite; $20^0\ 7'$; $35^0\ 8'$; $13^0\ 4'$ (die Ruthe dargestellt durch eine pariser Linie; der Fuß durch $_1/_{10}$ pariser Linie).

15) Einen quadratischen Maßstab anzulegen und vermittelst desselben ein Quadrat zu zeichnen, was 2, 3, 4 . . . . n mal so groß ist, als ein anderes gegebenes.



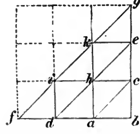
Aufl. Ist ab die Seite des Quadrats, welches vervielfacht werden soll und hat man die Senkrechte bi errichtet, bc = ab gemacht, die Hypotenuse ac von b nach d, die neue Hyp. ad von b nach e, die neue Hyp. ae von b nach f abgetragen 2c., so ist $ac\square = ab\square + bc\square = 2ab\square$, weil $ab\square = bc\square$, also auch $bd\square = 2ab\square$; aber $ad\square = be\square = ab\square + bd\square = ab\square + 2ab\square = 3ab\square$ 2c. $bf\square = 4ab\square$; $bg\square = 5ab\square$; $bh\square = 6ab\square$ und $bi\square = 7ab\square$.

16) Eine begrenzte Gerade in 2, 3, 4, 5 . . . . n gleiche Theile zu theilen.

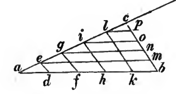
Aufl. a. Benutzt man den Maßstab, so kann man mit demselben die ganze Linie messen, mit 2, 3, 4, 5 . . . n theilen und den Quotienten wieder auf der Linie auftragen. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Maßstab fein genug getheilt sei, so daß dabei die Unbequemlichkeit der Möglichkeit praktisch verschwindet, daß der Maßstab und die zu messende Linie kein gemeinschaftliches Maß haben, durch dessen Wiederholung beide Linien entstanden sind.

b. Die konstruktive Lösung ist eigentlich erst dann möglich, wenn weitere Erfahrungen über kongruente Dreiecke und darüber

gemacht worden sind, daß es noch andere Vierecke giebt, in denen die gegenüberliegenden Seiten gleich und parallel sind oder daß parallele Linien zwischen parallelen Linien gleich sind. Indeß kann man schon auf dieser Stufe durch folgende Konstruktion zu dieser Anschauung und Wahrheit gelangen.



Denn ist ab = bc und W. abc = R und Dr. abc gleichschenklig und rechtwinklig, macht man ab = ad = fd = ce = eg, so sind abch, dahi 2c. kongruente Quadrate und ac = dh, hc = ab = ad 2c., also Parallelen zwischen Parallelen einander gleich, auch in dem schiefwinkligen Pgme. acbd. Das würde auch noch der Fall sein, wenn man zwar ab = bc, aber Winkel abc = einem spitzen oder stumpfen machte. Nimmt man jetzt schon diesen Satz als Lehrsatz voraus, obgleich er sich erst später in vollständiger Klarheit ergiebt, wenn die Betrachtung über Dreiecke und Pgme. erweitert und vervollständigt wird, so ergiebt sich die konstruktive Theilung einer Geraden in n gleiche Theile, wie folgt.

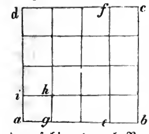


Soll die begrenzte Gerade ab z. B. in fünf gleiche Theile getheilt werden, so lege man eine beliebig lange, unbegrenzte Gerade ax an die ab unter einem Winkel von vielleicht 45° (nicht zu klein und < 90°, wegen der Bequemlichkeit der Konstruktion), schneide mit beliebiger Zirkelöffnung auf der ax fünf gleiche Stücken ab, ae = eg = gi 2c., verbinde c mit b und lege durch die Theilpunkte l, i, g, e Parallelen zu bc, so wird die ab in fünf gleiche Theile ad = df = fh = hk = kb getheilt. Man sieht zugleich, wenn in dem Dr. abc die ac in fünf oder n gleiche Theile getheilt und durch den zweiten, dritten 2c. Theilpunkt Parallelen zur bc gelegt werden, daß dann die Seite ab in demselben Verhältnisse getheilt wird, so daß wenn ag $^2/_5$ von ac ist, auch af $^2/_5$ von ab sein muß, ebenso gf $^2/_5$ von bc. Umgekehrt ist die de parallel bc, wenn sie die ac und ab in demselben Verhältnisse theilt.

17) Eine Gerade so zu theilen, daß sich die Theile wie 3 : 4 oder wie 3 : 4 : 5 oder wie m : n, oder wie m : n : o verhalten.

Aufl. Theile die Linie in 3 + 4, in 3 + 4 + 5, in m + n, in m + n + o ꝛc. gleiche Theile und lege durch den dritten, durch den dritten und siebenten ꝛc. Theilpunkt die Parallelen. Hätte man Brüche als Verhältnißzahlen, wie $^3/_4$: $^5/_6$, so könnte man ein Verhältniß aus ganzen Zahlen wie 18 : 20 oder 9 : 10 daraus machen und in 19 gleiche Theile theilen und durch den neunten oder zehnten Theilpunkte die Parallele legen.

18) Ein Quadrat zu zeichnen, welches von einem andern gegebenen Quadrate, $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_4$, $^3/_4$ ꝛc., überhaupt ein beliebiger Theil ist.



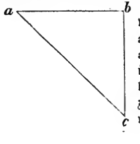
Aufl. Will man z. B. ein Quadrat konstruiren, was von dem Quadrate abcd $^3/_4$ beträgt, so theile man dc und ad in vier gleiche Theile; legt man die parallelen Linien, so zerfällt das ganze Quadrat in 16 kleinere, gleiche Quadrate; die Fläche aefd enthält deren zwölf. Es kömmt also nun darauf hinaus, nach Nr. 15 ein Quadrat zu konstruiren, welches zwölfmal so groß ist, als das kleine Quadrat ahgi.

19) Ein Quadrat zu konstruiren, welches so groß ist, als mehrere andere, gegebene Quadrate zusammengenommen.

20) Ein Quadrat zu konstruiren, welches der Unterschied ist zwischen einem größeren und einem kleineren Quadrate.

21) Eine kleine quadratische Zeichnung, ein Stadt- oder Flurplan soll 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß oder klein gemacht werden.

22) Man soll ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zeichnen, welches 2, 3, 4 ꝛc. mal so groß ist, als ein anderes gegebenes.



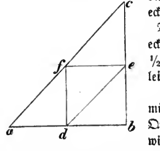
Aufl. Ist abc das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, so ist das Quadrat über ac zweimal so groß, als das Quadrat über ab; also auch die Hälfte des Quadrats über ac oder das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, welches die Kathete ac hat, zweimal so groß, als das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit der Kathete ab.

Durch Benutzung des quadratischen Maßstabes läßt sich eine weitere Vervielfachung machen.

23) Verschiedene gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke sollen addirt, d. h. ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck soll gefunden werden, welches ebenso groß ist, als jene zusammengenommen.

24) Wenn die Flächeninhalte der Quadrate sich verhalten, wie die Längenmaße der Seiten mit sich selbst multiplicirt, wie verhalten sich dann auch die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke hinsichtlich ihres Flächeninhaltes?

Antw. Die Hälften verhalten sich, wie die Ganzen — also die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke, wie die Quadrate der Katheten.



Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck dbe hat db = ½ ab und be = ½ bc und de = ½ ac. Man sieht leicht, daß Dr. dbe von Dr. abc ¼ ist.

25) Worin kann man behaupten müssen, abgesehen von der Größe, alle Quadrate und alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit einander übereinstimmen, da sie ganz nach einem und demselben Bildungsgesetze entstanden sind?

Antw. In der Gestalt. Beim Quadrate wird der rechte Winkel an die gleiche Seite angesetzt; bei jedem gleichschenklig-rechtwinkligen Dr. befindet sich der W. von 45° an beiden Endpunkten der Hypotenuse und der rechte W. gegenüber. Beim Quadrat bewegt sich eine Gerade senkrecht empor, mit sich selbst parallel, so hoch als sie selbst ist, mit gleichbleibender Größe; beim gleichschenklig-rechtw. Dr. wird die Kathete mit veränderlicher Größe, so hoch als sie selbst ist, emporbewegt, indem sie sich parallel bleibt, mit der Hypotenuse immer einen Winkel von 45° bildet, bis sie endlich zu o verschwindet oder zu einem Punkte wird.

26) Mit dem Transporteur

a. gegebene Winkel zu messen;

b. Winkel von verlangter Größe, z. B. von 30°, 45°, 75°, 100°, 120° 2c. zu zeichnen.

c. einen gegebenen Winkel an einen bestimmten Punkt einer Geraden anzutragen.

d. einen gegebenen Winkel in 2, 3, 4 . . . n gleiche Theile zu theilen.

e. 2, 3, 4 ꝛc. gegebene Winkel zu addiren.

f. einen kleineren Winkel von einem größern abzuziehen.

g. einen gegebenen Winkel zu vervielfachen.

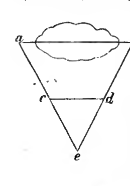
h. eine Senkrechte zu errichten und zu fällen.

i. den Winkel zu messen, welchen zwei Linien, die von den Endpunkten einer Geraden, in wagerechter Ebene liegend, in unserem Auge bilden. (Gesichtswinkel.)

k. den Winkel zu messen, welchen zwei Gerade, von den Endpunkten eines Gegenstandes, in senkrechter Ebene liegend, in unserem Auge bilden. (Höhenwinkel.)

27) Mit der sogenannten Kippregel oder einem andern Winkelinstrumente einen in wagerechter oder in senkrechter Ebene liegenden Winkel zu messen.

28) Im Freien zu einer Geraden eine Parallele durch einen bestimmten Punkt abzustecken.



Aufl. Soll zur ab durch den Punkt c eine Parallele gelegt werden, so könnte man die ac verlängern und ce = ac machen; nimmt man dann den Punkt d in der Mitte der eb, so muß die cd parallel zu ab sein. Ebenso muß nach Nr. 16 die cd = ½ ab sein. Man kann also die ab messen, wenn man zwar zu ihren Endpunkten kommen, aber nicht entlang derselben, wegen eines Hindernisses, z. B. eines Teiches gehen kann.

II. Von den senkrechten und schiefen Säulen.

Vom Würfel schreitet man am einfachsten zur Betrachtung der Säulen fort. Hat man irgend ein Quadrat, z. B. von 3 Zoll Kantenlänge, also von 9□″ Fläche und läßt sich dasselbe senkrecht emporbewegen, so würde, wenn es sich 3 Zoll emporbewegte, ein Würfel entstehen, dessen Kante 3 Zoll lang wäre. Ließe man aber das Quadrat sich mehr als 3, z. B. 4, 5, 6 ꝛc. Zoll hoch bewegen, so entstände zwar ein nach zwei Richtungen (Länge und Breite, rechts und links, von vorn nach hinten) hin gleichweit (3″), aber nach der dritten Richtung, nach der Höhe hin, ungleichweit, z. B. 6″ hoch, ausgedehnter Körper. Wir stellen uns vor, daß er auf dem Quadrate von 3″ Seite stehe, so liegt demselben ein kongruenter, an Größe und Gestalt oder an Seite gleiches, dem untern paralleles Quadrat gegenüber, gerade wie beim Würfel; die beiden Ausdehnungen von vorn nach hinten, von rechts nach links sind gleich, wie beim Würfel; die Anzahl der Begrenzungsflächen, die Anzahl der Ausdehnungen des Körpers (3), die zwei Ausdehnungen der Flächen, die eine Ausdehnung der Linien, die Ausdehnungslosigkeit der Punkte oder Ecken, die Unmöglichkeit die Flächen vom Körper, die Linien von den Flächen, die Punkte von den Linien zu trennen ꝛc. — Alles wie beim Würfel. Ebenso die Anzahl und Lage der Kanten und Flächen; die Rechtwinkligkeit der Linien- und Flächenwinkel; das Senkrechtstehen der Seitenflächen und Kanten zu ihren bezüglichen Flächen; die Anzahl der zur Bildung einer Ecke nöthigen Winkel; die Größe, Gestalt, der Stoff, die verschiedenen Eigenschaften und darauf bezügliche Betrachtungen. Worin liegt also der wesentliche Unterschied des neuen Körpers vom alten? Man lasse sich denselben aus 54 Würfeln, z. B. Kubikzollen wirklich aufbauen; 9 stehen auf der 9□″ haltenden Grundfläche, die übrigen 45 werden auf den 9 nach oben geschichtet. Dann läßt sich leicht der specifische Unterschied erkennen, welcher darin be-

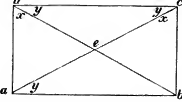
steht, daß die Höhe oder die Ausdehnung von unten nach oben, von den beiden andern Ausdehnungen verschieden und zwar in unserem Beispiele größer ist. Die vier Seitenflächen sind zwar paarweise parallel, kongruent, rechtwinklig, aber nur die gegenüberliegenden Seiten sind in denselben gleich und parallel — daher sind die Seitenflächen nach dem Früheren Oblongen. Die Diagonalen der Grund- und oberen Fläche sind gleich, ebenso die Diagonalen der Seitenflächen, die ersteren aber von den zweiten an Größe verschieden; die Diagonalen in den Oblongen halbiren sich ebenso gegenseitig, wie in den Quadraten; von den Achsen, d. h. den Linien, welche diese Halbirungspunkte der Diagonalen in der untern und oberen, rechten und linken, vordern und hintern Fläche verbinden und sich unter rechten Winkeln schneiden, sind nur die letztern gleich; die von unten nach oben gehende Achse ist zweimal so groß, als die beiden andern, welche mit den Seiten der Grundfläche übereinstimmen. Die Diagonalen des Körpers, d. h. die Geraden von der rechten oberen vorderen zur linken untern hintern Ecke; von der rechten oberen hintern zur linken unteren vorderen rc. sind vier und sich an Größe gleich. Den beschriebenen Körper, dessen Grundfläche ein Quadrat, dessen obere ein der Grundfläche kongruentes und paralleles Quadrat ist, dessen Seitenflächen vier kongruente Oblongen sind, von denen je 2 und 2 parallel laufen, welche die Seite des Quadrats zur Grundlinie und die Höhe des Körpers zur Höhe haben, dessen Seitenflächen zur Grundfläche senkrecht stehen, heißt eine quadratische senkrechte Säule. Die Entstehung derselben läßt sich noch auf andere Weise denken, z. B. wenn sich das vordere Oblongum ohne Abweichung nach hinten, oder das rechte ohne Abweichung nach links bewegt und zwar um die Länge einer Seite der Grundfläche. Legt man durch die parallelen und gleichgerichteten Diagonalen des oberen und unteren Quadrats, also durch die Diagonalen, welche die rechte obere vordere und linke obere hintere Ecke, sowie die rechte untere vordere und linke untere hintere Ecke verbinden, eine Diagonalebene, so zerfällt die quadratische Säule in zwei dreieckige, welche später zur Betrachtnng kommen.

Wie bei dem Würfel lassen sich Linien, Flächen und Kubikinhalt bei der quadratischen Säule ausmessen und be-

rechnen. Alle Kanten derselben sind zusammen so groß, als zweimal der Umfang des Quadrats, welches die Grundfläche bildet + viermal Umfang eines Oblongums, welches die Seitenfläche bildet durch zwei getheilt. In dem oben angenommenen Beispiele beträgt der Umfang der Grundfläche 4 mal 3 = 12″, der untern und oberen also 24″, jede Seitenkante 6″, daher zusammen 24″; alle Kanten zusammengenommen 48″ oder 4 Fuß. Der Umfang eines Oblongums besteht aus 2 mal Seite der Grundfläche + 2 mal Seitenkante = 2 mal 3 + 2 mal 6 Zoll = 18″ + 4 mal 18″ = 72, die obere und untere Fläche haben 14″ Umfang, macht zusammen 96″; jede Kante ist aber zweimal gerechnet, daher 48″ = 4′. Die Achsen sind bekannt und die Diagonale der Grund- und oberen Fläche steht in einem Zusammenhange zu den Seiten des Quadrats, welcher schon beim Würfel erörtert worden ist. Die **Diagonale** eines der vier Oblongen, welche jetzt zur weiteren Betrachtung kommen, ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten die Seite des Grundflächenquadrats und die Höhe sind. Folglich ist das Quadrat der Diagonale eines der vier Oblongen = 3.3□″ + 6.6□″ = 45□″; die Länge der Diagonale eines Oblongums wird demnach gefunden, wenn man die Summe der Quadratzahlen der beiden ungleichen Seiten desselben in zwei gleiche Faktoren zerlegt und einen davon nimmt „= $\sqrt{45}$.″ = 6,708203″. Die **Diagonale der Säule** ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten sind die Höhe der Säule und die Diagonale eines Quadrats; also ist das Quadrat dieser Diagonale = 6 mal 6□″ + 2 mal 3 mal 3□″ = 54□″ und die Diagonale selbst wird gefunden, wenn man den Werth des Quadrats der Diagonale, hier die Zahl 54 in zwei gleiche Faktoren zerlegt und einen davon nimmt = $\sqrt{54}$″ = 7,348469″.

Was die Ausmessung und Berechnung der an der quadratischen Säule befindlichen Flächen anlangt, so ist die Berechnung der Grundfläche und oberen Fläche, weil es Quadrate sind, bereits bekannt; jede hat 3 mal 3□″, beide zusammen haben 18□″. Es kömmt nun darauf an, die Fläche eines Oblongums zu berechnen, dessen Seiten 3″ und 6″, überhaupt durch das Längenmaß gemessen, bekannt sind. Betrachtet man das Oblongum, welches eine Seitenfläche bildet, so ergiebt sich sofort

durch Anschauung der aus 54 Kubikzollen aufgebauten quadratischen Säule, daß die Fläche 18□″ hat oder 3 mal 6□″, d. h. man findet die Fläche eines Oblongums, wenn man die lange mit der kurzen Seite multiplicirt und die entsprechende Flächeneinheit hinzufügt. So hätte man, um die Fläche der Diagonalebene zu finden, die Höhe der Säule mit der Diagonale eines der beiden Quadrate zu multipliciren und die entsprechende Flächeneinheit hinzuzufügen „= 6 mal $\sqrt{18□″}$ „= 6 mal 4,242640″ = 25,455840″.

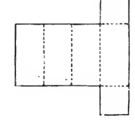


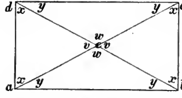
An dieser Stelle mögen auch die wesentlichsten Eigenschaften des Oblongums in rein anschaulicher Weise entwickelt werden. Es gehört zu den Parallelogrammen, d. h. zu den Vierecken, in denen die einander gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel laufen und zwar zu den rechtwinkligen. Hat man das fragliche Oblongum in mehreren Exemplaren in Papier ausgeschnitten und schneidet ein solches nach der einen Diagonale ac durch, so erhält man zwei sich deckende Dreiecke und findet so, daß in demselben die gegenüberliegenden Seiten gleich, die den rechten Winkel einschließenden aber ungleich sind, also ab = dc und ad = bc; daß die gegenüberliegenden Winkel des Oblongums gleich sind, versteht sich von selbst schon, weil es Rechte sind. Zieht man beide Diagonalen und schneidet durch, so findet man leicht, daß beide Diagonalen gleich sind, ac = bd, daß sie sich in dem Punkte e halbiren, daß also ea = eb = ec = ed ist und der Punkt e von den Ecken gleichweit absteht, sich also von e aus mit ea = eb = ec = ed durch die vier Ecken ein Kreis legen läßt. Man findet weiter durch Übereinanderlegen der entsprechenden Dreiecke, daß Winkel x größer ist als Winkel y, daß also die Diagonale die Winkel nicht halbirt und daß in einem und demselben Dreieck, weil S. ab > bc, auch W. x > W. y sein muß. In einem und demselben Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Da die vier Winkel des Oblongums vier Rechte oder 360° betragen, und die Winkel

beider durch eine Diagonale entstandenen Dreiecke die Hälfte von vier Rechten oder zwei Rechten sind, so muß y, weil kleiner als x, auch kleiner als 45° sein; daher muß weil $y + y$ in dem Dreieck dec $< 45^{\circ} + 45^{\circ} < 90^{\circ}$ sind, der Winkel dec stumpf, ebenso aeb = dec und Winkel dea = Winkel bec spitz sein, also schneiden sich die Diagonalen unter schiefen Winkeln. Vergleicht man die vier Dreiecke, welche man ausschneidet und übereinanderlegt, so ergiebt sich, daß Dreieck dec und aeb, ebenso Dreieck aed und bec kongruent sind, daß aber der Abstand des Punktes e von der dc kleiner ist, als der Abstand desselben Punktes von der ad, oder daß der Punkt e von den Seiten nicht gleichweit absteht, daß also von diesem Punkte aus kein Kreis in das Oblongum gelegt werden kann, so daß die Seiten des Oblongums den Kreis in vier Punkten berührten, d. h. das Oblongum hat keinen nach den Seiten, wohl aber nach den Ecken centrischen Punkt.

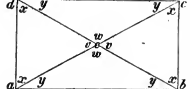
Um ein Oblongum zu konstruiren, braucht man nur die beiden ungleichen Seiten unter rechtem Winkel zusammen zu setzen und die Endpunkte a und c zu verbinden, so hat man das halbe Oblongum oder Dreieck adc; wird dasselbe noch einmal konstruirt und mit der Hypotenuse zusammengelegt so entsteht das Oblongum. Man könnte aber auch die größere Seite dc sich in die Ebene legen und in den Endpunkten d und c Senkrechte da und cb, so groß als die kleinere Seite errichten und die beiden Endpunkte a und b mit einander durch eine Gerade verbinden oder auch, wenn man den rechten Winkel gezeichnet und den Schenkeln die rechte Länge gegeben hat, durch a eine Parallele zu bc und durch c eine Parallele zu ab entweder durch das sogenannte Abschieben, oder durch Aufsetzen von rechten Winkeln zu legen.

Denkt man sich die Flächen einer quadratischen Säule in die Ebene gelegt, so erhält man folgendes Netz derselben:





Nehmen wir die Betrachtung der beistehenden Figur noch einmal auf, so sind ab = dc und ad = bc oder die gegenüberliegenden Seiten des Oblongums sind einander gleich; ebenso die Winkel a, c, b und d, auch schon als Rechte und eine Diagonale theilt dasselbe in zwei kongruente Dreiecke. Dieß wird sich später als allgemeine Eigenschaft aller Parallelogramme zeigen, nicht nur als die Eigenschaft der beiden rechtwinkligen — des Quadrats und Oblongums. Wie in dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dr., so finden wir überhaupt im rechtwinkligen Dr., daß die drei Winkel zusammengenommen zwei Rechte oder 180° betragen, weil in dem Oblongum abcd die vier Winkel vier Rechte oder 360° betragen; die Diagonale ac aber zerlegt dasselbe in zwei kongruente Dr. Dr., welche außer dem rechten W. noch zwei spitze W. W. haben; daher müssen die drei W. W. eines der Dr. Dr. zwei Rechte oder 180° betragen. Es ergiebt sich weiter, was ein rechtw. Dreieck ist, d. h. ein rechtwinkliges Dreieck ist ein solches, welches einen rechten W. und zwei spitze W. W. hat, welche zusammen wieder einen rechten W. ausmachen. Die rechtw. Dreiecke sind entweder gleichschenklig, so daß zwei in rechter Weise zusammengesetzt ein Quadrat bilden oder die beiden Katheten sind ungleich und zwei solche rechtwinklige Dreiecke lassen sich zu einem Oblongum zusammensetzen. Außer dem einen Rechten kann in einem rechtw. Dr. kein Rechter sein, denn dann wären ja schon zwei W. W. = 180°; noch viel weniger könnten alle drei W. W. rechte sein. Man findet ferner leicht, daß die Hypotenuse im rechtw. Dr. die größte Seite ist, größer als jede Kathete einzeln genommen; daß aber, wie sich überhaupt im Dr. ergiebt, 2 S. S. zusammen größer als die dritte sind, weil der Weg beispielsweise von a über b nach c größer ist, als die Gerade ac. Euklid sagt aber, das hätten schon die Esel gewußt, daß die Gerade zwischen zweien Punkten die kürzeste Linie sei, denn sie gingen auf die Disteln weder in gebrochenen Linien, noch in Bogenlinien los. — Was weiter die Konstruktion der Dreiecke aus ihren Bestand-



theilen anlangt, so zeigt sich 1) beim rechtwinkligen, wie bei den übrigen spitzwinkligen aed und bed (alle drei W. W. sind spitz), sowie bei den stumpfwinkligen aeb und dec (ein stumpfer und zwei spitze W. W.), daß aus zwei S. S. und dem von diesen eingeschlossenen W. das Dr. konstruirt werden kann oder daß zwei Dr. Dr. kongruent sind, welche in diesen Bestandtheilen übereinstimmen. 2) Bei allen zeigt sich ferner, daß sie aus einer S. und den beiden an derselben anliegenden W. W. konstruirbar sind. 3) Aus einer Seite, einem an- und einem gegenüberliegenden Winkel. Denn die W. W. $x + x + v$, ebenso die W. W. $y + y + w$ sind zusammen auch zwei Rechte. Das wird sich später allgemein für alle Dr. Dr. als gültig zeigen, denn v ist $= y + y$ und $w. = x + x$; aber man kann überhaupt schon jetzt zeigen, daß man, um die W. W. eines Dr. zu beschreiben oder sich von a nach b und von bc nach c und von c nach a zu bewegen, man eine halbe Umdrehung beschreiben muß, welche 180° oder zwei R. R. beträgt. Kennt man also zwei W. W. eines Dr., so braucht man sie nur von 180° abzuziehen, um den dritten zu finden. Soll man also aus einer S., einem an- und einem gegenüberliegenden Winkel das Dr. konstruiren, so kann man sich zuerst den dritten Winkel konstruiren und dann das Dr. aus einer Seite und den beiden anliegenden W. W. bauen. 4) Kennt man im rechtw. Dr. abc die ab, den rechten W. abc und die Hyp. ac, so kann man den R konstruiren, ab so lang machen, als sie sein soll, und die beliebig lange Kathete bc durch die ac (Hyp.) von a aus mit dem Zirkel abschneiden. Also kann man ein rechtw. Dr. aus einer Kathete und der Hyp. konstruiren, oder aus zwei S. S. und dem der einen gegenüberliegenden W. Ebenso das stumpfw. Dr. dec, wenn man den stumpfen W. dec, die de und die gegenüberliegende Seite dc kennt. 5) Die gleichschenkligen Dr. Dr. kann man aus der Grundlinie ab, ad, dc, bc und einem der Schenkel ae zeichnen. Natürlich müssen die beiden Schenkel zusammen größer als die dritte S. oder Grundlinie sein; ebenso die Hyp. größer als eine Kathete und die S., welche dem

stumpfen W. gegenüberliegt, größer als eine der anliegenden sein.

Die Oberfläche der quadratischen Säule besteht aus den beiden Quadraten, welche die Grund- und obere Fläche bilden und aus den vier kongruenten Oblongen. Da in dem vorliegenden Falle jedes Quadrat 9□" beträgt, jedes Oblongum 18□", so hat man, wenn O die Oberfläche bedeutet O = (2 . 9 = 4 . 18)□" = 90□".

Was endlich den Kubikinhalt der Säule anlangt, so lehrt zunächst die Anschauung, daß die schon oft erwähnte quadratische Säule aus 54 Kubikzollen zusammengesetzt ist. Auf der Grundfläche stehen neun, dann folgen noch fünf Schichten von je neun Kubikzoll — der ganze Inhalt beträgt also 6 mal 9 Kubikzoll; oder 6 mal 3 mal 3 Kubikzoll. Aber die 6" bedeuten die Höhe, die einen 3" drücken die Breite, die anderen 3" bezeichnen die Länge. Daher, wenn K = Kubikinhalt ist, K = Länge mal Breite mal Höhe in der entsprechenden Flächeneinheit, oder da Länge mal Breite die Maßzahl für die Grundfläche bedeutet, so ist K = Grundfläche mal Höhe. Dieß paßt auch rückwärts für den Würfel; denn wären alle drei Dimensionen = 3", so hätte man 3 mal 3 mal 3 k" oder, wenn 3 mal 3 die Maßzahl für die Grundfläche in Quadratzollen bedeutet und 3" die Höhe ist, K = Grundfläche mal Höhe.

Es fragt sich ferner, wie sich Oberfläche und Kubikinhalt gestalten, wenn man eine zweite, dritte ꝛc. quadratische Säule sich erbaut, in welcher die Dimensionen 2 mal, 3 mal, ꝛc. so groß gemacht werden, wenn auch alle Winkel dieselben bleiben. Dann hat die Grundfläche 6", 9" ꝛc. Kante, die Höhe beträgt 12", 18" ꝛc. Die Oberflächen werden, wie die Anschauung und Berechnung zeigt, 4 mal 90, 9 mal 90ꝛc. □" d. h. dann überhaupt: Werden die Dimensionen einer quadratischen Säule 2 mal, 3 mal ꝛc. so groß, so werden die Oberflächen 2 mal 2, 3 mal 3 ꝛc. mal so groß, oder wachsen im quadratischen Verhältnisse. Der Kubikinhalt wächst aber wiederum in einem anderen Verhältnisse. Denn wenn man die doppelte oder dreifache Länge, mit der doppelten oder dreifachen Breite und mit der doppelten oder dreifachen Höhe multi-

plicirt, so erhält man einen 2 mal 2 mal 2, oder 3 mal 3 mal 3 ꝛc. mal so großen Kubikinhalt. Oder: Werden die Dimensionen einer quadratischen Säule 2 mal, 3 mal ꝛc. so groß, so werden die Kubikinhalte 2, 27 ꝛc. mal so groß, oder sie wachsen im kubischen Verhältnisse. Solche quadratische Säulen, die zwar an Größe von einander verschieden sind, aber in der Gestalt übereinstimmen, bei denen das Verhältniß der Länge zur Breite und Höhe ein sich gleichbleibendes ist, oder die Länge in der Breite oder Höhe der einen ebenso oft enthalten ist, wie die Länge in der Breite oder Höhe der andern, heißen ähnliche oder an Gestalt gleiche.

7" 5" 4"

Ganz anders aber gestaltet sich die Sache, wenn man bei der neuen quadratischen Säule die Dimensionen nicht 2, 3 ꝛc. mal so groß werden, sondern nur um 1, 2, 3 ꝛc., überhaupt um eine bestimmte Anzahl von Längeneinheiten wachsen läßt. Wird z. B. jede Dimension um einen Zoll größer, so hat man 4 mal 4 mal 7 = 112 k". Diese 112 k" lassen sich zu folgenden Körpern anordnen: 1) zu der ursprünglich quadratischen Säule von 54 k"; 2) zu einem Würfel, dessen Kante 1" ist, Kubikzoll; 3) zu zwei oblongischen Säulen von der Länge 3", Breite 1" und Höhe 6"; 4) zu einer quadratischen Säule von der Grundflächenkante 1" und der Höhe 6"; 5) zu einer quadratischen Säule von der Grundflächenkante 3" und der Höhe 1" und endlich 6) zu zwei quadratischen Säulen, welche die Grundflächenkante 1" und die Höhe 3" haben. Rechnet man die einzelnen Posten von 54; 1; 36; 6; 9; 6 k" zusammen, so ergiebt sich wieder 112 k". Setzt man ferner an die Stelle eines Zolles eine beliebige Längeneinheit a", so hat man 1) die ursprüngliche Säule; 2) einen Würfel mit der Kante a; 3) zwei oblongische Säulen mit der ursprünglichen Grundflächenkante, der ursprünglichen Höhe und der Länge a; 4) eine quadratische Säule, mit der Grundflächenkante a und der Höhe h; 5) eine quadratische Säule mit der ursprünglichen Grundflächenkante und der Höhe a und 6) zwei quadratische Säulen, welche a zur Grundflächen-

kante und die ursprüngliche Grundflächenkante zur Höhe haben. Also, wenn l die ursprüngliche Grundflächenkante, h die ursprüngliche Höhe bedeutet, so hat man 1) l mal l mal h□″; 2) a mal a mal a□″; 3) 2a mal h mal l□″; 4) a mal a mal h□″; 5) a mal l mal l□″ und 6) 2a mal a mal l□″.

Wenn bei der quadratischen senkrechten Säule anstatt eines Quadrates ein Oblongum zur Grundfläche wird, so daß also die drei Dimensionen verschieden werden, z. B. die Länge oder Ausdehnung von rechts nach links 5″, die Breite oder Ausdehnung von vorn nach hinten 4″, die Höhe 7″ betrüge, so hätte man die senkrechte oblongische Säule. Die Grundfläche hätte dann 20□″, die obere derselben parallele und kongruente ebensoviel; die vordere hätte 35□″, die hintere wäre der vorderen parallel und kongruent; die rechte, der linken parallele und kongruente, enthielte 28□″. Im Übrigen wäre wohl nichts Neues zu bemerken, was nicht schon bei dem Würfel oder der quadratischen Säule Statt gefunden hätte. Die drei Achsen schneiden sich zwar unter rechten Winkeln, sind aber alle drei an Größe ungleich und stimmen mit den drei Ausdehnungen überein. Wie die quadratische Säule, welche früher besprochen wurde, dadurch entstand, daß sich ein Quadrat, z. B. von 9□″ zu einer gewissen Höhe, z. B. von 6″ senkrecht emporbewegte, so entsteht hier die senkrechte oblongische Säule, wenn sich ein Oblongum z. B. von 5″ Länge und 4″ Breite 7″ senkrecht emporbewegt. Alle Kanten betragen zusammen 64″ oder 5′ 4″; denn jede Kante ist 4 mal vorhanden, daher $4.5 + 4.4 + 4.7 = 4\ (5 + 4 + 7) = 4.16 = 64''$. Man hat also nur die drei Dimensionen zu addiren und ihre Summe viermal zu nehmen, um die Summe aller Kanten zu finden.

Beim Würfel, bei der quadratischen und bei der oblongischen Säule findet man sechs Flächen, d. h. zwei Flächen mehr, als die Grundfläche Seiten- oder Ecken hat.

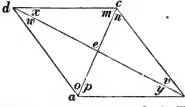
Die Oberfläche der oblongischen Säule ist = 2 mal Grundfläche + 2 mal vordere + 2 mal linke Seitenfläche; also 2 mal 5 mal 4□″ + 2 mal 5 mal 7□″ + 2 mal 4 mal 7□″ = (40 + 70 + 56)□″ = 166□″. Wie die Anschauung lehrt, so ist die Säule aus 140 k″ gebildet; eine Grundfläche von

20 □" hat sich 7" hoch senkrecht emporbewegt; man hat daher 7 Schichten à 20 k", im Ganzen 140 k". Denselben Kubikinhalt hätte man gefunden, wenn man Länge mal Breite mal Höhe oder Grundfläche mal Höhe genommen und die entsprechende Kubikeinheit hinzugefügt hätte. Läßt man die Dimensionen von andern oblongischen Säulen 2, 3, ꝛc. mal so groß werden, also z. B. 8, 10, 14; 12, 15, 21" ꝛc. so wird die frühere Oberfläche in der neuen 4, 9 ꝛc. mal enthalten sein; der Kubikinhalt der neuen Säulen ist 8 mal, 27 mal ꝛc. so groß. Die Säulen unterscheiden sich dann zwar in der Größe, stimmen aber mit einander in der Gestalt überein oder sind ähnlich. Setzt man überhaupt die Dimensionen der oblongischen Säule = l, b und h Längeneinheiten und läßt dann alle um a Längeneinheiten wachsen, so hat man 1) ursprüngliche Oberfläche $2\,(l.b + l.h + b.h)$; 2) neue Oberfläche $2\,[(l + a).(b + a) + (l + a).(h + a) + (b + a).(h + a)] = 2\,[lb + lh + bh + 3aa + 2ab + 2ah + 2al]$. Daher der Flächenzuwachs $6aa + 4ab + 4ah + 4al$. Aber 6aa bedeutet das sechsfache Quadrat mit der Seite a, 4ab das vierfache Oblongum mit der Grundlinie a und der Höhe b ꝛc. Für den Kubikinhalt hätte man $(l + a).(b + a).(h + a) = bhl + aaa + aab + aah + aal + abh + abl + ahl$. Es kommen also 7 Körperstücke, ein Würfel mit der Kante a, drei quadratische Säulen mit der Grundflächenkante a und der Höhe b, h u. l, und drei oblongische Säulen mit den Dimensionen a, b, h und a, b, l und a, h, l noch hinzu.

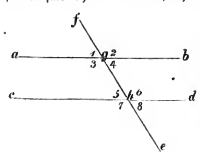
Verschiebt man ein Quadrat, so daß zwar die Seiten alle gleich bleiben, die Winkel aber schief werden, zwei stumpfe und zwei spitze, wenn gleich dieselben, wie vorher vier Rechte betragen, wenn auch anders vertheilt, so entsteht ein Rhombus; bewegt sich derselbe senkrecht empor, z. B. 7", 10" ꝛc., so entsteht die senkrechte rhombische Säule. Sie stimmt mit den früheren in den drei Ausdehnungen, in der Anzahl der Flächen, Kanten, Ecken, im Senkrechtstehen der Seitenflächen zur Grundfläche ꝛc. überein; dieselbe unterscheidet sich aber dadurch, daß nicht alle Linienwinkel rechte sind. Rechte Linienwinkel kommen nur an den Seitenflächen vor, welche kongruente Oblongen sind; an der Grund- und oberen Fläche findet man nur schiefe

Linienwinkel; die Seitenflächen bilden mit der Grund- und oberen Fläche rechte, die Seitenflächen unter sich schiefe Flächenwinkel. Die drei Achsen sind ungleich.

Die neue Art des Vierecks ist der **Rhombus**, dessen Eigenschaften wir jetzt näher kennen lernen. Es ist ein **Parallelogramm**, d. h. die gegenüberliegenden Seiten sind parallel; wie beim Quadrat und Oblongum zerlegt eine Diogonale den Rhombus in zwei kongruente Dreiecke, daher im Rhombus ebenfalls die gegenüberliegenden Winkel und Seiten gleich sind und die Diagonalen sich gegenseitig halbiren. Es muß ferner je ein stumpfer + dem spitzen Winkel allemal zwei Rechte machen, z. B.



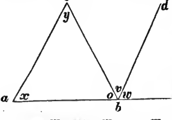
W. a + W. d machen zwei Rechte oder 180°; denn alle Winkel des Rhombus sind vier Rechte und W. a + W. d bilden die Hälfte von 360° oder den vier Winkeln des Rhombus. Es ergiebt sich weiter, daß die Winkel des Dreiecks bdc, oder abc, weil Dr. bdc mit Dr. bad, Dr. abc mit Dr. adc kongruent ist, sowohl in dem Dr. bdc, welches einen stumpfen und zwei spitze Winkel, sowie in dem Dr. abc, welches drei spitze Winkel hat, allemal zwei Rechte oder 180° betragen müssen. Es ergiebt sich ferner, daß W. x = W. y ist, d. h. daß die **Wechselwinkel** bei parallelen Linien gleich sind, d. h. je zwei Winkel, welche entstehen, wenn dc und ab, die parallelen Linien von einer dritten db geschnitten werden. Dieselben sind 1) beide innere, 2) beide an verschiedenen Seiten



der Schneidelinie, 3) keine Nebenwinkel; dasselbe findet bei den Winkeln v auf w ꝛc. Statt. Denkt man sich einmal zur weitern Veranschaulichung der Winkel bei parallelen Linien die beiden Geraden ab und cd durch die Schneidelinie ef geschnitten, so hat man ver-

schiedene Winkelarten. W. 1, 2, 7, 8 sind äußere; W. 3, 4, 5, 6 innere; W. 1, 3, 5, 7 links liegende; W. 2, 4, 6, 8 Rechtsliegende. Die Winkel 1 und 2, 2 und 4 rc. sind Nebenwinkel. Dieselben haben stets 1) den Scheitel, 2) einen Schenkel gemein, 3) müssen die andern Schenkel eine Gerade bilden. Da eine halbe Umdrehung dazu gehört, wenn z. B. der Schenkel ag sich durch die Lage fg in die Lage gb drehen soll, so betragen die beiden Nebenwinkel zusammen allemal zwei Rechte oder 180°; sind beide gleich, so ist jeder ein Rechter; sind aber beide ungleich, so ist der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer. Winkel wie 3 und 2, wie 1 und 4 sind Scheitelwinkel; man erkennt dieselben 1) daran, daß der Scheitel gemein ist, 2) daß je zwei Schenkel eine Gerade bilden, aber 3) im entgegengesetzten Sinne gerichtet sind. Da W. 3 + W. 4 ebensoviel Grade beträgt, wie W. 4 + W. 2, so muß W. 3 = W. 2, überhaupt Scheitelwinkel müssen einander gleich sein. Es reihen sich noch mancherlei Betrachtungen daran, z. B. daß man den Nebenwinkel zu einem Winkel findet, wenn man seine Gradzahl von 180° abzieht; daß man den Nebenwinkel zu einem Winkel findet, wenn man einen Schenkel rückwärts über den Scheitel verlängert; daß man beide Schenkel rückwärts über den Scheitel verlängernd den Scheitelwinkel findet; daß alle Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel über einer Geraden 180° oder zwei Rechte betragen; daß alle Winkel über oder unter einer Geraden mit gemeinschaftlichem Scheitel oder um einen Punkt herum vier Rechte betragen; daß, wenn zwei Winkel zusammen 180° betragen, dieselben sich zu Nebenwinkeln anordnen lassen; daß, wenn zwei Winkel gleich sind, dieselben sich zu Scheitelwinkeln machen lassen; daß zu gleichen Winkeln gleiche Neben- und Scheitelwinkel gehören rc. Winkel, wie 1 und 5, 3 und 7, 2 und 6, 4 und 8, von denen 1) der eine ein äußerer, der andere ein innerer ist, welche 2) beide auf derselben Seite der Schneidelinie liegen, aber 3) keine Nebenwinkel sind, heißen Gegenwinkel. Gegenwinkel sind einander gleich; denn da W. 5 = W. 4, als Wechselwinkel und W. 4 = W. 1 als Scheitelwinkel, so muß auch W. 5 = W. 1 sein rc. Ebenso W. 6 = W. 2, ebenso W. 3 = W. 7 rc. Es läßt sich ferner leicht einsehen, weil W. 5 = W. 4,

und W. 3 + W. 4 = W. 3 + W. 5 = 180° sein muß, daß je zwei innere Winkel an derselben Seite der Schneidelinie zwei Rechte betragen müssen. Ebenso W. 1 + W. 7; denn W. 1 + W. 3 + W. 5 + W. 7 = 4 R, davon W. 5 + W. 3 = 2 R, bleibt für W. 1 + W. 7 noch 2 R. Aber W. 7 + W. 8 macht auch 2 R, daher auch W. 1 = W. 8, ebenso W. 2 = W. 7, d. h. je zwei äußere Winkel an verschiedenen Seiten der Schneidelinie ohne Nebenwinkel zu sein, sind einander gleich. Diese ganzen gelegentlich dargestellten Wahrheiten knüpfen sich aber auch direkt an den Begriff gleicher Winkel an. Denn gleiche Winkel sind solche Winkel, deren Schenkel gleiche Lage haben und in demselben Sinne gerichtet sind oder welche wie bei den Scheitelwinkeln gleiche, aber entgegengesetzte Richtung haben. Setzt man nun ab || cd voraus, läßt beide durch die fe schneiden, so muß W. 1 = W. 5 sein, d. h. die Gegenwinkel müssen gleich sein, denn ga und hc als Theile der Parallelen sind auch parallel und beide von der Schneidelinie aus nach links gerichtet; hg und gf als Theile einer und derselben Geraden haben auch dieselbe Lage und sind beide von unten nach oben gerichtet — die Winkel 1 und W. 5 müssen also gleich sein. Ebenso W. 4 und W. 5 weil ihre Schenkel dieselbe, aber entgegengesetzte Lage haben. Da endlich die acht Winkel zu beiden Seiten der Schneidelinie acht Rechte, die Winkel 1, 3, 5 und 7 vier Rechte betragen, und W. 1 u. W. 3 zwei Rechte, W. 1 aber W. 5 gleich ist, so muß W. 3 und W. 5 zwei Rechte betragen.

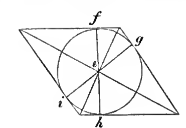


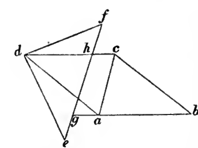
Ist Dr. abc irgend ein Dr., verlängert man ab bis e, so ist W. cbe der Außenwinkel; legt man bd || ac, so ist W. v = W. y und W. w = W. x, also W. v + W. w oder der Außenwinkel = W x + W. y = der Summe der beiden gegenüberliegenden W. Aber W. o + W. v + W. w = 2 R, daher auch W. x + W. y + W. o oder die drei Winkel eines Dr. = 2 R oder 180°; zwei W. W. eines Dr. sind also immer kleiner, als 2 R.

Die Eigenschaften paralleler Linien erkennt man also an der Gleichheit der Wechsel- und Gegenwinkel und daran, daß je zwei innere oder äußere an derselben Seite der Schneidelinie zwei Rechte betragen. Man kann aber auch umgekehrt behaupten, daß wenn die Gegenwinkel oder Wechselwinkel gleich sind, oder wenn je zwei innere oder äußere Winkel, z. B. W. 5 und W. 3 einander gleich sind, die Linien parallel sein müssen. Denn sind z. B. die Gegenwinkel 1 und 5 einander gleich, so muß, weil die Schenkel hg und gf gleiche Lage haben, als Theile einer Geraden und gleich gerichtet sind, die Lage ag der von hc gleich sein, auch müssen beide gleich gerichtet sein, weil sonst die Größe der Winkel verändert würde. Ebenso, wenn W. 4 und W. 5 einander gleich sind, so muß auch Schenkel gb und hc gleiche Lage und entgegengesetzte Richtung haben, weil schon Schenkel hg und gh zwar gleiche Lage, aber entgegengesetzte Richtung haben. Wären unter solchen Umständen die gb und hc, also auch die ganzen Linien ab und cd nicht parallel, so würde die vorausgesetzte Gleichheit der Winkel verändert werden, was nicht sein darf. Aber die Gleichheit der Gegen- und Wechselwinkel schließt zugleich die Bedingung in sich, daß W. 3 W. + W. 5 zwei Rechte betragen. So hat man ein untrügliches Merkmal, an welchem man erkennen kann, ob zwei Linien parallel sind oder nicht — man läßt dieselben durch eine dritte Gerade schneiden und prüft, ob die Gegenwinkel oder die Wechselwinkel gleich sind, oder ob je zwei innere oder zwei äußere Winkel zusammen zwei Rechte betragen. *Eine Linie, welche auf der einen Geraden senkrecht ist, muß es auch auf der andern sein.* Denn ist abc = R, so muß auch dcb = R sein, weil beide Winkel zusammen = 2 R sind.

Kehren wir nun zur Betrachtung des Rhombus zurück, so ergiebt sich aus der Kongruenz der Dreiecke dab und dcb, daß W. x = W. w und W. y = W. v ist und weil Dreieck adc mit Dreieck abc kongruirt, daß W. m = W. n und W. o = W. p, oder *daß die Diagonalen die Winkel im Rhombus halbiren.* Aber auch Dreieck aed kongruent mit Dreieck dec, daher Winkel aed = Winkel ced = R, d. h.

die Diagonalen schneiden sich unter rechten Winkeln. Vergleicht man ferner die beiden Dreiecke dab und abc, so sind dieselben an Größe verschieden, wie an Gestalt, und können nicht zur Deckung gebracht werden; die Diagonale db ist größer, als die Diagonale ac. Denn in dem Winkel dab und abc sind zwar die Schenkel gleich, aber in dem Winkel dab sind dieselben um eine größere Drehung von einander abweichend, als in dem Winkel abc, weil Winkel a stumpf und Winkel b spitz ist. Also in dem Rhombus sind die Diagonalen ungleich; die den stumpfen Winkeln gegenüberliegende ist größer, als die den spitzen Winkeln gegenüberliegende. Da nun die Diagonalen im Rhombus sich gegenseitig halbiren, die Hälfte der größern aber größer ist, als die Hälfte der kleineren Diagonale, d. h. de > ec, und be > ea, so steht der Punkt e nicht gleichweit von den Ecken ab, ist also auch nicht centrisch nach den Ecken. Denkt man sich aber die vier kongruenten Dreiecke so auf einander gelegt, daß alle auf das Dreieck dec zu liegen kommen, daß alle die Spitze e und die gegenüberliegende Seite dc gemein haben, so steht in allen, wenn man von e nach der dc eine Senkrechte mit dem Winkelhaken zieht, dieser Punkt von der gegenüberliegenden Seite oder Grundlinie gleichweit ab, d. h. der Punkt e ist centrisch nach den Seiten, so daß man mit ef, der Länge der Senkrechten, einen Kreis in denselben beschreiben kann, welcher die Seiten des Rhombus berührt, so daß Rhombus und Kreis vier Punkte mit einander gemein haben.





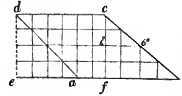
Am Rhombus zeigt sich übrigens recht deutlich, daß wenn zwei Winkel, wie adc und abc gleich sind, und wenn auch ihre Schenkel gleich sind, die Zwischenlinie ac für beide auch gleich sein muß; läßt man nun aber den Winkel d sich weiter öffnen, so wird die Zwischenlinie ef größer. Denn unter allen Lagen der fe muß auch eine parallel zu ca sein; denkt man sich diese vorhanden und verlängert ba bis zum Durchschnitt g, so erhält man das Pgm gach, in welchem ac = gh ist; gh ist aber nur ein Theil der ef, also ac < ef.

Um einen Rhombus zu konstruiren, braucht man, weil alle Seiten gleich sind, nur eine zu kennen; da aber die Winkel schiefe sind, so kennt man keinen im Voraus — daher muß einer beliebig als stumpfer oder spitzer gegeben werden. Aus dem einen kennt man, wie in jedem Pgm alle, denn der gegenüberliegende ist gleich und der an derselben Seite anliegende ergänzt denselben zu zwei Rechten. Ist also ein Winkel bekannt, so macht man seine Schenkel so lang, wie die gegebene Seite des Rhombus, verbindet die Endpunkte der Schenkel, so hat man die Hälfte des Rhombus. Zeichnet man dieselbe noch einmal und schiebt dieselbe mit der gleich großen dritten Seite an einander, so ist der Rhombus fertig.

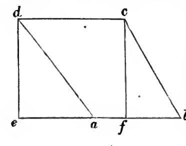
Um nun weiter zur Berechnung der Linien, Flächen, der Oberfläche und des Kubikinhaltes der rhombischen Säule überzugehen, so sei die Seite des die Grund- und obere Fläche bildenden Rhombus 5″, der senkrechte Abstand der beiden parallelen Seiten, der vorderen untern und der hintern untern, oder die Dicke oder Tiefe der rhombischen Säule 4″ und die Höhe oder senkrechte Ausdehnung von unten nach oben 9″, so ist 1) der Umfang des Rhombus = 4 mal 6 oder 24″; beide Rhomben haben also zusammen 48″ Umfang; eine Seitenfläche hat 30″, alle vier also 120″ Umfang. Daher betragen alle Kanten 168″ oder 14′ Umfang oder Länge.

Was 2) die Oberfläche der rhombischen Säule anlangt,

so sind zunächst die vier Seitenflächen kongruente Oblongen; jedes hat 6 mal 9 oder 54□″ Flächeninhalt; alle 4 also 4 mal 54 oder 216□″. Es kömmt also nun noch darauf an, den Flächeninhalt der rhombischen Grundfläche zu ermitteln, und 2 mal zu nehmen, weil die obere Fläche der Grundfläche kongruent ist.

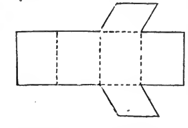


Ist abcd der Rhombus, dessen Flächeninhalt berechnet werden soll, so fälle man die Senkrechte cf, verlängere die ba beliebig weit, fälle die de senkrecht, so wird von dem Rhombus rechts das Dreieck fcb abgeschnitten, auf der andern Seite links kömmt aber wieder ein ebenso großes ade hinzu — denn cb = da, Winkel dae = Winkel cbf, als Gegenwinkel; ebenso Winkel eda = Winkel fcb, weil die Schenkel gleiche Lage haben und in demselben Sinne gerichtet sind. Legt man nun cb auf ad, so müssen die Schenkel cf und bf in dieselbe Richtung de und ae fallen und sich in e schneiden; also die Dreiecke bcf und ade müssen sich decken. Daher ist auch Dreieck bcf flächengleich mit Dreieck adc und fb = ae. Der Rhombus abcd ist aber auf solche Weise in ein rechtwinkliges Parallelogramm (Oblongum, wenn fc < bc, Quadrat, wenn fc = bc ist; fc darf nicht größer sein, als bc) von demselben Inhalte, derselben Grundlinie fe = ab (denn af = af und ea = fb, also af = ea oder fe = af + fc oder ab) und derselben Höhe fc verwandelt worden. Die Fläche des rechtwinkligen Parallelogramms efcd ist aber = ef mal fc mal Flächeneinheit, oder ab mal fc mal Flächeneinheit, also auch: **die Fläche des Rhombus wird gefunden, wenn man die Grundlinie ab mit der Höhe fc multiplicirt und die entsprechende Flächeneinheit hinzufügt.** Dabei darf man aber die schiefe Linie bc nicht mit dem senkrechten Abstand fc der beiden Parallelen dc und ab verwechseln. Da nun in dem vorliegenden Bei-



spiele die Grundlinie 6 und die Höhe 4 Längeneinheiten hat, so ist die Fläche = 4 mal 6 Quadrat oder Flächeneinheiten.

Bewegt sich die Grundfläche abcd 9″ hoch senkrecht empor, so entsteht die rhombische Säule, von welcher die Rede ist. Bewegt sich aber das Dreieck fbc auch 9″ hoch senkrecht empor, so entsteht eine dreieckige senkrechte Säule, welche an Größe und Gestalt ebenso groß ist, als die Säule, welche entsteht, wenn das Dreieck ead, welches mit dem Dreieck fbc kongruent ist, sich auch 9″ hoch senkrecht emporbewegt. Beide dreieckige Säulen, die eine in den leeren Raum der andern hineingedacht, müssen denselben vollkommen ausfüllen — überhaupt muß ganz und gar, nach Größe und Gestalt ein und derselbe Körper, ein identischer Körper entstehen, wenn dieselbe Fläche in derselben Weise zu derselben Höhe emporbewegt wird, d. h. wenn der Körper nach demselben Bildungsgesetze, nach einem identischen Bildungsgesetze entsteht. Hätte ich aber ein mit fcb nur winkelgleiches Dreieck, in welchem jede Seite $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ 2c. der ursprünglichen wäre; ließe ich das Dreieck sich senkrecht, aber $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ 2c. so hoch bewegen, so entstände eine der ursprünglichen Säule nicht kongruente, sondern ähnliche; das Bildungsgesetz wäre kein identisches, sondern ein ähnliches. — Denkt man nun die senkrechte dreieckige Säule mit der Grundfläche fbc rechts von der rhombischen Säule abgeschnitten und links so angeschoben, daß bc in ad, fb in ae, cf in de, die Fläche fcb in die Verlängerung der Fläche dcfa, so gestaltet sich die rhombische Säule in eine eben so große oblongische um, deren Kubikinhalt = Grundfläche mal Höhe, = 4 mal 6 mal 9 = 216 k″ beträgt. Aber die oblongische Grundfläche efcd ist flächengleich der rhombischen abcd. Daher: Kubikinhalt der rhombischen Säule = Grundfläche (Grundlinie ab mal senkrechte Entfernung zwischen den beiden Parallelen fc) mal Höhe.

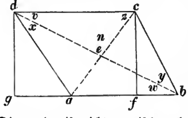


Die rhomboidische Säule unterscheidet sich von der vorhergehenden nur darin, daß sie ein Rhomboid, d. h. ein Parallelogramm zur Grund- und ein kongruentes paralleles zur

oberen Fläche hat, in welchem die Winkel schief und die einen schiefen Winkel einschließenden Seiten ungleich und nur die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, und welche nicht vier kongruente Oblongen zu Seitenflächen hat, sondern nur paarweise kongruente (die vordere und die hintere, die rechte und die linke). Bezüglich der Anzahl der Ausdehnungen, Anzahl der Begrenzungsflächen und der Eigenschaft, daß alle Flächen Parallelogramme sind, von denen wenigstens immer die gegenüberliegenden kongruiren, bezüglich der Anzahl der Ecken, Anzahl der ebenen Winkel, welche eine Ecke bilden, Anzahl und Lage der Kanten zu einander rc. stimmen die bisher genannten Säulen überein. Der Würfel und die oblongische Säule stimmen in der Rechtwinkligkeit ihrer Parallelogramme überein, die rhomboidische und rhombische Säule haben das gemein, daß ihre Grund- und obere Fläche schiefwinklige Parallelogramme sind, die Seitenflächen Oblongen. Bei der oblongischen und rhomboidischen Säule sind nur die gegenüberliegenden Seitenflächen kongruent, bei der rhombischen Säule alle Seitenflächen, beim Würfel alle Flächen. Bezüglich der Winkel stimmen die rhombische und rhomboidische Säule mit einander überein. Alle bisher genannten Säulen sind nur von Parallelogrammen eingeschlossen, deßhalb nennt man den Würfel, die quadratische, rhombische und rhomboidische Säule **Parallelopipeden**, weil ἐπίπεδον (epipedon) die Oberfläche bedeutet und alle Flächen Parallelogramme sind; alle sind senkrechte Körper; der Würfel ist nur von gleichseitigen und rechtwinkligen Pgmen oder Quadraten, den regelmäßigen Parallelogrammen eingeschlossen und ist also die **regelmäßige 4eckige Säule** oder der regelmäßige, von sechs Vierecken eingeschlossene Körper.

Wenden wir uns speciell zur rhomboidischen Säule, so entsteht dieselbe, wenn sich ein Rhomboid senkrecht von unten nach oben bewegt. Natürlich geht daraus von selbst hervor, daß die Grund- und obere Fläche kongruent sein müssen. Es kömmt zunächst darauf an, die neue Figur, das **Rhomboid** in seinen Eigenschaften näher kennen zu lernen. Da es ein Parallelogramm ist, so hat dasselbe auch alle Eigenschaften desselben, als: die Diagonale zerlegt es in zwei kongruente Dreiecke; es hat zwei Diagonalen, welche sich gegenseitig halbiren; die gegenüberliegenden Seiten und Winkel sind gleich; je zwei Winkel an

derselben Seite betragen zwei Rechte 2c. Die besondern Eigenschaften bestehen aber in Folgendem: die Diagonalen sind ungleich,



wie sich aus der Vergleichung der beiden Dreiecke abd und abc ergiebt, in denen zwar die Seiten bezüglich gleich, die Winkel aber zwischen den Seiten ungleich sind; db > ac, also auch de > ec, d. h. der Halbirungspunkt e der Diagonalen ist nicht centrisch nach den Ecken. Der Winkel x ist = Winkel y, aber nicht Winkel o = Winkel x; denn W. v = W. w und in dem Dreieck abd liegt Winkel w der kleineren Seite ad und W. x der größeren Seite ab gegenüber und w < x, wie sich durch Vergleichung ergiebt. Also: die Diagonalen halbiren die Winkel nicht. Die beiden Dreiecke aed und ced sind nicht kongruent, die Höhen, d. h. die Entfernungen, Senkrechten von e nach dc oder ad sind ungleich, also: der Halbirungspunkt der Diagonalen ist nicht centrisch nach den Seiten. Der Winkel v ist < 45° als kleinere Hälfte des spitzen Winkels, der Winkel z ist < 90°, als kleinere Hälfte eines stumpfen Winkels. Winkel aed und Winkel dec sind ungleich, wie sich bei der Uebereinanderlegung der Dreiecke ergiebt und Nebenwinkel, also: die Diagonalen schneiden sich unter schiefen Winkeln. Da v + z < 135° im äußersten Falle, so muß Winkel n, wenn die beiden Winkel v und z ihr Größtes haben, nur ein spitzer, sein Nebenwinkel ein stumpfer sein. Aber auch n kann ein stumpfer Winkel sein, wenn das < 45° und < 90° tief genug herabgeht, z. B. zu 10° und 70°, wobei dann n = 100° sein muß.

Setzt man die längere Seite der rhomboidischen Grundfläche = 8″, die kürzere = 5″, die senkrechte Entfernung zwischen den beiden Parallelen ab und dc = 4″, so daß die fb = 3″ wird; ist ferner die Höhe der Säule = 10″, so ergiebt sich für den Umfang der Grundfläche 26″, der oberen 26″, der vorderen Fläche 36″, der hintern 36″, der rechten 30″, der linken 30″; also alle Kanten zusammen betragen 184″ : 2 = 92″.

Die rechte Seitenfläche = 50 □″, ebenso die linke; die

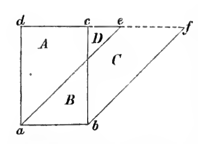
vordere 80□″, ebenso die hintere; alle Seitenflächen 260□″. Den Flächeninhalt der Grund- und oberen Fläche findet man in ähnlicher Weise wie bei dem Rhombus. Wird das Dreieck fbc rechts abgeschnitten und links angesetzt, so wird aus dem Rhomboid ein flächengleiches Oblongum, dessen Grundlinie 8″, dessen Höhe 4″ ist, dessen Fläche also 32□″ ausmacht — also die untere und obere Fläche zusammen 64□″. Die ganze Oberfläche 260□″ + 64□″ = 324□″ = 2□′ 36□″.

Zur Berechnung des Kubikinhaltes der rhomboidischen Säule schneidet man die dreieckige senkrechte Säule mit der Grundfläche fbc rechts ab und setzt dieselbe links an, so entsteht die oblongische, ebenso große Säule, welche die oblongische Grundfläche fcdg hat, die mit dem Rhomboid abcd flächengleich ist. Bewegen sich die kongruenten Dreiecke fbc und gad beide senkrecht empor und zwar 10″ hoch, so müssen die ganz nach demselben Gesetze entstandenen dreieckigen Säulen in Hinsicht auf Größe und Gestalt identisch oder vollkommen übereinstimmend sein. Demnach ist der Kubikinhalt der rhomboidischen Säule = Grundfläche mal Höhe oder Länge (ab) mal Breite (fc) mal Höhe. In unserem obigen Falle 8″ mal 4″ mal 10″ = 320 k″.

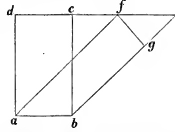
Läßt man die bestimmenden Dimensionen, Länge, Breite (Dicke oder Tiefe) und Höhe so wachsen, daß bei übrigens gleichen und gleich angeordneten Linien und Flächenwinkeln man dieselben 2, 3, 4, . . . n mal so groß oder so klein werden läßt, so werden die Oberflächen im quadratischen Verhältnisse wachsen, d. h: 2 mal 2, 3 mal 3, 4 mal 4, ... n mal n mal so groß oder so klein, während die Kubikinhalte in kubischem Verhältnisse zu oder abnehmen, d. h. 2 mal 2 mal 2; 3 mal 3 mal 3 ꝛc. mal so groß oder so klein werden. Wir haben dieses Gesetz bei allen senkrechten, ähnlichen Säulen bis hierher gefunden.

Faßt man hier, bevor zu den dreieckigen Säulen übergegangen wird, zuvor Einiges zusammen, was die Parallelogramme betrifft, so ist 1) ein Parallelogramm ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel laufen. 2) Die vier Winkel eines Parallelogramms sind entweder einzeln Rechte oder zwei stumpfe und zwei spitze Winkel, aber zusammengenommen immer vier Rechte oder 360°. 3) Ein jedes Parallelogramm

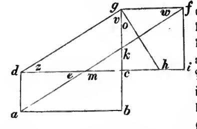
zerfällt durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke 4) In einem jeden Pgm sind die gegenüberliegenden Winkel und Seiten einander gleich. 5) In einem jeden Pgm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig. 6) Die Pgme sind entweder rechtwinklige oder schiefwinklige (Quadrat, Oblongum; Rhombus, Rhomboid). 7) In einem Pgme sind entweder alle Seiten gleich oder nur die gegenüberliegenden und die Pgme zerfallen deßhalb in gleichseitige und ungleichseitige; bei ersteren sind die einen Winkel einschließenden Seiten gleich, bei letztern ungleich. (Quadrat und Rhombus; Oblongum und Rhomboid.) 8) Im Oblongum und Quadrat sind die Diagonalen einander gleich, aber nicht im Rhombus und Rhomboid. 9) Im Quadrat und Rhombus schneiden sich die Diagonalen unter rechten, im Oblongum und Rhomboid unter schiefen Winkeln. 10) Um das Quadrat läßt sich ein Kreis beschreiben und ebenso in dasselbe; um das Oblongum, aber nicht in dasselbe; in den Rhombus, aber nicht um denselben; weder in das Rhomboid, noch um dasselbe. 11) Zur Konstruktion eines Pgms sind im äußersten Falle die beiden ungleichen Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel nothwendig. In einzelnen Fällen reichen schon weniger Bestandtheile aus. 12) Die Diagonale halbirt den Winkel im Quadrat und Rhombus, aber nicht im Oblongum und Rhomboid; 13) je zwei an einer Seite des Pgms liegende Winkel betragen zusammen zwei Rechte. 14) Durch einen Winkel des Pgms sind alle übrigen bestimmt. Denn ist der Winkel x^0, so ist der gegenüberliegende ebenso groß, der an derselben Seite liegende $= 180^0 - x^0$. 15) Bei allen Parallelogrammen ist der Flächeninhalt ein Produkt aus Grundlinie und Höhe mal Flächeneinheit. Dabei ist die Höhe die Senkrechte zwischen zwei Parallelen. 16) Ein jedes schiefwinklige Pgm ist an Fläche ebenso groß, als ein rechtwinkliges von derselben Grundlinie und Höhe. 17) Alle Pgme verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe; bei gleicher Grundlinie, wie ihre Höhen; bei gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien. 18) Sind zwei Parallelogramme flächengleich und ist im zweiten die Grundlinie n mal so groß, als im ersten, so muß die Höhe des zweiten n mal so klein sein als die Höhe des ersten. Oder: In flächengleichen Pgmen verhalten sich die Grundlinien umgekehrt, wie ihre Höhen.



Daß Pgme von gleicher Grundlinie und Höhe, also z. B. Oblongum abcd und das Rhomboid abfe flächengleich sind, läßt sich theils rechnerisch erkennen, weil ab × bc mal Flächeneinheit sowohl für das eine, als auch für das andere Pgm das Maß ist, theils aus der Betrachtung der Flächen. Denn es ist dc + ce = ce + ef oder de = cf; aber auch da = cb und W. ade = W. bcf = R, daher sind die beiden Dreiecke ade und bcf (aus 2 S. S. und dem eingeschlossenen Winkel kongruent; also die Flächenstücke A + D = den Flächenstücken C + D also A = C, daher auch A + B = C + B oder das Oblongum abcd ist flächengleich mit dem Rhomboid abfe. Alle Pgme auf gleicher Grundlinie und von gleicher Höhe sind demnach flächengleich. Man kann aber auch behaupten, daß flächengleiche Pgme, welche dieselbe Grundlinie haben, mit ihrer gegenüberliegenden Seite in einer zur Grundlinie parallellen Linie liegen oder gleiche Höhe haben müssen. Denn wäre die fe nicht parallel zu ab, so müßte es die fg sein, dadurch würde aber die Größe des Pgms abgf verändert. Die Pgme sollen aber flächengleich sein. Auf die Gleichheit der Parallelogramme bei gleicher Grundlinie und Höhe gründet sich also die Verwandlung eines schiefwinkligen Pgms in ein rechtwinkliges oder Oblongum; aber auch das Oblongum läßt sich nun in ein Quadrat verwandeln. Rechnerisch ist die Aufgabe einfach; denn ist die Maßzahl für die eine Seite des Oblongums a Längeneinheiten, für die andere b Längeneinheiten, so ist die Fläche a mal b Quadrateinheiten; nennt man die Seite des Quadrats, welches flächengleich ist, x, so ist $x^2 = a.b$ oder $x = \sqrt{a.b}$. Wäre a = 9″ und b = 4″, so



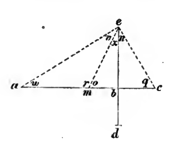
wäre $x^2 = 36\square''$ und $x = \sqrt{36\square''} = 9''$. Konstruktiv aber ließe sich die Aufgabe folgendermaßen lösen.



In dem rechtwinkligen Dreieck dgh ist gc senkrecht aus der Spitze des Dreiecks auf die Hypotenuse gefällt; dann af || ag gelegt; dann das Parallelogramm gfic konstruirt indem fi || gc und gf || ci gelegt ist, so muß das Parallelogramm gfic ein Quadrat sein und zwar an Fläche gleich mit dem Oblongum abcd; dann aus ab und ch = cb das Oblongum abcd konstruirt.

Daß das Pgm gfic rechtwinklig ist, folgt einfach daraus, daß der W. gci = R; ist aber in einem Pgm ein W. = R, so sind alle W. W. = R. Aber auch cg = gf, weil Dr. gfk und Dr. cgh kongruent sind. Denn ch = cb = ad = kg; W. kgf = W. gch = R; und W. o = W. w, denn W. z = W. w und W. z + W v = R = W. v + W. o, also W. w = W. z = W. o. Also haben die beiden Dr. die Kathete ch = gk, den anliegenden rechten W. und die spitzen W. W. in derselben Ordnung gleich; daher Kongruenz, also cg = gf. Das Quadrat gfic ist aber flächengleich dem Pgme gfed (gleiche Grundl. und Höhe), ebenso Pgm gfed = Pgm gkad; ebenso Pgm gkad = Pgm abcd, also auch Quadrat gfic = Oblongum abcd.

Um also das Oblongum umzuwandeln in ein Quadrat, brauchte man nur an die längere Seite dc die kürzere cb = ch anzusetzen, so daß die Gerade dh entstände; dann hätte man die bc zu verlängern, bis sie die gehörige Länge erhält. Aber wie lang? Nun — so lang, daß, wenn der Endpunkt g mit den Punkten d und h durch Gerade verbunden wird, der W. dgh = R wird.

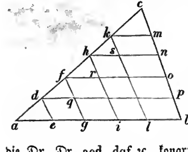


Sind ab und bd zu der Ge-

raden ac zusammengesetzt, ist diese in m halbirt, bd verlängert und wird mit ma = me = mc, die Senkrechte bei e von m aus begrenzt, so muß W. e = R geworden sein. Denn o = w + v = 2 v und r = q + (x + n). = 2 (x + n). Also w + v = 2 R = 20 + 2 (x + n); R = v + x + n.

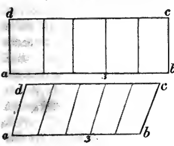
Da man mehrere schiefwinklige Pgme in Oblongen und die Oblongen in Quadrate verwandeln, die gefundenen Quadrate zusammenzählen kann, so kann man anstatt beliebig vieler Pgme ein an Fläche ebenso großes Quadrat einsetzen.

Da jetzt bekannt ist, daß in einem Pgme die gegenüberliegenden Seiten an Größe gleich sind, so läßt sich die früher angedeutete Theilung einer Geraden in gleiche oder verhältnißmäßige Theile einfacher und leichter ausführen und die Richtigkeit des Verfahrens beweisen, wenn zugleich der Satz hinzugenommen wird, daß Dreiecke aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln konstruirt, einander kongruent sind.



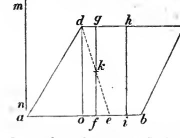
Die Linie ab ist in fünf gleiche Theile getheilt, wenn von der ac, welche beliebig lang zu denken ist, fünf gleiche, beliebig große Theile ad = df ꝛc. abgeschnitten worden sind, b mit c verbunden ist und die Parallelen kl, hi ꝛc. zu bc gezogen sind, dann sind die Dr. Dr. aed, dqf ꝛc. kongruent (aus 1 S. und den beiden anliegenden W. W.), also ae = dq = fr ꝛc.; aber dq, fr, hs ꝛc. sind = eg, gi ꝛc. = ae.

Auch das Wesentlichste in Bezug auf Theilung der Pgme in gleiche oder verhältnißmäßige Theile läßt sich nun ausführen.



Sollte z. B. ein Quadrat, Oblongum, Rhombus oder Rhomboid in fünf gleiche getheilt werden, so brauchte man nur die Grundlinien ab in fünf gleiche Theile zu

theilen und durch die Theilpunkte die Parallelen zu den Seiten ad zu legen. Man erhält fünf unter sich kongruente, also auch flächengleiche Pgme. Wäre die Parallele nur durch den dritten Theilpunkt gelegt worden, so wäre das Pgm in zwei Theile getheilt worden, welche sich wie 3 : 2 verhielten. Auch das läßt sich noch erfüllen, daß die Linie, welche verhältnißmäßig theilt, einer der Lage nach gegebenen Geraden parallel läuft. Denn ist das Pgm abcd gegeben und soll es in drei gleiche Theile getheilt werden, so

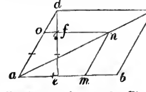


daß die Theilungslinien || mn laufen, so braucht man nur ab in drei gleiche Theile zu theilen, ae = $^2/_3$ab zu nehmen, e mit d zu verbinden, of = fe zu machen, nachdem do || mn und ebenso gf gezogen worden ist. Dann ist das Dr. aed an Fläche die Hälfte eines doppelt so großen Pgms; da das Pgm = ae mal Höhe, so ist die Dreiecksfläche $^1/_2$ ae mal Höhe, aber ae = $^2/_3$ ab, also $^1/_2 . ^2/_3$. ab mal Höhe = $^1/_3$ mal ab mal Höhe. Da of = fe, so hat das Dr. ode eine doppelt so große Grundlinie als das Pgm odgf, sind also flächengleich. Daher Figur adgf = Dr. ade = $^1/_3$ des Pgms abcd. Da ferner gh = $^1/_3$ ab gemacht ist und das Pgm ghif mit dem Pgme abcd gleiche Höhe hat, so ist es = $^1/_3$ des Pgms abcd, folglich kann die Figur hcbi nur noch das letzte Drittheil des Pgms abcd betragen.

Sollte das Pgm abcd von der Ecke d aus in n, z. B. drei gleiche Theile getheilt werden, so brauchte man am nur $^2/_3$ ab, nc = $^2/_3$ cb zu machen, so wäre Dr. amd = $^1/_3$ des Pgms abcd, ebenso das Dr. ndc; daher muß auch das Flächenstück mdnb = $^1/_3$ des Pgms abcd sein.

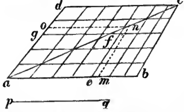
Denkt man sich die zu einer Konstruktion eines Pgms gegebenen, hinreichenden Bestandtheile wiederholt und in derselben Ordnung zur Konstruktion eines Pgms verwendet, so entstehen

eine Anzahl von kongruenten Pgmen, welche sowohl an Größe, als auch an Gestalt mit einander übereinstimmen. Solche Pgme kann man auch als nach einem und demselben Bildungsgesetze entstanden denken, z. B. wenn die Grundlinie ab in obiger Figur sich unter dem Winkel bad mit sich parallel, sich an Größe gleichbleibend fortbewegt, bis dieselbe zu einer gewissen Höhe gekommen ist. Man könnte aber auch zugleich irgend einen Theil von ab, z. B. am = $^2/_3$ ab sich unter demselben Winkel bis zu $^2/_3$ der Höhe emporbewegen lassen, so wäre das Bildungsgesetz ein ähnliches, aber nicht dasselbe. In beistehender



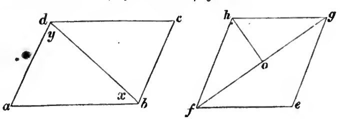
Figur ist am = $^2/_3$ ab und ao = $^2/_3$ ad, die on hat sich nur bis f bewegt, so daß die Höhe ef = $^2/_3$ der Höhe ed ist, ja auch die Diagonale an = $^2/_3$ der Diagonale ac ist, welche zugleich durch den Punkt n gehen muß. Ein solches Pgm amno, welches mit abcd nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden ist, dessen entsprechende oder analoge Linien von den ursprünglichen stets $^2/_3$ betragen, welches in seinen Winkeln mit den Winkeln des ursprünglichen Pgms abcd übereinstimmt, heißt ein dem Pgm abcd ähnliches. Die Haupteigenschaft eines ähnlichen Parallelogramms besteht demnach darin, daß a. die Winkel gleich sind und daß b. die entsprechende Seite des einen, ab, zur entsprechenden Seite des andern am in demselben Verhältnisse steht, wie die ad zur ao, oder ac zur an oder in der Seitenverhältnißgleichheit. Es ist ferner leicht zu bemerken, daß zu einem gegebenen Quadrat jedes andere beliebige Quadrat ähnlich ist; denn die W. W. sind gleich und sind die Seiten der beiden Quadrate a und b, so ist das Seitenverhältniß a : b ein sich gleichbleibendes. Bei den Oblongen ist aber die Seitenverhältnißgleichheit noch zu fordern; bei den Rhomben Winkelgleichheit; bei den Rhomboiden Winkel- und Seitenverhältnißgleichheit. Will man zu einem gegebenen Pgme ähnliche konstruiren, so könnte man z. B., wenn ab und ad Ruthen zu 2000‴ par, oder halbe Ruthen zu 1000‴ par. bedeuten, eben so viele pariser Linien auf dem Reißbrete zeichnen oder überhaupt die Linien der ähnlichen Figur entweder n mal so klein oder n mal so groß machen und dabei

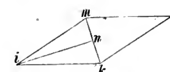
die Winkel gleich machen. Es könnte aber auch die Forderung gestellt werden, zu einem gegebenen Parallelogramme ein ähnliches und zwar über einer gegebenen geraden Linie zu konstruiren, welche größer oder kleiner ist, als die entsprechende Seite des Pgms.



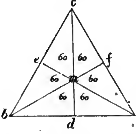
Sieht man zu, wie sich zwei ähnliche Parallelogramme hinsichtlich ihres Umfanges und Flächeninhaltes verhalten und beginnt zuerst bei den Quadraten, so möge die Seite des einen $= a$, die des andern $= b$ Längeneinheiten sein, so ist der Umfang U des einen $= 4a$ und der Umfang u des andern $= 4b$, daher $U : u = 4a : 4b$ oder $= a : b$, d. h. die Umfänge stehen in demselben Verhältnisse, wie die entsprechenden Seiten. Zu einer 1, 2, 3, . . n . . . mal so großen Seite gehört auch ein 1, 2, 3, . . . n mal so großer Umfang. Dabei ist freilich vorausgesetzt, wie überhaupt in diesem Buche, daß sich die beiden Seiten a und b mit einer gemeinschaftlichen Längeneinheit messen lassen, was in der Praxis immer möglich ist, wenn nur der Maßstab möglichst klein genommen würde; das müßte aber überhaupt wahr sein, wenn man zu dem unendlich kleinen Linienmaßstabe gelangen könnte; dieser müßte in jeder Linie irgend oft, z. B. in a μ mal und in b ν mal enthalten sein; dann wäre $a = \mu$ mal Maßeinheit und $b = \nu$ mal Maßeinheit, daher $U = 4.\mu.$Maßeinheit und $u = 4.\nu.$Maßeinheit, also $U : u = 4.\mu.$Maß $: 4.\nu.$Maß $= \mu : \nu$, also verhalten sich die Umfänge dann zu einander ebenso, wie die Verhältnißzahlen μ und ν, welche andeuten, wie oft der unendlich kleine Maßstab in ihnen enthalten ist. Aus der Betrachtung des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks erfährt man aber, weil h□ (Hypotenusenquadrat) = 2a□ oder dem doppelten Kathetenquadrat, also $h = a.\sqrt{2}$ ist, aber die $\sqrt{2}$ ein nicht vollständig, sondern nur annähernd bis zu einer gewissen Grenze zu findender Werth ist, daß es unter Umständen für zwei Linien kein gemeinschaftliches Maß geben kann. Dann bedeuten aber doch μ und ν die Annäherungswerthe. Setzen wir aber zunächst solche Linien voraus, welche sich mit der möglichst kleinen Längen-

einheit messen lassen, und faßt man das Pgm abcd und aefg bezüglich des Umfangs in das Auge, so wäre ae = $^3/_5$ ab und ef = $^3/_5$ bc U = 2ab + 2bc, u 2.$^3/_5$ ab + 2.$^3/_5$.bc, daher U : u = 2 (ab + bc) : 2.$^3/_5$ (ab + bc) oder U : u = 2 : 2.$^3/_5$ = 1 : $^3/_5$, d. h. die Umfänge verhalten sich, wie die entsprechenden Seiten, z. B. wie ab : ae oder wie 1 : $^3/_5$. Bei den Quadraten verhalten sich die Flächeninhalte, wie die Quadrate der Seiten, oder wenn das Maß in der einen a α mal, in der andern b β mal enthalten ist, so daß a = α.m und b = β.m, also das eine Quadrat = $\alpha^2.m^2$, das andere $\beta^2.m^2$; daher $\boxed{1} : \boxed{2} = \alpha^2.m^2 : \beta_2.m^2 = \alpha^2 : \beta^2$. Also: zwei Quadrate stehen in demselben Verhältnisse, wie die Quadrate der Seiten oder die Quadrate der Näherungswerthe, wie oft sie das Maß enthalten. Vergleicht man weiter das Pgm abcd mit dem Pgm aefg, so hat das erstere 25 solcher kongruenten Pgme, deren das zweite nur 9 hat. Daher Pgm. abcd : Pgm aefg = 25 : 9 oder wie $5^2 : 3^2$ oder wie 5□ : 3□, d. h. die ähnlichen Pgme verhalten sich bezüglich ihrer Flächen, wie die Quadrate der Maßzahlen, wie oft dieselben eine Maßeinheit enthalten, oder wie die Quadrate der Seiten. (Denn ab = 5m und ae = 3m, daher das Verhältniß $5^2 : 3^2$ auch = dem Verhältnisse $5^2.m : 3^2.m$ = $a^2 : b^2$ ist). Lassen sich aber ab und ae durch das Maß m nur annähernd ausmessen und bedeuten α und β die Näherungswerthe, so verhalten sich die ähnlichen Pgme, wie die Quadrate dieser Näherungswerthe = $\alpha^2 : \beta^2$. Die Dreiecke, welche man bei der rhombischen und rhomboidischen Säule als Hälften von Pgmen kennen lernt, sind a. bei der rhombischen Säule das gleichseitige, das gleichschenklige mit spitzem oder stumpfem Winkel an der Spitze. Denn ist z. B.





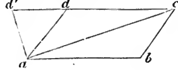
in Figur 1. nicht bloß ab = ad, sondern auch ab = bd, so hat man ein gleichseitiges Dreieck. Denkt man sich dasselbe zweimal vorhanden, so kann man es in dreimal verschiedener Weise auf einander legen, woraus man W. a = W. x = W. y erkennt. Jeder muß 60° groß sein, weil alle 3 zusammen 180° ausmachen. Denn der Rhombus hat 4 Winkel, welche zusammen 4 Rechte oder 360° groß sind. Durch das Verschieben des Quadrats wird z. B. der stumpfe W. d um soviel größer, als ein rechter W., als der spitze W. c kleiner wird, als ein rechter W. Das gleichseitige Dreieck ist also auch gleichwinklig und das gleichwinklige gleichseitig. Denn sind in dem Dreiecke abd die Winkel a = x = y und denkt man es sich doppelt vorhanden, so kann man es 3 mal zur Deckung bringen, so daß ab = bd = da wird. Die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks ist einfach, wenn man eine Seite kennt. Denn hat man die ab in die Ebene gelegt, setzt den Zirkel in a und b, öffnet bis zur Weite ab und schlägt nach oben oder unten Bögen, z. B. solche, welche sich in Punkt d schneiden und verbindet d mit a und b; oder legt man an die ab bei a und b Winkel von 60° an; oder zeichnet man sich einen Winkel a = 60°, macht die Schenkel einander gleich und verbindet wieder ihre Endpunkte, so ist das Dreieck konstruirt. Da man den Winkel des gleichseitigen Dreiecks als einen sich gleichbleibenden kennt, so hängt Alles von der Seite ab. Wenn



man in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze c eine Senkrechte auf die Grundlinie ab fällt, so entstehen dadurch zwei Dreiecke, welche die Seite ac gleich haben, den W. a = W. b = 60° und den rechten Winkel. Daraus können beide als rechtwinklige Dreiecke gezeichnet werden; die Grundlinie ist halbirt, ad = db, ebenso der W. an der Spitze acd = dcb. Vergleicht man ferner die Dreiecke aec und adc und abf mit einander, so sind dieselben ganz durch dieselben Bestandtheile bestimmt und

kongruent, also dc = ae = fb, d. h. alle drei Höhen sind gleich. Kennt man also von einem gleichseitigen Dr. die Höhe, so ist dasselbe auch bestimmt. Denn wäre cd die Höhe, machte man dieselbe in dem Punkte d einer unendlich langen Geraden senkrecht, trüge am Endpunkte c W. x = W. y = 30° an, so müßten die ca und cb in a und b die ab schneiden, so daß ab = bc = ac werden müßte. Es sind auch md = me = mf; ebenso am = mc = mb. Kennt man also eine der ersteren oder zweiten Linien, so kann man wegen der bekannten Winkel leicht das ganze Dreieck finden oder konstruiren. Auch bemerke man noch, daß in einem rechtwinkligen Dreieck adc, in welchem der eine spitze W. 30°, der andere 60° ist, die dem W. von 30° gegenüberliegende Seite ad = $\frac{1}{2}$ ac ist.

In Fig. 2 sehen wir ein stumpfwinklig-gleichschenkliges Dr. Ein jedes gleichschenklige Dr., auch das mit dem spitzen W. an der Spitze, kann man so zweimal auf einander legen, daß man sieht, wie den gleichen Schenkeln gleiche Winkel und umgekehrt den gleichen Winkeln an der Grundlinie gleiche Schenkel gegenüberliegen. Die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks ist aus wenig Bestandtheilen möglich; kennt man einen Winkel, so kennt man alle; 180° — 2 mal W. an der Grundlinie = Winkel an der Spitze; 180° — Winkel an der Spitze, getheilt durch 2 = W. an der Grundlinie. Ferner sind immer zwei Schenkel gleich; auch weiß man aus der Kongruenz der Dreiecke, welche entstehen, wenn man von der Spitze auf die Grundlinie eine Senkrechte fällt, daß diese den W. an der Spitze und die Grundlinie halbirt und daß die Senkrechte im Mittelpunkte der Grundlinie die Spitze trifft und den Winkel an der Spitze halbirt und daß die Verbindungslinie der Spitze mit dem Halbirungspunkte der Grundlinie auf der Grundlinie senkrecht steht und den Winkel an der Spitze halbirt. Kennt man also z. B. die Grundlinie und Höhe; die Grundlinie und einen Winkel; die Höhe und einen W.; den Schenkel und einen Winkel; den Schenkel und die Höhe; den Schenkel und die Grundlinie rc. so kann man das Dr. so konstruiren, daß es an Größe und Gestalt bestimmt ist.



Beim Rhomboid endlich lernt

man das ungleichseitige und ungleichwinklige Dreieck kennen. Denn ad < ab < ac. Die Seiten sind nicht gleich, also kann auch nicht dasselbe Statt finden, was bei gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecken Statt findet, daß nämlich alle drei oder wenigstens zwei W. W. gleich sind. Da W. a + W. d zwei Rechte betragen, so muß d um so stumpfer werden, je spitzer a wird; auch ac muß an Größe wachsen und es ist ac > dc > ad, d. h. der größeren Seite eines ungleichseitigen Dreiecks liegt immer auch der größere Winkel gegenüber; der größten der größte Winkel, der mittleren der mittelgroße, der kleinsten der kleinste W. gegenüber. Ein solches Dreieck kann man konstruiren, wenn man die drei Seiten kennt. Hat man ac in die Ebene gelegt, schlägt mit ad von a aus und mit cd von c aus Bögen, welche sich in d schneiden und verbindet d mit a und c, so ist das Dreieck konstruirt; ebenso, wenn man eine Seite und die beiden anliegenden Winkel oder zwei Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel; oder eine Seite, einen an- und einen gegenüberliegenden Winkel kennt, weil man dann auch den dritten, anliegenden Winkel finden kann; endlich, wenn man die Seite ad, welche an dem stumpfen Winkel d liegt, kennt und die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende größere Seite ac kennt. (ac > ad; da dem stumpfen W. gegenüberliegend, auch > dc). Der zuletzt erwähnte Fall wird später in allen seinen Einzelnheiten noch einmal erörtert werden. Hier zeichnet man den stumpfen Winkel adc, macht ad = der anliegenden Seite, setzt in a ein und schneidet ac ab. Wäre aber ca die an- und ad die gegenüberliegende Seite, und acd der Winkel, so könnte man von a aus auf der dc zwei Durchschnitte machen, bei d und d′, so daß man zwei an Gestalt und Größe verschiedene Dreiecke acd und acd′ erhielte.

Die dreieckige senkrechte Säule hat drei Ausdehnungen, wie alle Körper, eine Grundfläche, welche ein Dreieck ist, d. h. eine ebene Fläche mit 3 Seiten und 3 Winkeln, 5 Flächen, also 2 mehr, als die Grundfläche Seiten oder Winkel hat, wie bei allen Seiten, 6 Ecken, 9 Kanten, ähnlich wie bei den bisherigen Säulen. Der Grundfläche liegt ein kongruentes paralleles Dreieck gegenüber; denn die dreieckige

Säule entsteht überhaupt dadurch, daß sich ein beliebiges Dreieck senkrecht, mit sich selbst parallel, emporbewegt. Die Seitenflächen sind Oblongen, welche mit einander Flächenwinkel bilden, die entweder alle drei spitz sind, wenn das Grundflächendreieck spitzwinklig ist, oder unter denen einer recht oder stumpf ist, je nachdem das Grundflächendreieck rechtwinklig oder stumpfwinklig ist. Denn alle Dreiecke zerfallen bezüglich ihrer Winkel in spitz-, recht- und stumpfwinklige, wie schon früher angedeutet. Da alle 4 Winkel zusammen zwei Rechte oder 180° ausmachen, so müssen 2 kleiner sein, als zwei Rechte, daher entweder alle 3 Winkel spitz oder wenigstens 2 und der dritte recht oder stumpf. Flächenwinkel bei der Grundfläche sind Rechte, die Seitenkanten stehen auf der Grundfläche senkrecht. Die Seitenflächen (Oblongen) sind entweder alle drei, oder nur zwei, oder gar nicht kongruent, je nachdem alle Seiten des Dreiecks gleich sind (gleichseitiges Dreieck) oder nur zwei (gleichschenkliges) oder alle ungleich (ungleichseitiges).

Sei einmal die dreieckige Säule, um welche es sich handelt, so beschaffen, daß die drei Seiten des Grundflächendreiecks einander gleich sind z. B. 5″, beträgt die Senkrechte von einer Spitze auf die gegenüberliegende Seite $4\frac{33}{100}$ Zoll, und die Höhe der Säule 7″, so ist der Umfang des Grundflächendreiecks = 15″, also des untern und oberen 30″, ebenso der Umfang der Seitenkanten 21″, daher alle Kanten zusammen 51″. Anders würde sich die Sache gestalten, wenn die Seiten des Dreiecks 3″, 4″, 5‴ wären. Dann wären die Umfänge der beiden Dreiecke 24″; die drei Seitenkanten 21″; alle Kanten zusammen 45″. Beim gleichschenkligen Dreieck endlich 3″, 4″, 4″ betrügen die oberen und unteren Kanten 22″, die Seitenkanten 21″, alle zusammen 43″.

Zur Berechnung der Oberfläche einer dreieckigen Säule muß man vor allen Dingen die Berechnung und Ausmessung der Dreiecksfläche bewirken können. Die Fläche eines Dreiecks läßt sich aber leicht finden, wenn man berücksichtigt, daß ein jedes Dreieck als die Hälfte irgend eines Parallelogrammes angesehen werden kann, welches dieselbe Grundlinie und Höhe hat. Die Fläche des letztern ist aber = Grundlinie mal Höhe, also die Dreiecksfläche = *Grundlinie mal Höhe getheilt durch 2 auf die entsprechende Flächeneinheit bezogen.*

Die Höhe ist, wie früher, die Senkrechte zwischen den beiden Parallelen oder die Senkrechte von der Spitze eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung. Steht das rechtwinklige Dreieck auf einer Kathete, so ist die andere Kathete die Höhe; steht das stumpfwinklige Dreieck auf einer den stumpfen Winkel mit einschließenden Seite, so fällt die Senkrechte auf die zu verlängernde Grundlinie, übrigens stets in die Fläche des Dreiecks, also von jeder Spitze des spitzwinkligen Dreiecks und von der Spitze des rechten und stumpfen Winkels im recht- und stumpfwinkligen Dreieck.

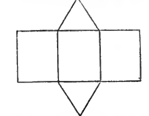
Hat die Grundfläche 3 gleiche Seiten und Winkel (gleichseitiges oder regelmäßiges Dreieck), so heißt die Säule eine senkrechte regelmäßige. Da die Seite = 5″, die dazu gehörige Höhe $= 4\frac{33}{100}$″, so beträgt die Fläche 5 mal $4\frac{33}{100} : 2 = 10\frac{825}{1000}$ □″ = 10,825 □″. Demnach beide Flächen zusammen = 21,625 □″; eine der Seitenflächen hat 5 mal 7 oder 35 □″, alle 3 also 3 mal 35 = 105 □″. Daher die ganze Oberfläche = 126,625 □″. Setzt man eine Grundlinie von 5″ und eine Höhe von 5″ voraus, wobei die Grundfläche ebensowohl gleichschenklig, als ungleichseitig sein kann, so hätte man 5 mal 5 : 2 □″ für die eine, also 25 □″ für die untere und obere Grundfläche; eine Seitenfläche betrüge dann 35 □″; die Fläche der beiden andern wäre noch von der Grundlinie abhängig. Um also die Oberfläche der dreiseitigen senkrechten Säule zu finden, müßte man 1) die Seiten der Grundfläche messen, 2) die zu einer Seite gehörige Höhe der Grundfläche, 3) endlich die Höhe der Säule und aus diesen einzelnen Elementen den Inhalt der Grund- und oberen und jeder Seitenfläche berechnen und alle einzelnen addiren.

Wie das Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms von derselben Grundlinie und Höhe ist, so kann man eine jede senkrechte dreiseitige Säule als die Hälfte einer senkrechten Säule von derselben Höhe betrachten, deren Grundfläche ein Parallelogramm von derselben Grundlinie und Höhe, also zweimal so groß ist. Die vierseitige Säule von derselben Höhe und Grundfläche ist daher zweimal so groß. Dieß läßt sich sehr leicht ein-

sehen, wenn man das die Grundfläche bildende Dreieck, welches zweimal vorhanden ist, sich zweimal senkrecht emporbewegen läßt. Dadurch entsteht eine doppelte, dreiseitige, identische Säule; beide bilden die vierseitige Säule. Daher muß die dreiseitige = der Hälfte der vierseitigen Säule sein. Aber die vierseitige Säule hat ein Parallelogramm zur Grundfläche, der Inhalt = Parallelogramm mal Höhe, daher die dreiseitige Säule = Dreieck, welches die Grundfläche bildet, mal Höhe mal entsprechende Kubikeinheit. Für die Grundlinie 5″, die Höhe des Dreiecks, welche zu dieser Seite gehört = $4\frac{33}{100}$″ und die Höhe der Säule = 7″, ist der Kubikinhalt = 5 mal $4\frac{33}{100}$ mal 7 getheilt durch 2 = $75\frac{775}{1000}$ = 75,775 k″.

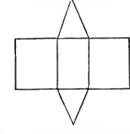
Wie früher, so läßt sich auch bei der dreieckigen senkrechten Säule bemerken, daß wenn man alle Linien an einer andern dreieckigen Säule n mal oder $\frac{1}{n}$ mal so groß werden läßt, daß dann die einzelnen Flächen und die ganzen Oberflächen n mal n oder $\frac{1}{n}$ mal $\frac{1}{n}$ mal so groß werden, während der Kubikinhalt n mal n mal n oder $\frac{1}{n}$ mal $\frac{1}{n}$ mal $\frac{1}{n}$ mal so groß wird; d. h. die Oberflächen wachsen und fallen im quadratischen, die Kubikinhalte im kubischen Verhältnisse.

1) Netz einer senkrechten gleichseitigen oder regelmäßigen Säule.

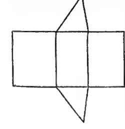




2) Netz einer senkrechten gleichschenkligen Säule.



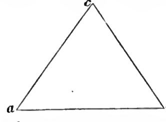
3) Netz einer senkrechten ungleichseitigen Säule.



In ähnlicher Weise ließe sich auch das Netz einer senkrechten recht- oder stumpfwinkligen Säule anfertigen, wenn man die Grundfläche recht- oder stumpfwinklig konstruirte. Bei der dreieckigen Säule tritt uns das Dreieck zum ersten Male als Grundfläche selbständig entgegen. Sammeln wir deßhalb einmal hier das,

was sich auf das Dreieck bezieht und stellen die wesentlichsten Wahrheiten über seine Eigenschaften, die Möglichkeit seiner Konstruktion, die Vergleichung nach Größe und Gestalt und bloß nach Größe, oder bloß nach Gestalt zusammen.

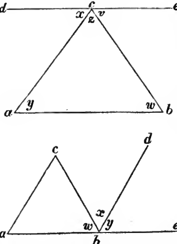
Bisher ist uns das Dreieck immer als Hälfte eines entsprechenden Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe entgegengetreten, denn jedes Parallelogramm zerfällt ja durch die Diagonale in zwei kongruente Dreiecke. Lassen wir jetzt ein Dreieck



als die einfachste, von drei geraden Linien eingeschlossene Fläche *entstehen*, so kann dieß geschehen a) wenn der Winkel bac durch die dritte Seite bc geschlossen wird oder b) wenn die ab sich mit veränderlicher Größe aus der Lage ab in die Lage ac dreht und dabei die bc beschreibt oder c) wenn die ab mit sich selbst parallel sich nach dem Punkte c hin bewegt, dabei ihre Größe abnimmt, bis die Linie endlich zu einem Punkte in c zusammenschrumpft. Die *Bestandtheile* eines solchen Dreiecks sind außer der eingeschlossenen *Fläche*, *drei Seiten* und *drei Winkel*. Den Zusammenhang und die gegenseitige Abhängigkeit dieser Größen werden wir bald kennen lernen. Daß *zwei Seiten größer sind, als die dritte* sind, also $ac + bc > ab$ oder $ab < ac + bc$ oder $ab - ac < bc$, d. h. *der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte Seite ist*, kömmt mit dem durch die Anschauung gewonnenen Satze überein, daß *die Gerade zwischen zwei Punkten die kürzeste Linie ist* oder daß eine gebrochene Linie, welche mit der Geraden die Endpunkte gemein hat, größer ist als die Gerade. Die drei Seiten, zu einer Geraden zusammengesetzt, bilden den *Umfang* und können entweder alle drei gleich sein, oder zwei sind gleich und die dritte ungleich, oder alle drei sind ungleich. Demgemäß ist das Dreieck *gleichseitig*, *gleichschenklig* oder *ungleichseitig*. Betrachtet man eine Seite als die *Grundlinie*, so heißt der gegenüberliegende Winkel die *Spitze*. Im gleichschenkligen Dreieck nennt man die gleichen Seiten *Schenkel*, die dritte

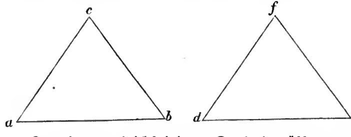
ungleiche Seite **Basis** oder **Grundlinie.** Einer jeden Seite liegt ein Winkel, **gegenüberliegender Winkel** gegenüber; einem jeden Winkel eine Seite, **Gegenseite.** Zwei Winkel können entweder an einer Seite anliegen, oder einer liegt an, der andere gegenüber; zwei Seiten können entweder einen Winkel einschließen oder die eine Seite kann an dem einen an- und dem andern gegenüberliegen.

Was die Winkel anlangt, so könnte man meinen, daß in Bezug auf ihre Größe Willkür herrsche; aber ein jedes Dreieck kann als die Hälfte eines Parallelogramms betrachtet werden; die beiden Dreiecke sind kongruent, also müssen die drei Winkel zusammen die Hälfte von vier Rechten betragen. Da aber erst alle drei W. W. 180° sind, so müssen zwei W. W. kleiner als 180° sein. Daher kann in einem jeden Dreieck immer nur ein stumpfer oder ein rechter Winkel vorkommen und man theilt die Dreiecke in **recht-**, **stumpf-** und **spitzwinklige** ein, je nachdem dieselben einen rechten und zwei spitze, oder drei spitze Winkel haben oder je nachdem der größte Winkel ein rechter, stumpfer oder spitzer ist. Daß aber alle drei Winkel eines Dreiecks zusammen 180° sind, das ergiebt sich auch anderweit.

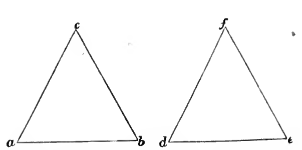


Denn legt man zu ab durch die Spitze die Parallele de, so ist W. $x =$ W. y (Wechselw.), W. $v =$ W. w (desgl.). Daher W. $x +$ W. $z +$ W. $v =$ W. $y +$ W. $w +$ W. z oder zwei Rechte $\doteq$ den drei Winkeln des Dreiecks. Dazu kömmt man auch, wenn man eine Seite des Dreiecks, z. B. die ab verlängert bis e und dadurch einen sogenannten Außenwinkel des Dreiecks abc, den Außenwinkel cbe erhält. Legt man dann die bd parallel zur ac, so findet man zunächst, daß W. $y =$ W. a, ebenso W. $x =$ W. c als Wechselwinkel ist, daß also, wenn schon der Theil des Außenwinkels einem inneren gegen-

überliegenden Winkel gleich ist, der ganze Außenwinkel größer ist, als ein innerer gegenüberliegender und daß derselbe der Summe der innern gegenüberliegenden Winkel gleich ist. Betragen nun W. w + W. x + W. y zusammen eine halbe Umdrehung oder 180°, so müssen auch die Winkel a + W. c + W. w zusammen zwei Rechte ausmachen. Es folgt von selbst daraus, daß wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, sie auch im dritten übereinstimmen müssen; daß man den dritten Winkel findet, wenn man die Summe zweier Winkel von 180° abzieht; daß man im rechtwinkligen Dreieck nur einen spitzen Winkel zu kennen braucht, um alle zu kennen; daß aus der Winkelgleichheit noch keine Folgerung bezüglich der Größengleichheit, wohl aber bezüglich der Gestaltgleichheit oder Ähnlichkeit gemacht werden kann.

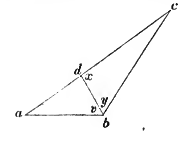


In einem gleichseitigen Dreieck müssen auch alle Winkel gleich sein; denn denkt man sich dasselbe Dreieck zweimal vorhanden, so kann man das Dr. def auf das Dr. abc so legen und zur Deckung bringen, daß de auf ab fällt, W. e auf W. b und W. d auf W. a, daher W. a = W. d und W. b = W. e. Man kann aber auch das Dr. def so auf Dr. abc legen, daß fe auf ab, W. f auf W. b, W. e auf W. a fällt — daher W. a = W. b = W. c. Sind aber alle drei W. W. einander gleich, so ist jeder = 60° oder $\frac{2}{3}$ R. Ist das Dreieck gleichschenklig, so müssen den gleichen Schenkeln gleiche Winkel gegenüberliegen, oder die Winkel an der Grundlinie sind gleich.



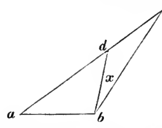
Denn ist, ähnlich wie beim gleichseitigen Dreieck, das gleichschenklige Dreieck zweimal vorhanden, so daß beide kongruent sind, so kann man die de so auf ab legen, daß d in a und e in b, W. d auf W. a, W. e auf W. b fällt, aber auch so, daß W. e auf W. a fällt und W. d auf W. b, wenn man nämlich das zweite Dr. def emporhebt und umdreht. Daher W. a = W. e; aber W. e = W. b, also W. a = W. b. Daraus folgt auch noch, daß man aus einem Winkel des gleichschenkligen Dreiecks alle finden kann. Ist der Winkel c an der Spitze gegeben, so ist $\frac{180^\circ - c}{2}$ ein Winkel an der Grundlinie; ist a der Winkel an der Grundlinie, so ist $180^\circ - 2a$ der Winkel an der Spitze. Der Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks muß selbstverständlich $< 90^\circ$ sein; ein rechter oder ein stumpfer W. kann im gleichschenkligen Dreieck nur an der Spitze liegen.

Wie steht es denn aber mit dem ungleichseitigen Dreieck? Sind also alle drei Seiten ungleich oder nur zwei, so können die gegenüberliegenden Winkel nicht gleich sein; denn in einem Dr. mit drei ungleichen oder zwei ungleichen Seiten kann nicht dasselbe Statt finden, wie im gleichseitigen und gleichschenkligen Dr. Der größeren Seite muß also auch der größere Winkel gegenüberliegen, wenn man nicht zu dem Kuriosum kommen will, das wenigstens logisch, wenn auch nicht sachlich möglich ist, daß der größern Seite der kleinere Winkel gegenüberliegen soll. Sei in dem Dreieck abc die Seite ac > bc > ab, so



muß auch Winkel $b > a > c$ sein. Denn macht man $cd = bd$, so ist W. $x =$ W. y; aber W. x als Außenwinkel $> a$, also auch y, und um so mehr $y + v$ oder b. Damit ist nun zwar gesagt, daß der größten Seite im Dr. auch der größte Winkel gegenüberliegt, aber nicht daß der Winkel in demselben Verhältnisse größer ist, in welchem die Seite größer ist; der zweimal so großen Seite liegt überhaupt ein größerer, aber nicht ein zweimal so großer Winkel gegenüber.

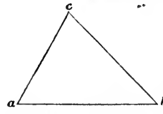
Man kann aber auch umgekehrt behaupten a) daß ein gleichwinkliges Dreieck auch ein gleichseitiges sei; b) daß die Seiten, welche zwei gleichen Winkeln gegenüberliegen, auch gleich sein müssen; aber c) daß den ungleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüberliegen. Die beiden Sätze a und b kann man an den frühern Figg. für das gleichseitige und gleichschenklige Dr. nachweisen. Ich denke mir wieder dasselbe oder ein kongruentes Dr. def vorhanden. Für den ersten Fall legt man W. e auf b, dann W. f auf W. b, endlich W. d auf W. b und bringt die Dr. Dr. zur Deckung, wobei $ab = de = fe = fd$ oder was dasselbe ist $ab = bc = ac$ wird. Für den zweiten Fall legt man W. e auf W. b, dann W. e auf W. a, wodurch aus der Gleichheit der Winkel a und b, Seite $ac = df = fe$ oder S. $ac =$ S. bc sich ergiebt. Setzt man für den dritten Fall W. $b >$ W. c und trägt W. c von W. b ab, so daß W. $x =$ W. c wird, so muß das Dr. bdc gleichschenklig sein, also $bd = dc$; aber $ad + db > ab$, also auch $ad + dc > ab$ oder $ac > ab$.



Handelt es sich um die Konstruktion des Dreiecks, der elementarsten geradlinigen Figur, aus welcher alle mehr als dreiseitigen geradlinigen Figuren sich bilden lassen, so ist leicht zu begreifen, daß aus allen Bestandtheilen und der bekannten Anordnung derselben das Dreieck derselben bei dem dazu gehörigen technischen Geschick sich zeichnen lassen muß. Nicht immer ist man in der glücklichen Lage, von einem Dreiecke alle Bestandtheile mit ihrer Anordnung zu kennen. Es fragt sich also, ob man nicht aus weniger Bestandtheilen

dasselbe zeichnen kann. Diese Bestandtheile müßten so beschaffen sein, daß von ihrer Bekanntschaft zugleich die Bekanntschaft der übrigen abhinge, also unter sich abhängige Größen. Winkel aber und wenn ich zwei, also auch alle drei wüßte, sind aber nicht solche Größen, denn ich kann mir mit gleichen Winkeln unendlich viele Dreiecke vorstellen, welche zwar alle an Gestalt, aber nicht an Größe gleich wären; haben vollends zwei Dreiecke nur einen Winkel gemein, so folgt daraus in Bezug auf die Größe der Seiten und der Fläche noch gar Nichts. Man darf also nicht versäumen, unter den Bestandtheilen des Dreiecks **wenigstens allemal eine Seite** zu messen und zur Konstruktion des Dreiecks zu verwenden.

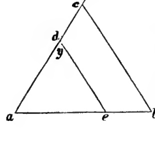
1. Konstruktion des Dreiecks aus einer Seite und den beiden an derselben anliegenden Winkeln.

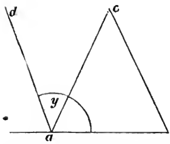


Legt man die gemessene ab in die Ebene, trägt rechts den W. b und links den W. a an, so wird dadurch die Lage der beiden Seiten bc und ac bestimmt, also auch der Durchschnittspunkt c; schneiden müssen sich aber die ac und bc, weil die beiden Winkel a und b zusammen $< 90^{\circ}$ vorausgesetzt sind.

2. Aus einer Seite, einem links an- und dem gegenüberliegenden Winkel.

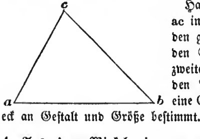
Man legt die ab in die Ebene, trägt den W. a links an, wodurch die ax der Lage nach bestimmt wird. Den gegenüberliegenden W. y trägt man irgendwo in der ax an; geht de nicht durch den P. b, so legt man durch b eine Parallele zu de. Man hätte aber auch W. a + W. y von 180° abziehen und den W. b suchen und bei b antragen können; so daß diese Konstruktionsart auf die erste zurückgeführt wird. Man konnte aber





auch den W. y an a antragen, und durch b zu der Linie ad, deren Richtung man kennen gelernt hat, die Parallele bc legen. Dann muß W. y = W. c als Wechselw. sein. Die rechte Anordnung der gleichen Bestandtheile ist nicht zu übersehen, denn dieselben, aber anders angeordneten Bestandtheile geben unter Umständen eine an Gestalt und Fläche ganz verschiedene Figur.

3. Aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.



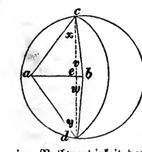
Hat man sich die eine Seite ac in die Ebene gelegt, trägt dann den gegebenen Winkel c an, macht den Schenkel cb so groß, wie die zweite Seite, so ist dann zwischen den Punkten a und b nur noch eine Gerade möglich und das Dreieck an Gestalt und Größe bestimmt.

4. Aus einem Winkel, einer an- und einer gegenüberliegenden Seite.

Dieser Fall bedarf einer umständlichern Betrachtung. Ist ac die anliegende Seite, W. a der gegebene Winkel, so muß die gegenüberliegende Seite wenigstens der Senkrechten gleich sein, welche von c aus auf die noch unendlich lang zu denkende ax gefällt werden kann. Diese Senkrechte cb ist überhaupt die kürzeste Linie, denn ac > cb, weil abc = R ist. Mit einer Linie < bc kann man also das Dr. gar nicht zeichnen. Wird aber die gegenüberliegende Seite bc > als das Perpendikel bc, aber noch kleiner, als ac, so kann man rechts und links vom Perpendikel die $c\beta$ oder $c\beta'$ schlagen; dann entsprechen Dr. $a\beta c$ und Dr. $a\beta' c$ den Anforderungen, weil sie ac, W. a und $c\beta$ oder

$c\beta'$ enthalten; beide Dr. Dr. sind aber an Größe und Gestalt verschieden und man weiß nicht, welches von beiden man nehmen soll. Daher der unbestimmte Fall. Läßt man aber die gegenüberliegende Seite der anliegenden gleich werden, dann entspricht das Dr. acb' der Forderung; dann ist W. a = W. b', also muß $a < 90^\circ$ sein. Endlich kann die gegenüberliegende Seite > ac sein, z. B. = cb oder cb'; dann läßt sich rechts und links vom Perpendikel die ax durchschneiden; das Dr. acb entspricht der Forderung, cab' darum nicht, weil zwar die beiden Seiten cb' und ca, aber anstatt des Winkels $ca\beta$ der Nebenwinkel cab' vorhanden ist, welche nur gleich sind, wenn dieselben rechte sind.

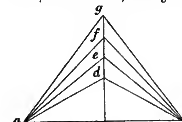
5. Aus allen drei Seiten, so daß zwei S. S. immer größer sind, als die dritte.



Ist ab die eine Seite und schlägt man mit der zweiten bc von b aus einen Kreis, ebenso vom Punkte a aus mit der ac = ad, so schneiden sich die beiden Seiten ac und bc einmal über ab in c, das andere Mal unterhalb im Punkte d. Die beiden Dreiecke abc und abd sind aber kongruent. Dreht man das Dr. abc um ab, bis c in d fällt, was sich als eine Nothwendigkeit darstellt, sobald man d mit c verbindet und dadurch das gleichschenklige Dr. mit der Grundlinie dc erhält, welche in e halbirt ist; denn W. x = W. y und W. v = W. w, also auch W. c = W. d, also Kongruenz der Dreiecke abc und abd aus 2 S. S. und dem eingeschlossenen Winkel, also auch Dr. aec kongruent (≌) mit Dr. aed, weil auch W. cae = W. dae; also auch S. ce = S. ed, die Grundlinie cd halbirt, ebenso der Winkel a, ae ist senkrecht ꝛc. Dreht man Dr. aec um ae, so muß c in d, ebenso nochmals c in d fallen, wenn man Dr. ebc um eb dreht; es fällt dann auch Dr. abc auf Dr. abd.

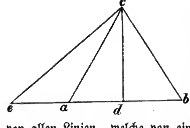
Bei dieser Gelegenheit möge weiter bemerkt sein, daß also immer drei Bestandtheile des Dr. bekannt sein müssen, wenn es konstruirt werden soll, unter denen eine Seite sein muß. Gelten aber auch die obigen fünf Konstruktionsfälle als die wichtigsten

oder Kardinalkonstruktionen, so sind doch noch sehr viele andere Fälle möglich, in denen sich die Konstruktion einfacher gestaltet und unter einen der 5 Fälle unterordnen läßt. Darüber sollen einige Aufgaben fernere Andeutungen geben. Solche Fälle finden dann Statt, wenn man das Dr. als gleichseitig, gleichschenklig, rechtwinklig, gleichschenklig-rechtwinklig rc. voraussetzt, so daß durch eine solche Voraussetzung vom Dreieck Etwas ausgesagt und vorherbestimmt wird, was weniger Bestandtheile zu fordern erlaubt. So hat man im rechtwinkligen Dr. den rechten W. zum Voraus rc.

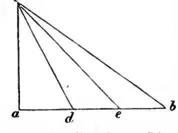


Über einer und derselben Grundlinie ab kann man unzählig viele gleichschenklige Dreiecke beschreiben. Die Spitzen derselben liegen alle in der Senkrechten cd, welche im Mittelpunkte c der Grundlinie ab errichtet worden ist. Durch diese im Mittelp. c errichtete Senkrechte cd erhält man zwei kongruente Dreiecke; daher muß auch der Winkel an der Spitze durch dieselbe halbirt werden. Umgekehrt trifft die Senkrechte aus der Spitze eines gleichschenkligen Dr. die Grundlinie im Mittelpunkte und halbirt den Winkel an der Spitze, wie sich dieß wieder aus der Kongruenz der entstandenen beiden Dreiecke acd und bcd ergiebt. Man erhält auf solche Weise ein neues Mittel, eine Gerade und einen Winkel zu halbiren, wenn man die Gerade zur Grundlinie, den Winkel zum Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dr. macht und entweder von der Spitze eine Senkrechte fällt oder in der Mitte der Grundlinie eine Senkrechte errichtet; wie man aber in c eine Senkrechte errichtet, indem man ca = cb macht, von a und b aus mit derselben Zirkelöffnung Bogen schlägt, P. d findet und mit c verbindet; oder wie man von d nach ab eine Senkrechte fällt, indem man von d aus mit dem Zirkel die ab abschneidet, halbirt und den Halbirungspunkt mit d verbindet, das ergiebt sich bei aufmerksamer Betrachtung der Figur und der kongruenten Dreiecke acd und bcd von selbst.

Fällt man von einem P. c außerhalb einer Geraden eine Senkrechte cd, so ist dieselbe die kürzeste unter allen von c aus nach der Geraden möglichen Linien. Denn

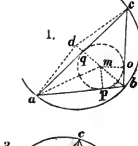


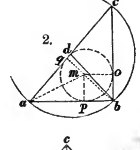
ca > cd, weil W. adc = R und ce > ca, weil W. cac ein stumpfer ist. Die beiden Geraden ac und bc, welche gleichweit, um die Stücken ad und bd vom Fußpunkte der Senkrechten abstehen, haben gleiche Größe. Ist umgekehrt von allen Linien, welche von einer Geraden nach einem Punkte c außerhalb derselben gezogen werden können, eine, die ac die kürzeste, so muß dieselbe senkrecht sein. Denn wäre sie es nicht, so könnte es eine andere sein, z. B. cd, dann hätte man, weil W. cda = R werden müßte, ca > cd, was nicht möglich ist, da ca kleiner vorausgesetzt ist. Auch ist deutlich, daß wenn man von einem P. c des den schiefen Nebenwinkeln adc und edc gemeinschaftlichen Schenkels cd eine Senkrechte auf die ab fällt, dieselbe nothwendig in die Fläche des spitzen Nebenwinkels fallen muß. Denn fiele dieselbe, wie ce, in die Fläche des stumpfen Nebenwinkels, so müßte W. ced = R sein, was unmöglich ist, da schon cde ein stumpfer Winkel ist und in einem Dr. nicht ein rechter und ein stumpfer Winkel zugleich vorkommen kann.

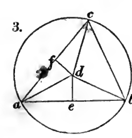


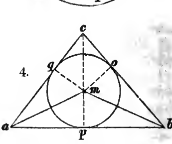
Die Eigenschaften, welche allen Dreiecken gemein sind, wurden oben bereits berührt. Setzt man voraus, daß man ein Dreieck dadurch bilde, daß von einem Punkte in der Ebene 3 gleich große Strahlen unter verschiedenen Winkeln auslaufen, deren Endpunkte man mit einander verbindet, so kömmt man noch zu dem Satze, daß es im Dreieck einen Punkt giebt, welcher a) von den Ecken und b) von den Seiten gleichweit entfernt ist (centrisch nach Ecken und Seiten), so daß man in und um das Dr. einen Kreis beschreiben kann. Beim gleichseitigen Dr. fallen diese Punkte in einen zusammen, bei den übrigen Dreiecken nicht.

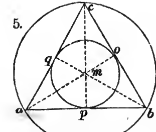
Dieß möge noch näher veranschaulicht werden.











In Fig. 1. ist ein stumpfwinkliges Dr. gegeben; der P. d ist von a, b, c gleichweit entfernt, also läßt sich von d als Mittelpunkt ein Kreis durch diese 3 Punkte legen; da dieselben nicht in gerader Linie liegen, so können dieselben als die Spitzen eines Dreiecks betrachtet werden; dabei ist W. abc als ein stumpfer angenommen. Der nach den Ecken centrische Punkt fällt außerhalb des Dreiecks. In dem rechtwinkligen Dr. fällt dieser Punkt in die Mitte der Hypotenuse (Fig. 2.); im spitzwinkligen (Fig. 3.) in die Fläche. Der nach den Seiten centrische oder von denselben gleichweit entfernte P., (mo = mp = mq = Apostema oder Seitenhalbmesser) ist leicht zu finden, denn soll mo = mp = mq sein, so muß Dr. amq ≌ Dr. amp und Dr. bmp ≌ Dr. bmo sein, was zur Gleichheit der W. W. maq und map, sowie mbp und mbo führt; also müssen die Winkel a und b halbirt werden. Verbindet man noch m mit c, so wird auch der dritte Winkel durch diese Verbindungslinie halbirt. Den nach den

Ecken centrischen P. findet man, wenn man in den Halbirungspunkten zweier Seiten Senkrechte errichtet und bis zum Durchschnittspunkte verlängert. Denn ist in Fig. 3. dc. = da = db, so ist adb, adc ein gleichschenkliges Dr.; fällt man von d eine Senkrechte, so trifft diese den Mittelpunkt der Grundlinie ab und ac. In Fig. 4. ist der Punkt, welcher nach den Seiten centrisch ist, für das spitzwinklige Dr. gesucht, indem die W. W. a und b halbirt und die Halbirungslinien bis zum Durchschnitt verlängert worden sind. In Fig. 5. ist am gleichseitigen Dr. gezeigt, wie der nach Ecken und Seiten centrische Punkt in einen Punkt zusammenfallen.

Wie bei allen Raumgrößen, so kann man auch bei zwei oder mehreren Dreiecken und ihrer Vergleichung Größe und Gestalt in's Auge fassen. Man kann dann bei der Vergleichung zweier Dreiecke Größe und Gestalt zugleich in's Auge fassen und die Frage darauf richten, unter welchen Bedingungen zwei Dreiecke kongruent sind, da über die Existenz zweier kongruenten Dreiecke, wenigstens in der Gedankenwelt kein Zweifel sein kann. Allein diese Frage läuft ganz einfach auf jene hinaus „aus welchen Bestandtheilen man ein Dreieck so konstruiren kann, daß es an Größe und Gestalt bestimmt ist und daß jede Wiederholung desselben ein dem früheren kongruentes Dreick darstellt". Diese Frage ist bereits in ihren Hauptgrundzügen für das Dr. im Allgemeinen erörtert und lassen sich alle Fälle für besondere Arten von Dreiecken unter jene allgemeinen Hauptfälle unterordnen. Wir haben also hier nur noch die Aufgabe „zwei Dreiecke nur bezüglich ihrer Größe oder nur bezüglich ihrer Gestalt zu vergleichen".

Es ist bereits aus früheren Betrachtungen klar, daß ein jedes Dreieck als die Hälfte eines Parallelogramme von derselben Grundlinie und Höhe betrachtet werden kann. Aus irgendwelchen 2 kongruenten Dreiecken kann man stets ein Pgm zusammensetzen. Daher muß ein Dreieck auch seinem Flächeninhalte nach sein „Grundlinie mal Höhe mal Flächenmaßeinheit getheilt durch 2; oder $\frac{G.H}{2}$, wenn G = Grundlinie und H Höhe ist, oder $\frac{G}{2}$.H oder G.$\frac{H}{2}$. Hat man zwei Dreiecke, sind ihre Grundlinien und Höhen gleich,

weßhalb dieselben aber noch nicht an Gestalt gleich zu sein brauchen, so sind ihre Flächen gleich, aber sie sind nicht kongruent. Haben zwei Dreiecke zwar gleiche Grundlinien, aber ungleiche Höhen, so hat das Dr. den größern Flächeninhalt, welches die größere Höhe hat; zur 2, 3 . . . n mal so großen Höhe gehört auch dann die n mal so große Fläche. Nennt man die Dreiecke

$\triangle_1$ und $\triangle_2$, welche die Grundlinie G haben, aber die Höhe h und H, so hat man

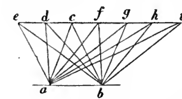
$\triangle_1 : \triangle_2 = \frac{G.h}{2} = \frac{G.H}{2}$ oder $= h : H$, d. h. bei gleichen Grundlinien verhalten sich zwei Dreiecke, wie ihre Höhen.

Setzt man

$\triangle_1 : \triangle_2 = \frac{g.h}{2} : \frac{G.h}{2} = g : G$, so hat man den Satz: Bei gleichen Höhen verhalten sich zwei Dreiecke, wie ihre Grundlinien.

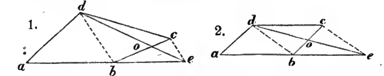
Sind endlich Grundlinie und Höhe verschieden, so hat man

$\triangle_1 : \triangle_2 = \frac{g.h}{2} : \frac{G.H}{2} = g.h : G.H$, d. h.: Zwei Dreiecke von verschiedener Grundlinie und Höhe verhalten sich, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe.

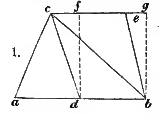


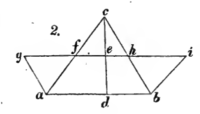
Die Dreiecke abc, abd, abe rc stehen auf derselben Grundlinie ab und liegen mit ihren Spitzen in der ei, welche zur ab parallel ist; dadurch ist die Höhe aller Dreiecke dieselbe, weil alle Perpendikel zwischen der ei und der nach beiden Seiten zu verlängernden ab an Größe einander gleich sind. Es läßt sich aber auch umgekehrt behaupten, daß, wenn 2 Dreiecke gleiche Grundlinie und Fläche haben, dieselben gleiche Höhe haben müssen oder daß die Gerade, welche die Spitzen verbindet, zur Grundlinie parallel ist. Darauf, daß

sowohl Parallelogramme, als Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich sind, gründet sich die Verwandlung der Figuren. Die beiden wesentlichen, hierher gehörigen Aufgaben sind: 1) ein Viereck in ein Dreieck, 2) ein Dreieck in ein Viereck, in ein Parallelogramm, eventuell in ein rechtwinkliges zu verwandeln. Dabei sind zunächst nur solche Vierecke vorausgesetzt, deren Winkel kleiner sind, als 2 R, obgleich auch für andre das Verfahren noch gilt.

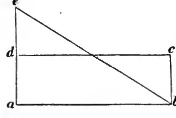


Soll in Fig. 1. das Viereck abcd in ein flächengleiches Dreieck verwandelt werden, so verbinde man d mit b durch die Gerade db, lege durch c die Parallele ce zu db, verlängere ab bis zum Durchschnitte e, ziehe de, so ist Dr. ade flächengleich mit Viereck abcd. Denn das Stück doc, welches vom Viereck verloren gegangen ist, wird durch das flächengleiche boe ersetzt. Denn Dr. dbc = Dr. deb (gleiche Grundlinie und Höhe); nimmt man beiden das gleiche Stück dob hinweg, so bleibt Dr. doc = Dr. boe. Dasselbe findet in Fig. 2. in Bezug auf das Pgm abcd Statt; durch die analoge Konstruktion ist auch dbec ein dem ersten flächengleiches Pgm und das Dr. ade, welches dem Pgm abcd flächengleich ist, hat bei derselben Höhe mit dem Parallelogramme die doppelte Grundlinie, denn be = dc = ab, also ae = 2ab. Dadurch ist zugleich die Hindeutung gegeben, wie die zweite Aufgabe gelöst werden kann. Ein Dreieck wird nämlich in ein Pgm verwandelt, wenn man bei gleicher Grundlinie die halbe Höhe oder bei gleicher Höhe die halbe Grundlinie nimmt.

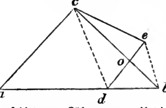




Das Dr. abc auf der vorigen Seite ist zuerst in ein Pgm verwandelt; denn ab ist in d halbirt, cg || ab, be || cd, also dbec ein Pgm. Die Hälfte oder Dr. bec ≅ Dr. bcd und Dr. bcd = Dr. adc, weil ad = db und die Höhe gemein ist, da beide mit der Spitze c in der Parallele cg zu ab liegen. Also Pgm dbec = 2 Dr. dbc = Dr. dbc + Dr. adc = Dr. abc. Da Pgm. dbec nicht rechtwinklig war, mußte df und bg senkrecht gezogen werden; dann ist das schiefwinklige Pgm dbec, welches flächengleich ist mit Dr. abc, auch flächengleich mit dem rechtwinkligen Pgm dbgf, welches demnach ein Oblongum ist oder ein Quadrat, wenn db = df ist. Man kann also ein jedes Viereck in ein Dreieck verwandeln — oder in einer auch mehr- als 4seitigen Figur eine Ecke wegschaffen, also aus dem Fünfeck ein Viereck, aus dem Viereck ein Dreieck, aus diesem ein schief- und rechtwinkliges Pgm machen. Also: **Eine geradlinige Figur läßt sich in ein Oblongum verwandeln; das Oblongum aber in ein Quadrat; also kann ich stets ein Quadrat konstruiren, welches einer gegebenen geradlinigen Figur an Fläche gleich ist.**

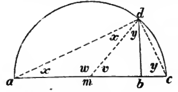


Das Dr. abc (Fig. 2.) kann aber auch seine Grundlinie behalten, ab und man kann dem Pgme die halbe Höhe de geben; demnach ist Pgm abhg = Pgm. afib = Dr. abc. Es lassen sich noch unendlich viele Pgme denken, welche die Forderung erfüllen, nur müssen sie die ab beibehalten und die gegenüberliegende Seite muß in der gi liegen, der Parallele zu ab durch den Halbirungspunkt e der Höhe dc.



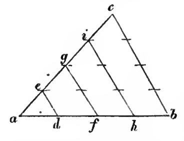
In Fig. 3. endlich ist das Dr. abc in das Viereck adec verwandelt; der Punkt d ist willkührlich angenommen; der Punkt e muß in der be liegen, welche zur dc parallel ist. Es giebt eine unendliche Anzahl verschiedener Lösungen, weil die Lage des P. d und e unendlich verschieden sein kann. Wäre abcd das Oblongum, welches mit

einem Dreiecke, z. B. abc flächengleich wäre, das selbst irgend einer geradlinigen Figur an Größe gleich wäre, so müßte nun das Oblongum abcd in ein Quadrat verwandelt werden, wie dieß früher bei den Pgmen gezeigt worden ist. ab ist die lange, bc die kurze Seite des Oblongums; ab + bc ist in m halbirt, und in b eine Senkrechte bd errichtet, mit am = mc = md ein Kreis geschlagen, d mit a und c verbunden, so muß bei d ein rechter Winkel entstanden sein; denn v = 2x und w = 2y, aber v + w = 2x + 2y = 2 mal W. d; aber v + w = 2 R; also 2 R = 2d und R = d. Also ist db die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, deren Quadrat = dem Oblongum ist, was mit ab und bc gemacht werden kann, wenn diese Linien unter rechtem Winkel an einandergesetzt und das Oblongum vollendet wird. Es kann also jede geradlinige Figur in ein Quadrat verwandelt werden; hat man aber mehrere geradlinige Figuren in betreffende Quadrate verwandelt, so kann man dieselben nach dem Früheren summiren oder in ein einziges Quadrat verwandeln.



Bewegt sich die ab (in irgendwelcher Zeit und Geschwindigkeit) um den Winkel bac aus der Lage ab in die Lage ac, so daß dieselbe dabei nach einem bestimmten Gesetze ihre Größe verändert und die Gerade bc beschreibt und denkt man sich dieselbe Operation in derselben Weise n mal wiederholt, so erhält man n kongruente Dreiecke, welche ganz nach demselben oder nach einem identischen Bildungsgesetze entstanden sind. Läßt man aber die ad, welche $\frac{2}{3}$ von ab, oder die af, welche $\frac{1}{3}$ von ab ist, in derselben Zeit und Geschwindigkeit und nach demselben Gesetze der Abnahme sich um den W. bac aus der Lage ab in die Lage ac, bezüglich ad und ae oder af und ag drehen, so daß in jedem Augenblicke die ad von ab zwei Drittheile und af von ab ein Drittheil beträgt, dabei auch gf || de || bc ist und fg = $\frac{1}{3}$ bc und de = $\frac{2}{3}$ bc,

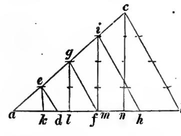
so erhält man Dreiecke ade und afg, welche nach einem ähnlichen Bildungsgesetze mit dem Dr. abc entstanden sind. Solche Dreiecke, wie afg und ade und abc heißen **ähnlich**. **Sie sind winkelgleich und die Seiten des einen, welche mit den Seiten des andern dieselben Winkel einschließen oder denselben Winkeln gegenüberliegen, stehen in demselben Verhältnisse.** Ist af = ⅓ ab, so ist auch ag = ⅓ ac und fg = ⅓ bc; ist ad = ⅔ ab, so ist auch ae = ⅔ ac und de = ⅔ bc; ebenso ist ad : db = ae : ec 2c.



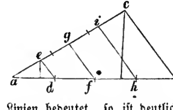
Um ähnliche Dreiecke zu zeichnen, braucht man also nur für **Winkel- und Seitenverhältnißgleichheit** zu sorgen. Es ist aber nicht gerade nöthig, alle die Möglichkeiten der Konstruktion ähnlicher Dreiecke zu ermitteln. Mißt man von irgend einem Dr. hinreichende und hinreichend viele Bestandtheile, macht die Winkel gleich, die Seiten aber entweder $\frac{1}{n}$ oder n mal so groß, als die in Natur gemessenen, so erhält man ähnliche Dreiecke. Ist ab die Seite in der Natur und ad die Seite, welche auf dem Reißbrete entsprechen soll, so muß de || bc gemacht werden, dieß geschieht, wenn W. ade = W. abc gemacht wird. Die Weimarischen Geometer bezeichnen 2000‴ par. oder 1000‴ par. durch eine Linie auf dem Reißbrete; denkt man sich also ähnliche Dreiecke zu denen in der Natur auf dem Reißbrete, so sind die Seiten der verjüngten Dreiecke ebenso viele Linien, als in der Natur Ruthen. Es kommt also nur darauf an, **in verjüngtem Maßstabe bei gleichen Winkeln verhältnißmäßige Linien aufzutragen.**

Anm. Es würde zu umständlich sein, die einzelnen bekannten Ähnlichkeitssätze zu entwickeln. Unter Umständen kann aber der Lehrer eine Hindeutung geben, daß Dr. Dr. ähnlich sind a) bei Winkelgleichheit, b) bei Seitenverhältnißgleichheit, c) bei einer Kombination aus a und b; Gleichheit eines Winkels und Seitenverhältnißgleichheit der einschließenden Seiten; Gleichheit eines W. und Seitenverhältnißgleichheit der den W. nicht einschließenden Seiten, wenn die gegebenen Bestandtheile zur Konstruktion des Dr. überhaupt genügen. Bei gleichseitigen, gleichschenkligen, rechtwinkligen,

gleichschenklig=rechtwinkligen Dreiecken ist die Ähnlichkeit leichter bedingt; alle gleichseitigen Dr. Dr. sind ähnlich; ebenso alle gleichschenklig=rechtw.; die gleichschenkligen und die rechtw., wenn sie bezüglich einen Winkel gleich haben. —



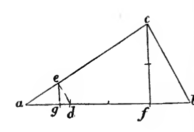
Hat man ein Dr. abc in der Natur und zeichnet ähnliche zu demselben, so daß ah = $^3/_4$ ab = $\frac{m}{n}$ ab ist 2c., so müssen auch andere entsprechende Linien, wie z. B. die Höhen in demselben Verhältnisse stehen. So muß im = $^3/_4$ cn; gl = $^2/_4$ cn = $^1/_2$ cn und ek = $^1/_4$ cn sein. Ebendasselbe fände bei allen andern entsprechend, analog oder ähnlich gezogenen Linien Statt.



Vergleicht man zwei ähnliche Dreiecke mit einander, hat ab soviel Ruthen in der Natur (4), als ad Linien auf dem Reißbrete, ist ferner ac = 3 Ruthen, ae = 3 Linien und bc ebenfalls m Ruthen, während de m Linien bedeutet, so ist deutlich, daß ab + ac + bc oder der Umfang in der Natur in Ruthen ebenso groß ist, nämlich (4 + 3 + m) Ruthen, während der Umfang des Dr. ade = (4 + 3 + m). Linien ist — also stehen die Umfänge ähnlicher Dreiecke in demselben Verhältnisse, wie die entsprechenden Seiten. Denn:

U : u = (4 + 3 + m). Ruthen: (4 + 3 + m). Linien
= Ruthen : Linien
= 2000 : 1 oder
= 1000 : 1,

je nachdem die ganze Ruthe zu 2000‴ par. als eine Linie oder die halbe Ruthe zu 1000‴ par. als eine Linie angenommen ist. Aber wie 2000 : 1 oder wie 1000 : 1 verhalten sich auch der



Zeichnung gemäß die Linien ab und ad; ebenso ac und ae; ebenso de und bc.

Die beiden Dreiecke abc und ade sind einander ähnlich; ab sei $= 4^0$; ad $= 4'''$; fc $=$ 2^0; so ist ge $= 2'''$; der Inhalt des großen Dreiecks ist $\frac{4.2}{2}\square^0$, der Inhalt des kleineren ähnlichen $= \frac{4.2}{2}\square'''$.

Also $I : i = 1\,\square^0 : 1\,\square'''$ oder
wie $4000000\,\square''' : 1\,\square'''$ oder
wie $1000000\,\square''' : 1\,\square'''$,

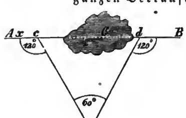
je nachdem die Ruthe zu 2000 oder 1000''' par. angenommen wird. Ebenso verhalten sich aber auch die Quadrate der entsprechenden Seiten. Also: die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten.

Ist also der Umfang eines Dreiecks 30'', eine Seite 5'', die entsprechende im ähnlichen Dreiecke 10'', so ist der Umfang des zweiten 2.30'', weil 5 in 10 2 mal enthalten ist; aber der Inhalt des zweiten 4 mal so groß, weil 5 in 10 2 mal enthalten ist und das Quadrat der $2 = 4$ ist.

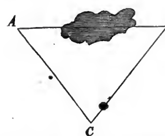
Mit dem bisherigen Material ist es nun möglich, Linien, welche entweder gar nicht oder theilweise nur zugänglich sind, zu messen. Man betrachtet dieselben dann als Seiten von Dreiecken und konstruirt nach bestimmtem Verhältnisse ähnliche Dreiecke, dessen Seiten von den gegebenen im ursprünglichen Dreiecke verhältnißmäßige Theile darstellen, z. B. soviel pariser Linien, als in der Natur ganze oder halbe Ruthen à 2000''' par. oder soviel Linien, als in der Natur Meilen, was lediglich vom Verjüngungsverhältnisse abhängt.

1. Aufgabe.

Die Länge einer geraden Linie auszumessen, welche zwar an den Endpunkten, aber nicht in ihrem ganzen Verlaufe zugänglich ist.



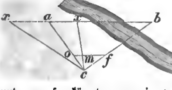
Sollte die AB gemessen werden, welche vielleicht durch einen Teich unterbrochen wäre, so könnte man bei c einen Winkel von 120° anbringen, indem man den Halbm. cx auf den Bogen 2 mal abträgt; dann hätte man die Richtung ce; machte man bei e den W. = 60°, ed = ec und W. bei d = 120°, so muß dB mit dc und Ac in gerader Linie liegen und dc selbst muß = ce oder de sein, weil W. edc = dce = ced = 60° ist. Dann ist AB = Ac + ce + dB.



Man könnte aber auch, um die AB zu messen, welche nicht ganz zugänglich ist, den Meßtisch bei C aufstellen, den W. C messen, ebenso die CA und CB. Konstruirte man dann ein ähnliches Dr., so daß CA ebensoviele Linien hätte, als in der Natur Ruthen, ebenso CB, so würde auch die AB auf dem Reißbrete ebenso viele Linien haben, als in der Natur Ruthen.

2. Aufgabe.

Eine nur an einem Punkte zugängliche Gerade zu messen.

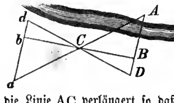


a) Stellt man den Meßtisch in c auf, bezeichnet außer a in der Richtung ab einen Punkt rechts oder links, nämlich x, mißt man den W. acx, ebenso den Winkel xcb, dann die ac und cx, so könnte man in verjüngtem Maßstabe ein Dr. acx zeichnen, den W. xcb antragen und dadurch auf dem Reißbrete

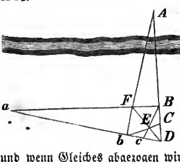
den Durchschnitt der Linien ax und ihrer Verlängerung und der Linie cb finden — die ab hätte dann so viele Linien, als in der Natur Ruthen.

b) Hat man aber einmal ca, cx und die beiden Winkel gemessen, so könnte man co = $\frac{1}{3}$ ca, ebenso cm = $\frac{1}{3}$ cx nehmen, die om ziehen, welche || ab wäre, bis f verlängern, so daß c, f und b in derselben Richtung lägen, so wäre of der dritte Theil der ab in wirklicher, natürlicher Größe. Prakt. Taschenbuch von Dr. Brauns. Braunschw., Schulb. 1858. S. 70.

c) Man könnte aber auch noch anders verfahren.



Denn soll die BA gemessen werden, so könnte man die AB bis D verlängern, dann DC ziehen und Cd ebenso groß machen, dann BC und Cb ebenso groß machen. Denkt man sich die Linie AC verlängert so daß Ca = CA wird, so müssen auch die 3 Punkte a, b, d in einer Geraden liegen. Dr. aCb ≅ ACB und ab = AB.



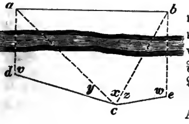
Oder man verlängere die AB, wenn A unzugänglich ist beliebig, mache BC = CD, ziehe Da unter beliebigem Winkel, mache Dc = DC und Bc = Cb, ziehe durch E die DF, welche die Richtung Ba in F schneidet, so muß Dr. DBa ≅ Dr. DAb sein, Da = DA und wenn Gleiches abgezogen wird, Db = DB, auch ab = AB.

Verlängert man, wenn C unzugänglich ist, die CB, beliebig bis A, macht DB senkrecht, verbindet D mit C, macht DA senkrecht (⊥) zu DC, so ist DB die Senkrechte aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse; daher die beiden Dr. Dr. ADB und BDC unter

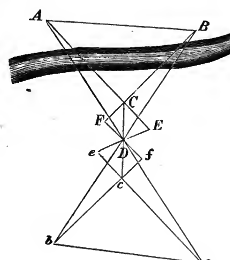
sich und mit dem ganzen Dr. winkelgleich und ähnlich, also $AB : DB = DB : BC$ oder $DB^2 = AB . BC$.
Mißt man nun $DB = 50°$ und $AB = 3°$, so ist $\frac{2500 \square°}{3°} = BC = 833\frac{1}{3}°$.

3. Aufgabe.

Eine Gerade zu messen, welche zwischen zwei unzugänglichen Punkten sich befindet.



Stellt man sich bei c auf, mißt cd, ce, W. v und W. y und W. x und W. z und W. w und zeichnet die verjüngte Figur, so erfährt man ab in Linien anstatt in Ruthen.

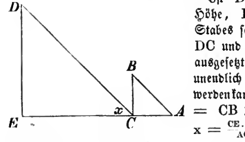


Von C aus kann man nach A und B visiren; man stecke Cc beliebig ab, halbire diese Gerade in D, nehme in der Verlängerung von AC einen Punkt E an, ziehe Ee, mache De = DE, nehme in der Verlängerung von BC einen Punkt F an, ziehe Ff und mache Df = DF. Verlängert man nun AD über D und ec über c hinaus, bis sich die verlängerte ec und Da in a treffen, ferner BD über D und fc über c hinaus, bis sich dieselben in b treffen, so ist ab = AB.

4. Aufgabe.

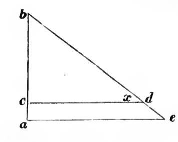
Die Höhe eines Gegenstandes, z. B. eines Baumes, eines Thurmes, einer Säule ꝛc., zu messen.

a. Durch den Schlagschatten.

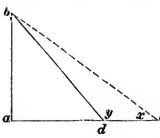


Ist DE die zu messende Höhe, BC die Höhe eines Stabes senkrecht in C, werden DC und BA als parallel vorausgesetzt, weil die Sonne als unendlich weit entfernt betrachtet werden kann, so hat man $\overline{AC}$: CE = CB : DE oder x, also $x = \frac{CE \cdot CB}{AC}$; ist nun EC = 40′, BC = 5′ und AC = 6′, so ist $x = \frac{40 \cdot 5}{6} = 33\frac{1}{3}$′.

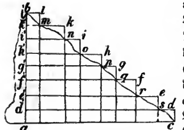
b. Durch Winkelmessung.



Kann man zum Fuße des Gegenstandes gelangen, dessen Höhe ab gemessen werden soll, und bezeichnet ac die Höhe des Meßtisches, so messe man W. x, die Linie cd und zeichne aus diesen Bestandtheilen ein verjüngtes Dr. Man findet bc in Linien, nimmt es in Ruthen und fügt die Höhe von ac hinzu.



Könnte man aber von c aus nicht zu a, sondern nur bis zu d gelangen, so könnte man doch die Linie cd, den Winkel x und y messen, ein dem Dr. cdb ähnliches verjüngtes zeichnen, welches dann auch, wenn man cd verlängerte und ba senkrecht fällte, die ba verjüngt enthielte, in Linien anstatt Ruthen. Stellt uns ba die Höhe eines Berges vor, so könnte man dieselbe in der genannten Weise messen. Aber auch durch sogenanntes Nivellement. Wäre rechts von der Höhe

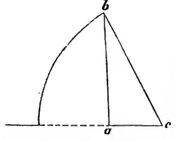


ab eine bequeme Abdachung des Berges oder Hügels, genau von Norden nach Süden gerichtet, so daß abc ein Theil der Meridianebene wäre, so könnte man anstatt der Höhe ab, welche aus ad' + d' e' + e' f' ꝛc. besteht, die Linien cd, se, rf ꝛc. messen. Man stellt die Nivellirlatte cd senkrecht, setzt bei d auf die ds die Libelle auf, macht die Richtung ds wagerecht, visirt dann von d nach s, läßt in s eine Nivellirlatte aufstellen, mißt se, macht er wagerecht, visirt nach r ꝛc. Die Linien lm + kn + io + hp + gq + fr + es + dc sind zusammen = ab oder der Berghöhe.

Bei bedeutenderen Erhebungen pflegt man sich auch des **Barometers** zu bedienen. Darüber siehe die bekannten Lehrbücher der Physik, z. B. Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Dr. Joh. Müller. I, S. 125. (erste Afl.) und in den spätern Auflagen in dem Kapitel vom Luftdrucke.

5. Aufgabe.

a. **Die Erhebung der Sonne über den Horizont** an einem bestimmten Tage, unter einer geographischen nördlichen Breite, z. B. am 21. Decbr., **zu messen.**



Wäre ab eine Säule und könnte durch ein oben an derselben angebrachtes Loch die Sonne hindurchscheinen, so daß bei c eine hell beleuchtete Stelle entstände, wenn Mittags 12 Uhr das Dr. acb in der Ebene des Meridians gedacht wird, so könnte man die ab und ac messen und ein verjüngtes Dreieck zeichnen. Den 21. Dcbr. fände man diese Höhe, wenn die Sonne im Mittage stände, bei einer nördlichen geographischen Breite von $51^\circ = 90^\circ - (51^\circ + 23\frac{1}{2}^\circ) = 15\frac{1}{2}^\circ$; den 21. März und 21. Septbr. 39°; den 21. Juni $62\frac{1}{2}^\circ$.

b. Die Entfernung des Mondes, der Sonne, die Größe ihrer Durchmesser zu messen.



Man hat durch Beobachtungen, deren Auseinandersetzung nicht hierher gehört, den Winkel, unter welchem wir, wenn der Mond im Horizonte steht, den Halbmesser der Erde sehen würden, zu 58′ 44,2″ gefunden; bei a ist ein Winkel von 90°, bei b von 89° 1′ 15,8″. Zeichnet man nun ein Dreieck abc mit einer Kathete ab von vielleicht 2″ par., trüge bei a 90°, bei b 89° 1′ 15,8″ an, so würde man die ac oder die Entfernung des Erdmittelpunktes vom Mondmittelpunkte zu 60 mal 2″ par. finden, d. h. überhaupt 60 mal so groß. Ist also ab der Erddurchmesser = 859,5 geogr. Meilen, so wird ac = 60.859,5 M. circa 51000 M. (eigentlich = 59,94643 Erdhalbmessern).

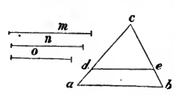
Die Entfernung des Mondes ist freilich nicht eine sich immer gleichbleibende Größe, also auch die Horizontalparallaxe nicht; der mittlere Werth derselben ist 57′ 19,9″. Dieß giebt eine mittlere Entfernung des Mondes von 51535 geogr. Meilen. Ist aber die Entfernung des Mondes von der Erde und der scheinbare Durchmesser, unter welchem er uns erscheint, bekannt, so findet man den wahren Halbmesser = 236 geogr. Mlen. Der scheinbare Halbmesser des Mondes ist aber = einem halben Grade ungefähr.

Die Horizontalparallaxe der Sonne ist im Mittel 8,6″, daraus findet man ihre Entfernung zu 21000000 geogr. Meilen in runder Zahl. Der scheinbare Durchmesser der Sonne in mittlerer Entfernung ist 32′ 3,3″ oder 1923,3″; die Erde erscheint von der Sonne aus nur unter einem Winkel von 17,2″. Daher ist der Durchmesser der Sonne $\frac{1923,3}{17,2}$, oder 112 mal so groß, als der Durchmesser der Erde.

6. Aufgabe.

1. Proportionale Linien zu finden.

a. Zu drei gegebenen geraden Linien die vierte proportionale zu finden.
b. Die mittlere Proportionale zu zwei gegebenen Geraden zu finden.

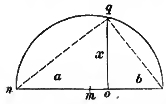


a) Es soll sein $m : n = o : x$. Man mache $ac = m$, $bc = n$, $cd = o$, verbinde a mit b, lege de || ab, so wird $ce = x$.

Denn $ca : cb = cd : ce$ oder x. Man konnte aber auch m zur ganzen Seite, n zum obern Abschnitte, o zur andern ganzen Seite ꝛc. machen; oder man konnte m zum obern, n zum untern, o zum obern ꝛc. Abschnitte machen; oder m zur ganzen Seite, n zur Grundlinie, o zum obern Abschnitte, x zur Parallele machen. Setzt man $n = o$, also auch $m : n = n : x$, so heißt x die dritte Proportionale. Dann muß $ac = m$, $bc = n$, $cd = n$ gemacht werden ꝛc.

b) Es soll sein

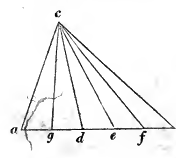
$a : x = x : b$; dann heißt x die mittlere Proportionale; $x^2 = a . b$ und $x = \sqrt{a . b}$.



Man setze die Linien a und b in o zu einer Geraden zusammen; halbire die Summe in m, schlage einen Kreis, so daß $mn = mp = mq$ wird und wenn n und p mit q verbunden werden, bei q ein rechter Winkel entsteht und mache die oq senkrecht in o, verlängere dieselbe bis zum Durchschnitte q mit dem Kreise, dann ist $oq^2 = on . op$ oder $x^2 = a . b$ oder $a : x = x : b$.

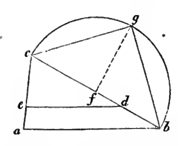
Hierher gehören auch die Aufgaben, welche die sehr mannigfache Theilung der Dreiecke, bezüglich Verwandlung betreffen — es können und sollen hier aber nur die wesentlichsten nnd wichtigsten Fälle vorkommen.

2. Ein Dreieck in mehrere gleiche oder verhältnißmäßige Theile von der Spitze aus zu theilen.

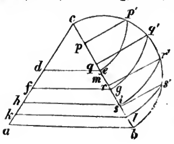


Alle Dr. Dr., wie acg, gcd, dce, ecf und fcb haben gleiche Grundlinie und Höhe; das Dr. abc ist also in 5 gleiche Theile getheilt. Sollten die Theile sich wie 3 : 2 verhalten, so müßte man die ab in diesem Verhältnisse theilen und den Punkt e mit c verbinden.

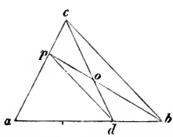
3. Ein Dreieck durch eine mit einer Seite parallele Linie in n gleiche oder doch verhältnißmäßige Theile zu theilen.



Sollte de || ab im Dreieck edc abschneiden, welches ½ Dr. abc wäre, so müßte Dr. edc : Dr. abc = 1 : 2 sein. Da aber die Dr. Dr. ähnlich sind, so muß auch Dr. edc : Dr. abc = $cd^2 : cb^2$ sein. Also auch $cd^2 : cb^2 = 1 : 2$, oder $2cd^2 = cb^2$ oder weil cd = cg ist, $2cg^2 = cb^2$. Ist also cb die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, halbirt man in f, schlägt mit cf den Kreis, macht cd = cg, so ist die Forderung erfüllt. Halbirt man die bc und schlägt mit mc = mb einen Kreis, theilt bc in 5 gleiche Theile, macht pp′, qq′ ꝛc. senkrecht, macht ce = cp′, cr = cq′ ꝛc., so wird dadurch das Dreieck abc in 5 gleiche Theile getheilt.

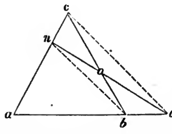


Es ist Dr. dce = ⅕ Dr. abc, Dr. fcg = ⅖ Dr. abc ꝛc.

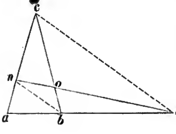


3. Wollte man das Dr. abc vom Punkte p aus so theilen, daß sich die Theile wie 2 : 1 verhielten, so müßte man ad = $\frac{2}{3}$ ab und bd = $\frac{1}{3}$ ab machen d mit p und c verbinden, cb ‖ pd machen (in vorstehender Figur trifft es gerade so, daß pd und die Seite cb parallel sind, weil pc = $\frac{1}{3}$ ca ist, wie db = $\frac{1}{3}$ ba), dann pb ziehen — so ist apb = $\frac{2}{3}$ acb. Denn Dr. acd = $\frac{2}{3}$ Dr. acb und das hinweggenommene Dr. poc ist = dem Dr. dob, weil Dr. pdc = Dr. pdb; zieht man Dr. pod von beiden ab, so bleibt Dr. poc = Dr. odb.

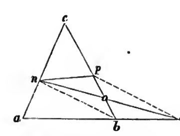
4. Den Scheitel des Dreiecks acb nach dem Punkte n zu verlegen.



Verbindet man n mit b, zieht cd ‖ nb, verlängert ab bis d, zieht nd, so ist Dr. and flächengleich mit Dr. abc. Denn das hinweggekommene Stück noc ist durch das hinzugekommene obd ersetzt. Die Grundlinie ad mußte größer werden, da die Höhe kleiner wird und der Flächeninhalt gleich bleiben sollte. Nennt man die Inhalte G.H für Dr. abc und x.h für das Dr. and, so ist G.H = x.h oder H : h = x : G oder h : H = G : x, so daß x als die vierte Proportionale = ad gefunden werden muß. Wäre der Punkt n noch weiter nach a hin zu liegen gekommen, so wäre ein noch größeres Stück bcd außerhalb des Dr. abc gefallen. Man kann aber dieses Stück wieder hereinschaffen.

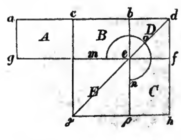


Ist Dr. ane = Dr. acb und will man das Stück boe in die Fläche legen, so ziehe man ec und nb parallel, dann muß Dr. noc = Dr. boe sein.

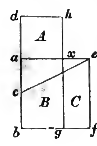


Ist Dr. and irgend ein Theil des Dr. acb und will man bod in das Dreieck hereinschaffen, so ziehe man nb und dp || nb und verbinde n mit p; dann ist das Dreieck nop flächengleich mit dem Dr. bod.

Zum Zwecke einer späteren Anwendung bei der Konstruktion eines Winkels von 36° oder des regelmäßigen Zehnecks möge hier noch die Theilung einer Linie nach dem goldenen Schnitt oder im mittleren und äußeren Verhältnisse angegeben werden.



In beistehender Figur ist ab in c halbirt, dann derselben ein Stück bd angesetzt, so ist ad mal bd + $bc^2 = cd^2$. Aber ad mal bd ist geometrisch genommen = dem Oblongum aus ad und bd oder df, weil df = db gemacht ist. Es ist ferner dh = dc gemacht, also cdhγ ein Quadrat über dc; ebenso bdfe ein Quadrat über bd. Da aber Dr.γcd = Dr.γdh, so muß $\frac{E}{2} + B + \frac{D}{2} = \frac{E}{2} + C + \frac{D}{2}$ sein oder $B = C$; es ist ferner $A = B$ und auch $D = D$, daher $A + B + D = B + C + D$; aber $A + B + D$ = ad.df oder auch ad.db, weil df = db, also auch $A + B + D + E = ad.db + bc^2$, oder $B + B + D + E$ oder $B + C + D + E$ oder $cd^2 = ad.db + bc^2$.



Soll nun ae durch den goldenen Schnitt getheilt werden, d. h. so, daß das Quadrat des größern Abschnitts ax^2 = dem Oblongum unter der ganzen Linie mal dem kleinern Abschnitt, d. h. = ae.ex werde, so mache man zunächst das Quadrat aefb, halbire ab in c, nehme ce in den Zirkel, mache cd = ce, dann errichte man mit da das Quadrat adhx, so ist ax die gesuchte Linie, so daß $ax^2 = ae.ex$ ist.

Denn nach dem Vorigen hat man

$bd.da + ac^2 = cd^2$; es ist aber $da = dh$, $cd = ce$,

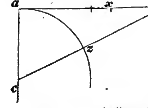
also $bd.dh + ac^2 = ce^2$, aber $ce^2 = ae^2 + ac^2$

also $bd\text{-}dh + ac^2 = ae^2 + ac^2$

$bd.dh \quad = ae^2$

$A + B \quad = B + C$

$A \quad = C$, aber $A = ax^2$ und $C = gx.xe$ $= ae.xe$.



Also $ax^2 = ae.xe$. Da aber $cd = ce$ und $ca = \frac{1}{2}\, ae$, so ist $ad = ce - \frac{1}{2}\, ae$, aber $ax = ad$, also $ax = ce - \frac{1}{2}\, ae$.

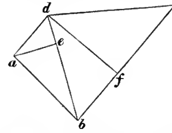
Ist ae gegeben, $ac = \frac{1}{2}\, ae$ in a senkrecht, so ist $ez = ax$, der gesuchte Abschnitt.

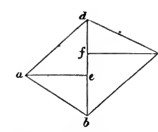
Von der dreieckigen senkrechten Säule kann man nun bequem wieder zur allgemein vierseitigen senkrechten Säule übergehen, deren Grundfläche ein beliebiges Viereck ist, in welchem entweder nur zwei gegenüberliegende Seiten parallel laufen, die andern nicht (Trapez, Paralleltrapez), oder in welchem gar keine Seite mit der andern parallel läuft (Trapezoid). Die Winkel eines solchen Trapezes oder Trapezoids betragen wieder eine volle Umdrehung oder 360°; denn eine Diagonale theilt dasselbe in 2 Dreiecke; aber in jedem Dreiecke betragen alle Winkel zusammen 2 Rechte, daher im Viereck 4 Rechte. Wäre jeder Winkel ein Rechter, so müßten die gegenüberliegenden Seiten parallel und das Viereck entweder ein Quadrat oder Oblongum sein, welche jetzt hier nicht zur Sprache kommen, da die Säulen, deren Grundfläche ein Quadrat oder Oblongum ist, bereits beschrieben sind. Wir müssen also jetzt ein Viereck mit spitzen und stumpfen Winkeln voraussetzen, deren 4 Winkel zusammen 4 Rechte betragen. Die Seiten können alle 4 ungleich sein, oder 2 ungleich und 2 gleich, 3 gleich und die vierte ungleich &c.; beim Trapez könnten die beiden nicht parallelen Seiten einander gleich sein. Bewegt sich nun irgend ein Trapez oder Trapezoid senkrecht nach oben, so daß es dabei zur frühern Lage immer parallel bleibt, so entsteht die vierseitige senkrechte Säule. Sie hat weder ein Parallelogramm, noch ein Dreieck zur Grund- und oberen Fläche,

sondern ein Trapez oder Trapezoid; die untere und obere Fläche sind kongruent, wie bei allen bisher betrachteten Säulen. Drei Ausdehnungen, wie bei den Parallelopipeden und den dreiseitigen Säulen; Anzahl der Kanten, Ecken wie bei den Parallelopip.; die Seitenflächen, nicht parallel, bilden Flächenwinkel, welche theils spitz, theils recht, theils stumpf sein können; wie bei allen senkrechten Säulen sind die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, rechte; die Seitenkanten stehen auf der Grundfläche senkrecht; die Seitenflächen können theilweise gleich sein und sind alle Oblongen, wenn nicht einmal die Höhe der Säule zufällig einer Seite des Vierecks gleich ist, wodurch dann eine Seitenfläche, vielleicht auch mehrere, Quadrate werden könnten, was sich natürlich nicht im Voraus bestimmen läßt. Durch eine Diagonalebene läßt sich eine vierseitige Säule in 2 senkrechte, aber nicht kongruente dreieckige Säulen zerlegen.

Um den Umfang der Grund- und oberen Fläche zu messen, hätte man die Seiten einer Fläche zu messen, zu addiren und 2 mal zu nehmen; addirte man noch die viermalige Seitenkante hinzu, so hätte man die Summe aller Kanten oder ihre Länge.

Die ganze Oberfläche besteht 1) aus 2 mal Grundfläche; 2) aus den 4 Seitenflächen. Die Berechnung der Seitenflächen ist bekannt, da dieselben Oblongen sind. Es kömmt also jetzt besonders darauf an, die Fläche irgend eines Vierecks auszumessen. Sei allgemein ein beliebiges Viereck gegeben und soll der Flächeninhalt desselben berechnet werden, z. B. des Vierecks abcd, so ist Dr. bad = bd mal ae getheilt durch 2 und Dreieck bdc = bc mal df : 2. Beide Flächeninhalte addirt, machen die Fläche des ganzen Vierecks abcd. Günstiger noch wäre es gewesen, wenn bd als Grundlinie beider Dreiecke, wie in der folgenden Fig., hätte angesehen werden können. Dann ist Viereck abcd = bd mal ae : 2 + bd mal cf : 2 oder $\frac{bd}{2} . ae + \frac{bd}{2} . cf = \frac{bd}{2} (ae + cf)$, d. h. halbe Diagonale mal Summe der beiden Höhen. Beisp. ae = 5″, fc = 7″ und bd = 12″, so hat man 6 (5 + 7) □″ = 72 □″.





Setzt man z. B. in voriger Fig. bd = 10″ und ae = 4″, so ist Dreieck abd = 20□″; ist ferner df = 7″ und bc = 11″, so hat Dreieck bdc = $38\frac{1}{2}$ □″. Demnach das ganze Viereck abcd = ($38\frac{1}{2}$ + 20) □″ = $58\frac{1}{2}$□″. Um die Seitenflächen zu finden, hat man für die Höhe h = 13″, die (ad + ab + bc + dc), die Summe der 4 Seiten des Vierecks mit der gemeinschaftlichen Höhe zu multipliciren; denn alle Seitenflächen sind Oblongen, welche je eine Seite der Grundfläche zu der einen und die Höhe der Säule zur andern Dimension haben. Ganze Oberfläche endlich = der Summe aus 2 mal Grundfläche + Seitenflächen.

Um den Kubikinhalt einer allgemein vierseitigen Säule zu finden, läßt man die dreieckige Grundfläche bad von 20□″ sich senkrecht nach oben bewegen, so erhält man eine dreieckige Säule. Ist die Höhe derselben = 9″, so hat die Säule den Kubikinhalt von 9 mal 20 = 180 k″. Ebenso findet man den Kubikinhalt der zweiten dreieckigen Säule, wenn man die Grundfläche bdc = $38\frac{1}{2}$ □″ mit der Höhe von 9 k″ multiplicirt = $38\frac{1}{2}$.9 k″ = $346\frac{1}{2}$ k′. Anstatt aber jede dreieckige Grundfläche einzeln mit der Höhe zu multipliciren und die Summe dann zu addiren, konnte man die ganze Grundfläche abcd auf einmal mit der Höhe multipliciren und zu demselben Resultate gelangen. Denn 180 k″ + $346\frac{1}{2}$ k″ = $526\frac{1}{2}$ k″. Aber auch (20 + $38\frac{1}{2}$) □″ mal 9″ = $526\frac{1}{2}$ k″.

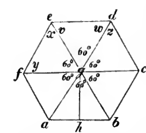
Läßt man die Dimensionen der Seiten der Grundfläche, der Diagonalen, der zu denselben gehörigen Höhen, der Höhe der Säule in demselben Verhältnisse wachsen, also n mal oder $\frac{1}{n}$ mal so groß werden, so erhält man vierseitige Säulen, welche zwar an Größe verschieden, aber an Gestalt gleich sind, deren Oberfläche n.n oder $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}$ mal so groß ist, als die ursprüngliche und deren Kubikinhalt n.n.n oder $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}$ mal so groß wird. Schon beim Würfel, sowie bei allen ähnlichen Säulen haben wir dasselbe Gesetz walten sehen; man kömmt dadurch überhaupt zu der

Frage, ob nicht alle ähnlichen, der Gestalt nach gleichen Körper, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, daß die entsprechenden oder ähnlich liegenden Linien in einem bestimmten Verhältnisse größer oder kleiner sind, dem Gesetze gehorchen, daß die Oberflächen im quadratischen, die Kubikinhalte im kubischen Verhältnisse wachsen oder abnehmen.

In ähnlicher Weise könnte man nun in der Betrachtung der senkrechten Säulen fortfahren. Man würde folgende allgemeine Beziehungen finden 1) Alle haben drei Ausdehnungen. 2) Alle haben ein Dreieck, Viereck oder irgend eine geradlinige Figur zur Grundfläche und eine ebenso große, kongruente, parallele obere Fläche. 3) Alle haben soviele Oblongen zu Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. Diese haben alle gleiche Höhe; ist noch ihre Grundlinie gleich, was davon abhängt, ob die Grundfläche gleichseitig ist oder nicht, so sind dieselben kongruent; ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so sind die gegenüberliegenden Seitenflächen wenigstens gleich. 4) Alle Seitenflächen stehen zu der untern und oberen Fläche senkrecht, ebenso stehen alle Kanten zur untern oder oberen Fläche senkrecht. 5) Die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit einander bilden, entsprechen der Größe der Winkel, welche sich in der Grundflächenfigur finden; sind hier rechte, wie beim Quadrat oder Oblongum, so sind die Flächenwinkel der Seitenflächen auch rechte. 6) Alle Seitenkanten sind unter einander parallel, ebenso alle Kanten der Grund- und oberen Fläche. 7) Alle haben 2 Flächen mehr, als die Grundfläche Seiten oder Ecken hat. 8) Alle haben soviele Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. 9) Alle haben zweimal soviel Ecken, als die Grundfläche Seiten hat oder Ecken. 10) Zu einer Ecke oder einem Körperwinkel gehören stets 3 ebene Winkel. 11) Die Oberfläche wird gefunden durch Berechnung und Addition der einzelnen Flächen. 12) Der Kubikinhalt ist stets = Grundfläche mal Höhe mal entsprechende Kubikeinheit. 13) Alle senkrechten Säulen entstehen dadurch, daß irgend eine geradlinige Figur sich senkrecht nach oben bewegt, so daß jede Lage zur früheren parallel bleibt.

Die fünf- und sechsseitige senkrechte Säule, sowie die regelmäßigen senkrechten Säulen überhaupt sind besonders daran kenntlich, um das Allgemeine nicht zu berühren, daß sie eine

regelmäßige geradlinige Figur zur Grundfläche haben, d. h. eine Figur mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln. Dieselbe bewegt sich senkrecht von unten nach oben und bildet dadurch die Säule. Um eine regelmäßige Figur und also das Netz zu einer regelmäßigen, senkrechten Säule zu zeichnen, muß man eine Seite der Figur kennen (alle Seiten sind gleich) und einen Winkel, alle Winkel sind gleich. Legt man den Winkel an beide Endpunkte der gegebenen Seite an, macht die Schenkel so groß, als die gegebene Seite, legt wieder den Winkel an die Endpunkte, so erhält man die sich von selbst schließende regelmäßige Figur. Um aber den Winkel der regelmäßigen Figuren zu finden, müßte man entweder den Winkel eines vorhandenen Modells messen und antragen oder berechnen und mit dem Transporteur antragen. Der Winkel des regelmäßigen Dreiecks = $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$; des regelmäßigen Vierecks = $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$; wie sich aus dem Früheren ergiebt. Eine jede geradlinige Figur läßt sich aber in soviele Dreiecke zerlegen, als die Figur Seiten hat, weniger 2. Also das Dreieck in ein Dreieck, das Viereck in zwei Dreiecke, das Fünfeck in 3, das Sechseck in 4, das Siebeneck in 5, 2c., das nEck in n—2 Dreiecke. Die Winkel eines jeden Dreiecks betragen aber 180°, also n—2 Dr. Dr. auch (n—2).mal 180°; das regelmäßige nEck hat aber n gleiche Winkel, welche sich in die Summe aller theilen, daher beträgt der einzelne $\frac{(n-2).180^\circ}{n}$. Setzt man nun für n die Zahlen 3, 4, 5, 6 2c., so erhält man die Winkel 60°, 90°, 108°, 120° 2c. Mit Hülfe des Transporteurs lassen sich nun die verlangten Winkel, also auch die regelmäßigen Vierecke zeichnen. Man gelangt aber auch noch durch folgende Betrachtung zu demselben Resultate. Denkt man sich nämlich einen Punkt in der Ebene und von demselben 3, 4, 5 2c. gleich große Strahlen auslaufend, welche zugleich die Ebene in 3, 4, 5 2c. gleiche Theile zerlegen, so daß je zwei einen Winkel von $\frac{360}{3}$, $\frac{360}{4}$, $\frac{360}{5}$, $\frac{360}{6}$ 2c. Grad einschließen und verbindet man dann die Endpunkte der Strahlen, welche neben einander liegen, durch gerade Linien, so erhält man regelmäßige Figuren. Denkt man sich einmal die Ebene um den angenommenen Punkt herum in 6 gleiche Theile à 60° zerlegt und das Verfahren eingehalten, so erhält man das regelmäßige 6Eck. Die Winkel



um den Punkt g sind je 60°; die Winkel y und x sind einander gleich, weil fg = eg und jeder beträgt $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Also x = 60°, v = 60°, x + v = 120°, ebenso w + z = 120° ꝛc., wie ja der Winkel des regelmäßigen Sechsecks der Größe nach beschaffen sein muß. Die Dreiecke fge, egd ꝛc. sind alle kongruent, daher fe = ed = dc ꝛc., also ist abcdef ein regelmäßiges Sechseck. Da die Strahlen gf, ge, gd ꝛc. alle gleich sind, so stehen die Ecken von dem Punkte g gleichweit ab, derselbe ist centrisch nach den Ecken, aber auch zugleich centrisch nach den Seiten; denn die Senkrechten von g nach den einzelnen Grundlinien der kongruenten Dreiecke müssen alle gleich sein. Demnach ist der Punkt g auch centrisch nach den Seiten. Ist ag der Radius des zu umschreibenden Kreises, so ist gh der Radius des einzuschreibenden Kreises. Die Linie gh nennt man auch das **Apostema** oder den **Seitenhalbmesser**. Die Betrachtungen über das regelmäßige Sechseck lassen sich leicht auf alle regelmäßigen Figuren ausdehnen. Dieselben haben alle einen nach den Seiten und Ecken centrischen Punkt, sie zerfallen alle in soviele kongruente gleichschenklige oder gleichseitige Dreiecke (beim Sechseck), als die Figur Seiten hat ꝛc. Eine solche Betrachtung ist besonders förderlich zur Auffindung des Flächeninhaltes. Denn in vorstehender Figur ist das Dreieck abg oder $\frac{ab}{2}$.gh der sechste Theil des Sechsecks, also 6 mal $\frac{ab}{2}$.g die Fläche des ganzen Sechsecks, d. h. **halber Umfang mal Seitenhalbmesser und dieses Produkt auf die entsprechende Flächeneinheit bezogen**, giebt die Fläche des regelm. Sechseck oder analog überhaupt des regelmäßigen nEcks.

Um also die Oberfläche einer regelmäßigen senkrechten Säule zu finden, messe man die Seite, suche das Apostema, was man findet durch Halbiren zweier Nachbarwinkel und Fällen einer Senkrechten von dem Punkte aus, in welchem sich die Halbirungslinien treffen; multiplicire den halben Umfang mit dem Apostema, nehme das Produkt 2 mal, messe eine der Seitenflächen = Seite mal Höhe, nehme dieselbe so oft, als Seitenflächen da sind und

zähle Alles zusammen. Der Kubikinhalt aber ist = Grundfläche mal Höhe; die Grundfläche aber halber Umfang mal Seitenhalbmesser, daher der Kubikinhalt = halber Umfang mal Seitenhalbmesser mal Höhe, auf die entsprechende Kubikeinheit bezogen.

Läßt man bei gleichen W. W. die Dimensionen n mal so groß oder klein werden, so werden bei den ähnlichen Säulen die Umfänge auch in demselben Verhältnisse größer oder kleiner; die Oberflächen aber n.n mal, die Kubikinhalte n.n.n mal.

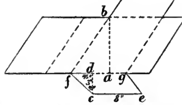
Der Lehrer lasse zur Übung einige Netze von regelmäßigen Säulen zeichnen.

Die schiefen Säulen unterscheiden sich von den senkrechten Säulen wesentlich darin, daß die Seitenflächen auf der Grund- und oberen Fläche nicht mehr senkrecht stehen, sondern schief, daß also die Flächenwinkel, welche die Grund- und obere Fläche mit den Seitenflächen bildet, nicht mehr rechte, sondern schiefe sind. Waren die Seitenflächen bei den senkrechten Säulen stets Oblongen, so sind dieselben bei den schiefen Säulen schiefwinklige Parallelogramme und zwar Rhomben oder Rhomboide, je nachdem die Seite der Grundfläche und die Seitenkante entweder an Größe gleich oder ungleich sind. Die Grundfläche ist entweder ein Dreieck, oder Viereck ꝛc. oder irgend eine geradlinige Figur, welche sich schief zur Grundfläche so emporbewegt, daß eine jede jeweilige Lage zur vorhergehenden parallel ist. Die Seitenflächen können unter sich gleich oder ungleich sein, je nachdem die Kanten der Grundfläche einander gleich sind oder nicht. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, z. B. ein Quadrat und bewegt sich dasselbe schief soweit empor, als die Seite des Quadrats lang ist, so sind die Seitenflächen lauter Rhomben, welche die Quadratseite zur Seite haben; bewegt sich ein Oblongum schief aufwärts, soweit als die lange Seite des Oblongums beträgt, so müssen die Seitenflächen theils Rhomben werden mit der langen Seite, theils Rhomboide, welche die kurze Seite zur Grundlinie und die lange Seite des Oblongums zur andern Seite haben. Bewegt sich ein Rhombus aufwärts, so daß die schiefe Linie der Seite des Rhombus gleich wird, so hat die Säule lauter Rhomben zu Seitenflächen; bewegt sie sich durch eine längere oder kürzere Linie, so entstehen Rhomboide; bewegt

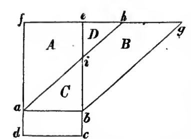
sich ein Rhomboid als Grundfläche aufwärts und zwar so weit, als die größere Seite beträgt, so erhält man theils Rhomben, theils Rhomboide zu Seitenflächen. Die obere Fläche ist selbstverständlich immer mit der untern stets kongruent, denn die untere bewegt sich so lange nach oben, bis sie in der oberen ruht. Bewegt sich eine regelmäßige Figur nach oben, so werden dadurch, wie lang auch die schiefe Linie sein mag, durch welche sich die Grundfläche hindurch bewegt, die Seitenflächen alle unter sich kongruent.

Über die Messung der Umfänge der einzelnen Flächen, der Grundfläche und der Seitenflächen, sowie über die Auffindung des Gesammtumfangs möge hier Nichts weiter bemerkt werden, da dieselbe den früheren ganz analog ist.

Zur Messung und Berechnung der Oberfläche einer schiefen Säule muß man die einzelnen Flächen nach ihrem Quadratinhalte messen und zusammenaddiren; dabei darf nicht außer Acht gelassen werden, daß bei den Seitenflächen außer der Grundlinie die senkrechte Entfernung der in der oberen Fläche parallelen Seite als Höhe der Seitenflächen zu messen ist. Möge sich zum Beispiel ein Rhomboid aufwärts bewegen und die schiefe Säule bilden.



Setzt man $ce = 8''$ oder Längeneinheiten, $dc = 3'' = df$, also Winkel dfc = Winkel $dcf = 45^\circ$, $dg = 5''$, so ist $fc = 3.\sqrt{2} = 4{,}2426$ oder $4{,}243''$. Setzt man endlich $ab = 8''$, so läßt sich die Oberfläche berechnen, wie folgt. Untere Fläche $= 3$ mal $8 = 24\,\square''$, 2 mal genommen $= 48\,\square''$; rechte + linke Seitenfläche $= 4{,}243$ mal 8 mal $2 = 67{,}888\,\square''$; vordere + hintere Fläche $= 8$ mal 8 mal $2 = 128\,\square''$. Daher zusammen $(48 + 67{,}888 + 128)\,\square'' = 243{,}888\,\square''$ oder wenn man $\frac{888}{1000}$ zu $\frac{9}{10}\,\square''$ annimmt $243\frac{9}{10}\,\square''$.



Um den Kubikinhalt einer schiefen Säule zu bestimmen, möge zuerst eine solche angenommen werden, welche eine rechtwinklige Grundfläche, z. B. ein Oblongum abcd zur Grundfläche hat. Auf derselben Grundfläche stehe auch eine senkrechte Säule. Hat der Lehrer den aus Holz zu diesem Zwecke vorgerichteten Modellkörper auf den Tisch gestellt, so sieht man davorstehend die vordere Fläche fabe und abgh, welche nach hinten beide die Dicke oder Tiefe bc haben. Läßt man nun die Lücke zwischen beiden durch die dreieckige Säule mit der Grundfläche eih ausfüllen, welche die Grundfläche eih nach vorn wendet und nach hinten die Dicke bc hat, so ergiebt sich, daß die Säule welche die beiden Flächenstücke A + D zur Grundfläche und bc zur Dicke hat und die Säule, welche die beiden Flächenstücke B + D zur Grundfläche und die bc ebenfalls zur Tiefe hat, ganz identisch sind. Denn die beiden Dreiecke fah und ebg sind identisch oder kongruent, (weil fa = eb und ah = bg und Winkel fah = Winkel ebg ist, so daß man Dr. fah um ab auf der ab fortschieben kann, bis es auf das Dr. ebg fällt); bewegt sich nun einmal das eine und einmal das andere um die Länge cb ohne abzuweichen nach hinten, so kann nur derselbe Körperraum herborgebracht worden sein, weil das Bildungsgesetz ganz dasselbe oder identisch ist. Also dreieckige Säule mit der Grundfläche fah oder A + D und der Dicke bc = der dreieckigen Säule mit der Grundfläche ebg oder D + B und der Dicke bc. Aber die dreieckige erste Säule läßt sich in zwei zerlegen, welche dieselbe Dicke haben; nämlich in eine vierseitige mit der Grundfläche A und eine dreiseitige mit der Grundfläche D; ebenso zerfällt die zweite dreiseitige in die dreiseitige mit der Grundfläche D und in die vierseitige mit der Grundfläche hibg oder B, welche beide die Dicke bc haben. Daher Säule über A + Säule über D = Säule über B + Säule über D.

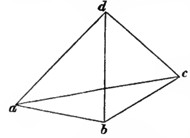
Da nun die beiden Säulen über D dieselben oder sogar eine und dieselbe sind, so kann man dieselben auf beiden Seiten abziehen und hat Säule über A = Säule über B. Setzt man

endlich einmal der Säule A die Säule C, dann der Säule B die Säule C zu, so erhält man die senkrechte und schiefe Säule, welche beide gleiche Grundfläche und Höhe haben und an Kubikinhalt gleich sind. Also: Eine jede schiefe Säule, welche ein rechtwinkliges Parallelogramm zur Grundfläche hat, ist ebenso groß als die senkrechte von derselben Grundfläche und Höhe. Hätte aber die schiefe Säule nicht ein rechtwinkliges Parallelogramm zur Grundfläche, sondern ein schiefwinkliges (einen Rhombus oder ein Rhomboid), so kann man dieselbe zunächst in eine andere verwandeln, welche bei demselben Kubikinhalte ein rechtwinkliges Parallelogramm zur Grundfläche hat. Man nimmt zu diesem Zwecke eine schiefe Säule zur Hand, welche ein schiefwinkliges Pgm zur Grundfläche hat, und so eingerichtet ist, daß man auf der rechten Seite ein Körperstück, einen Keil abschneiden und auf der linken Seite ansetzen kann, so daß sich die schiefe Säule mit schiefwinkliger Grundfläche in eine schiefe oder senkrechte von demselben Kubikinhalte mit rechtwinkliger Grundfläche verwandelt. Daher ist eine schiefe Säule, deren Grundfläche ein schiefwinkliges Parallelogramm ist, ebenso groß als die senkrechte Säule, welche ein flächengroßes rechtwinkliges Parallelogramm zur Grundfläche (mit derselben Grundlinie und Höhe) und dieselbe Höhe (senkrechte Entfernung zwischen der untern und obern Grundfläche, von denen eine von beiden unter Umständen verlängert werden muß) hat oder Kubikinhalt der schiefen Säule, deren Grundfläche ein schiefwinkliges Parallelogramm ist = Grundfläche mal Höhe. Daraus ergiebt sich von selbst, daß auch der Kubikinhalt einer dreieckigen schiefen Säule = Grundfläche mal Höhe ist, weil jede dreieckige senkrechte oder schiefe Säule die Hälfte einer entsprechenden senkrechten oder schiefen Säule ist, deren Grundfläche ein recht- oder schiefwinkliges Parallelogramm ist. Daraus folgt wieder, daß auch der Kubikinhalt einer beliebigen vierseitigen, fünfseitigen, 2c. nseitigen schiefen Säule = Grundfläche mal Höhe ist. Von der Wahrheit des Satzes, daß eine jede schiefe Säule denselben Kubikinhalt hat, wie die senkrechte, welche dieselbe Grundfläche und Höhe hat, kann man sich auch leicht dadurch überzeugen, daß beide

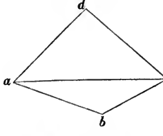
Körper in ein bis zum Rande mit Wasser angefülltes Gefäß gethan, eine gleich große Wassermenge verdrängen.

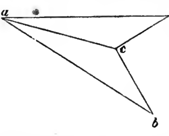
Läßt man die Dimensionen, welche in Bezug auf Oberfläche und Kubikinhalt maßgebend sind, also bei der Grundfläche und bei der oberen Grundlinie und Höhe, ebenso die bestimmenden Dimensionen für die Seitenflächen und auch die Höhe der schiefen Säulen 2, 3, 4 ꝛc. . . n mal so groß werden, so wird die Oberfläche 2 mal 2, 3 mal 3, 4 mal 4 ꝛc. . . n mal n mal so groß, der Kubikinhalt 2 mal 2 mal 2, ..., n.n.n so groß. Die also entstandenen Säulen sind der ursprünglichen zwar an Gestalt gleich oder ähnlich, aber nicht an Größe. Der Schwerpunkt einer regelmäßigen Säule liegt in der Mitte der Achse.

Bevor wir weiter zur Betrachtung der Pyramiden vorschreiten, haben wir hier noch eine kurze Betrachtung der Vierecke überhaupt und der Vielecke einzuschalten. Eine besondere Gattung von Vierecken, das Parallelogramm ist schon früher besprochen worden; es kömmt also hier nur noch das Viereck zur Sprache, in welchem entweder nur 2 S. S. mit einander parallel laufen oder alle, hinreichend verlängert, sich schneiden müssen, oder das Paralleltrapez und Trapezoid. Die Pgme konnten keine Winkel haben, welche = oder > 2 R. waren, d. h. keine erhabenen oder überstumpfen; beim Viereck überhaupt sind auch diese, soweit es möglich ist, nicht ausgeschlossen. Die Entstehung des Vierecks überhaupt geschieht, wenn sich die ab mit veränderlicher Größe dreht, so daß dabei der P. a festliegt und der P. b die Geraden bc, cd beschreibt, bis endlich die ab in die Lage ad fällt. Wäre das Dr. abd und dbc vorhanden gewesen, so konnte man dieselben mit der db zusammenstellen oder wenn das Dr. abd vorhanden war, außerhalb desselben den P. c annehmen und d und b mit c verbinden. Die Bestandtheile des Vierecks sind 4 Seiten, 4 Winkel und der eingeschlossene Raum; einer jeden Seite liegt wieder eine Seite, einem jeden Winkel liegt wieder ein Winkel



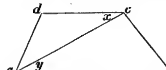
gegenüber. Eine Linie, wie ac oder db, welche zwei Eckpunkte des Vierecks oder Vierseits mit einander verbindet, heißt **Diagonale**; dieselbe zerlegt das Viereck in zwei an Gestalt und Größe verschiedene, unter Umständen auch kongruente Dreiecke, ohne daß das Viereck ein Pgm zu sein braucht. Solcher Diagonalen giebt es in einem Viereck zwei. Denn von einem P. a kann man nach allen Punkten, nur nicht nach 3 Punkten Gerade ziehen, nicht nach a, nicht nach d und b, weil dahin schon Gerade gezogen sind, also nur noch nach c oder nach einem Punkte. Das kann man aber 4 mal wiederholen; man hätte also 4 Diagonalen, aber nur 2, weil jede doppelt gerechnet ist. Da eine jede Diagonale das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, die Winkel eines Dreiecks aber 2 Rechte betragen, so müssen die Winkel der beiden Dreiecke, welche zusammen die Winkel des Vierecks bilden, 360° oder 4 Rechte bilden. Geht man, wie früher beim Dreieck, um die Winkel des Vierecks zu bilden, auf den Seiten derselben, so muß man eine ganze Umdrehung machen. Aber auch bei Vierecken mit erhabenen oder einspringenden Winkeln betragen doch alle 4 Winkel zusammen 4 Rechte. Man braucht ja nur a mit c zu verbinden; dann hat man wieder zwei Dreiecke, deren Winkel zusammen 4 Rechte betragen. Die zweite Diagonale, welche P. d mit P. b verbindet, fällt nicht mehr in die Fläche des Vierecks. Übrigens kann in einem Viereck nur ein einspringender Winkel vorkommen, weil zwei einspringende schon größer wären als 4 Rechte, was nicht sein kann, da die W. W. eines jeden Vierecks nur 2 Rechte betragen. Daraus, daß die Winkel eines Vierecks zusammen 4 Rechte betragen, folgt zugleich, daß man bei 3 Winkeln auch den vierten kennt = 360° — der drei Winkel; daß zwar in einem Viereck 4 Rechte, aber nicht 4 stumpfe Winkel





oder eine Anzahl rechter und stumpfer Winkel vorkommen kann. Ebenso wenig können alle 4 Winkel spitz sein, weil dieselben dann zusammen kleiner, als 4 Rechte wären.

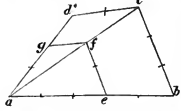
Stellt man sich vor, daß ein und dasselbe Viereck zweimal vorhanden wäre oder daß eine Seite des Vierecks durch eine zweimalige, identische Bewegung nach demselben Gesetze das Viereck zweimal erzeugte, so hätte man zwei ganz nach demselben Bildungsgesetze entstandene, kongruente Dreiecke. Dieselben ließen sich aber durch die entsprechenden Diagonalen in kongruente Dreiecke zerlegen, so daß die Frage über die Kongruenz der Vierecke oder die Frage, aus wie vielen und welchen Bestandtheilen sich ein Viereck zeichnen läßt, so daß es nach Größe und Gestalt bestimmt ist, sich auf die entsprechende Frage bei der Konstruktion der Dreiecke zurückführen läßt. Man kann ein Viereck immer konstruiren, wenn man die beiden Dreiecke konstruiren kann, welche das Viereck bilden. Zur Konstruktion eines Dr. gehören im Allgemeinen 3 Bestandtheile, unter denen wenigstens eine Seite sich befinden muß; daher brauchte man für das Viereck wegen der gemeinschaftlichen Diagonale, die man 2 mal als die geforderte Seite betrachten könnte, nur noch 5 Bestandtheile. Dieß gestaltete sich natürlich im vorkommenden Falle noch weit günstiger, z. B. beim Paralleltrapez, weil im Paralleltrapez abcd, wegen ab || cd, die Winkel x und y als Wechselwinkel gleich sein müssen, man also nur noch 4 von einander unabhängige Bestandtheile zu fordern hat.



Es wäre offenbar unnöthig, wenn man hier alle Möglichkeiten der Konstruktion eines Vierecks erschöpfen wollte; an später zu stellenden Aufgaben wird die Sache noch deutlicher werden. Fragt man, unter welchen Bedingungen zwei Vierecke der Größe nach mit einander verglichen, gleich sind, so ist die einfache Antwort „wenn die beiden Dreiecke an Größe einander gleich sind, aus denen das Viereck zusammengesetzt ist". Haben z. B. zwei Vierecke eine Diagonale (die Grundlinie der beiden Dreiecke gemein), haben die beiden Dreiecke, welche auf dieser Grundlinie stehen, im einen, wie im andern Dreieck die Höhe gleich, so

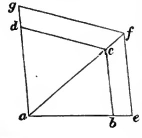
müssen die Vierecke flächengleich sein. — Den **Umfang** eines Vierecks kann man bestimmen, wenn man die 4 Seiten desselben bestimmt und addirt. Wie man ein Viereck in ein flächengleiches Dreieck verwandeln oder überhaupt in einem Viereck oder Mehreck eine Ecke hinwegschaffen kann, ohne die Fläche zu verändern, das ist schon früher gezeigt worden.

Die Vierecke können aber, wie alle Raumgrößen, auch bezüglich ihrer **Gestalt** allein verglichen werden und können dieselbe also entweder gleich oder ungleich haben; im erstern Falle aber heißen sie **ähnlich**. Bei Parallelogrammen und Dreiecken sind die Bedingungen der Ähnlichkeit bereits erörtert worden, die Winkelgleichheit und Seitenverhältnißgleichheit und zwar aus dem Bildungsgesetze. Lassen wir also auch hier einmal ähnliche Vierecke entstehen und entnehmen aus dem Bildungsgesetze ähnlicher Vierecke die Bedingungen für ihre Ähnlichkeit. Bewegt sich die ab, welche irgend ein Maß 5 mal enthält, nach einem bestimmten Gesetze und bildet das Viereck abcd und bewegt sich

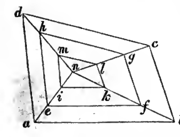


zugleich die ae, welche $^3/_5$ von ab beträgt so, daß sie von der veränderlichen ab in jeder Lage und jedem Augenblicke $^3/_5$ beträgt; beträgt ferner af $^3/_5$ von ac und ag $^3/_5$ von ad; ist demgemäß fe || bc und gf || dc; werden dadurch die Winkel des Vierecks aefg denen des Vierecks abcd gleich; beträgt fe auch $^3/_5$ bc und gf $^3/_5$ dc, so ist das Viereck aefg dem Viereck abcd ähnlich. Man sieht sogleich, daß auch hier die Ähnlichkeit an **die Winkel- und Seitenverhältnißgleichheit** gebunden ist; es ist ferner deutlich, daß die Diagonale ac die Vierecke in zwei Paar Dreiecke aef und abc, afg und acd theilt, welche einander ähnlich sind. Hat man also zwei ähnliche Vierecke, so lassen sich dieselben in zwei Paar ähnlicher Dreiecke zerlegen, welche eine Seite gemein haben, und hat man zwei Paar ähnlicher Dreiecke, aef und abc; afg und acd, welche eine Seite gleich haben, so lassen sich dieselben zu ähnlichen Vierecken anordnen. Ähnliche Vierecke müssen sich immer so anordnen oder in einander hineinlegen lassen, wie aefg in abcd; dann müssen ef || bc und fg || dc sein.

Den P. a, von welchem aus die gleichmäßige Anordnung gemacht ist, könnte man den Ähnlichkeitspunkt nennen. Schon aus der bloßen Betrachtung ergiebt sich, wie man über einer beliebigen oder über einer gegebenen Seite zu einem gegebenen Vierecke ein ähnliches zeichnen kann. Man zerlegt entweder das vorhandene in 2 Dreiecke abc und acd und konstruirt, wenn ae der ab entspricht, zuerst das Dr. aef $\sim$ Dr. abc, indem man ef || bc macht, dann fg || dc, oder indem man die entsprechenden Seiten sucht, ab : bc = ae : x (= ef) und ac : dc = af : x (=fg); ab : ac = ae : x (x = af) rc.



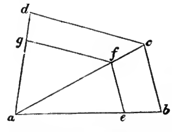
Wäre abcd gegeben und sollte man über ae entsprechend der ab ein ähnliches Viereck bauen, so brauchte man nur ab bis e zu verlängern, die Diagonale ac beliebig lang zu ziehen, ef || bc zu legen; dann die ad beliebig zu verlängern und fg || dc zu legen. Hätte man das Viereck abcd gehabt, den Punkt n als Ähnlichkeitspunkt beliebig angenommen, na, nd, nc und nb gezogen; dann ni, ne rc. = einer gegebenen, entsprechenden Seite gemacht und dann die Parallelen ik, kl rc. zu den Seiten ef, fg rc. gezogen, so hätte man die beiden ähnlichen Vierecke efgh und iklm erhalten.



Man könnte noch weiter die Frage aufstellen, wie sich zwei ähnliche Vierecke hinsichtlich ihres Umfangs und hinsichtlich ihrer Fläche verhalten und dabei durch Zerlegung in ähnliche Dreiecke zum Ziele kommen. Nennt man A, B, C, D die Seiten des größeren, a, b, c, d die Seiten des kleineren Vierecks, so muß a irgend ein Theil von A, ebenso b von B rc., z. B. $\frac{m}{n}$ sein. Dann ist $U = A + B + C + D$ und $u = a + b + c + d = \frac{m}{n} \cdot A + \frac{m}{n} \cdot B + \frac{m}{n} \cdot C + \frac{m}{n} \cdot D$; daher

$$U : u = A + B + C + D : \frac{m}{n}(A + B + C + D) = 1 : \frac{m}{n}.$$

Aber in demselben Verhältnisse stehen auf zwei entsprechende Seiten, z. B. A und a ꝛc. Daher: **Ähnliche Vierecke verhalten sich hinsichtlich ihres Umfangs wie zwei ähnlich liegende Seiten.**



Um das Verhältniß ähnlicher Vierecke hinsichtlich ihrer Flächen zu finden, so ist Dr. abc : Dr. aef = $ac^2 : af^2$; ferner Dr. acd : Dr. afg = $ac^2 : af^2$. Daher verhält sich Dr. abc : Dr. aef = Dr. acd : Dr. afg = $ac^2 : af^2$. Daher Dr. abc + Dr. acd : Dr. aef + Dr. afg = $ac^2 : af^2$ Viereck abcd : Viereck aefg = $ac^2 : af^2 = bc^2 : fe^2 = ab^2 : ae^2$ ꝛc. Also: **Ähnliche Vierecke verhalten sich hinsichtlich ihrer Fläche, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten.** Es gehört also zur 2, 3, 4 . . . . n mal so großen Seite des ähnlichen Vierecks ein 2, 3, 4 . . . n mal so großer Umfang und eine 4, 9, 16 . . . n.n mal so große Fläche. Soll man ein Viereck also an Fläche n oder $\frac{1}{n}$ mal so groß machen, so muß man die analoge Seite $\sqrt{n}$ oder $\sqrt{\frac{1}{n}}$ mal so groß machen. Hat man 1000‴ par. durch eine Linie par. in der Zeichnung dargestellt, so ist die Zeichnung $\frac{1}{1000000}$ der natürlichen Fläche; bedeutet 1‴ par. auf dem Reißbrete 2000‴ par. in der Natur, so ist das Viereck, was nach diesem Verjüngungsverhältnisse gezeichnet ist $\frac{1}{4000000}$ der natürlichen Fläche. Da alle Vierecke auf dem Reißbrete soviel Quadratlinien par. erhalten, als ganze oder Viertelquadratruthen, so kann man auch schon hieraus entnehmen, daß sich ähnliche Vierecke ebenso verhalten, wie die Quadrate der entsprechenden Seiten oder wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verjüngungsverhältniß ausdrücken, also wie $1.1 : \frac{1}{1000.1000}$ oder wie $1.1 : \frac{1}{2000.2000}$. Um also zu einer gegebenen geradlinigen Figur eine andere ähnliche zu zeichnen, deren Fläche n mal oder $\frac{1}{n}$ mal so groß werden soll, hat man für Winkelgleichheit zu sorgen und die betreffenden Seiten $\sqrt{n}$ oder $\sqrt{\frac{1}{n}}$ mal so groß zu machen.

Ähnlich, wie über das Viereck gestalten sich die Betrachtungen über das Fünf-, Sechs- ꝛc. Eck, überhaupt über das **Vieleck** oder auch nEck, wenn n die Zahl der Seiten oder Winkel andeutet. Die Vielecke entstehen, wie das Dreieck und Viereck dadurch, daß sich eine Gerade, welche mit dem einen Punkte festliegt und mit dem andern jeweiligen Punkte den zurückgelegten Weg beschreibt, in der Ebene dreht und zwar mit nach einem bestimmten Gesetze veränderlicher Größe und dabei Seiten, Winkel und Fläche beschreibt. Ein jedes nEck kann man sich ganz nach einem und demselben Gesetze wiederholt beschrieben denken; alle nach demselben Bildungsgesetze entstandenen nEcke sind an Größe und Gestalt einander gleich oder kongruent. Vielecke, welche in allen ihren Bestandtheilen, bezüglich in der Anordnung derselben übereinstimmen, sind kongruent und lassen sich so konstruiren, daß dieselben nach Größe und Gestalt bestimmt sind. Man könnte aber wohl auch hier fragen: Aus welchen und wie vielen Bestandtheilen läßt sich ein nEck zeichnen, so daß es an Größe und Gestalt bestimmt ist? Die Erörterung und Erledigung dieser Frage könnte wohl sehr umständlich werden, wenn nicht die Konstruktion des Dreiecks und Vierecks vorher erläutert worden wäre. Ein jedes nEck läßt sich aber durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in n—2 Dreiecke zerlegen, von denen jedes mit dem folgenden eine Seite, die Diagonale gemein hat oder theils in Dreiecke, theils in Vierecke — daher läßt sich ein beliebiges nEck konstruiren, wenn die Dreiecke und Vierecke, überhaupt die einzelnen Bestandtheile, aus denen dasselbe besteht, sich konstruiren lassen. Wenn beim Dreieck, Viereck der Umfang = der Summa der Seiten war, so findet dasselbe auch beim nEck Statt. Beim Dreieck hängt noch die Gleichwinkligkeit mit der Gleichseitigkeit untrennbar zusammen; anders ist es beim Viereck und Pgm; ebenso bei den Vielecken. Die nEcke können gleichseitig sein, ohne gleichwinklig zu sein. Diejenigen Vielecke, welche neben der Gleichseitigkeit auch noch die Eigenschaft der Gleichwinkligkeit haben, heißen **regelmäßige Vielecke**. Unter den Drei- und Vierecken ist das gleichseitige Dreieck und das Quadrat das regelmäßige. Wie schon früher angedeutet, reicht zur Konstruktion eines regelmäßigen nEcks die Seite und der Winkel aus, oder auch das Apostema, oder der Seitenhalbmesser und der Winkel,

weil das regelmäßige nEck in n gleichschenklige, (beim Sechseck gleichseitige) unter sich kongruente Dreiecke zerlegt werden kann, weßhalb es sich fragt, aus welchen Bestandtheilen ein solches Dr. gezeichnet werden kann. Daß alle regelmäßigen Vielecke centrisch nach Ecken und Seiten und zwar in einem Punkte sind, ist schon angedeutet worden. Ob und unter welchen Bedingungen nicht regelmäßige nEcke centrisch sind nach Ecken oder Seiten, das kann hier keine weitere Erörterung finden.

Wieviel Grade oder Rechte à 90° die Winkel eines nEcks zusammengenommen betragen, ergiebt sich daraus, daß a. ein nEck in n—2 Dreiecke sich zerlegen läßt, deren Winkel zusammen denen des nEcks gleich (n—2).2 R oder (n—2).180° betragen. b. Man könnte aber auch in einem nEck in der Fläche einen P. annehmen und denselben mit allen Eckpunkten verbinden. Man erhielte dann nDreiecke, deren Winkel die Winkel um 360° überträfen oder 4 R, welche um den P. herumlägen. Daher alle W. W. des nEcks = n mal 2 Rechte — 4 Rechte = (n—2).2 R oder (n—2).180°. c. Könnte man vom Dreiecke ausgehend zeigen, wie wenn die Seitenzahl eines nEcks um 1 wächst, die 3 hinzukommenden W. W. allmal 2 Rechte betragen.

Da die Winkel eines nEcks = (n—2).180° sind, so muß ein Winkel im regelmäßigen nEck den nten Theil davon = $\frac{(n-2).180^0}{n}$ betragen. Daher

Winkel	des	Dreiecks	= 60°
„	„	Vierecks	= 90°
„	„	Fünfecks	= 108°
„	„	Sechsecks	= 120°
„	„	Siebenecks	= $128\frac{4}{7}$°
„	„	Achtecks	= 135° 2c.

Die Anzahl der Diagonalen in einem nEcke anlangend, so kann man von jeder Ecke nach allen Ecken, nur nicht a. nach der Ecke selbst und b., nicht nach den beiden benachbarten Ecken, also nach n—3 Ecken Diagonalen ziehen. Daher Anzahl der Diagonalen im nEck = $\frac{(n-3).n}{2}$, weil jede doppelt gerechnet ist.

Daher im Dr. die Anzahl = o, im Viereck = 2, im Fünfeck = 5 2c.

Um eine regelmäßige Figur von bestimmter Größe zu zeichnen — denn an Gestalt stimmen alle regelmäßigen Vielecke von gleicher

Seitenzahl überein, da sie winkelgleich sind und das Verhältniß der Seite des kleineren zur Seite des größeren ein fest bestimmtes ist — muß man entweder die Seite oder den Eckenhalbmesser oder den Seitenhalbmesser kennen. Kennt man

a. die **Seite**, so trägt man entweder den nach der Seitenzahl des regelmäßigen nEcks bestimmten Winkel an beiden Endpunkten an, macht die dadurch erhaltenen Schenkel so groß, wie die Seite, so wird sich die Figur entweder von selbst schließen, wenn die Seitenzahl ungerade ist oder muß noch dadurch geschlossen werden, daß man die Endpunkte der beiden zuletzt erhaltenen Schenkel schließt. Man könnte aber auch an beiden Endpunkten den halben bekannten Winkel des regelmäßigen Vielecks antragen und dadurch eines von den n gleichschenkligen Dreiecken (beim Sechseck gleichseitigen) finden, aus denen das regelmäßige Vieleck sich zusammensetzen läßt. Man hätte dann zu dem gefundenen Dreiecke noch n—1 kongruente Dreiecke zu zeichnen und mit der Spitze so zusammen zu legen, daß dieselben die Ebene ausfüllten.

Es könnte aber auch

b. der **Eckenhalbmesser** oder das **Apostema** gegeben sein; in beiden Fällen könnte man eines von den n gleichschenkligen kongruenten Dreiecken zeichnen und dann auch das ganze Vieleck. Der Eckenhalbmesser halbirt den Winkel des regelmäßigen Vielecks; die beiden Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks, in welchem der Eckenhalbmesser der Schenkel ist, sind zusammen so groß als der ganze Winkel des regelmäßigen Vielecks; zieht man denselben von 180° ab, so findet man den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, von welchem der Eckenhalbmesser der Schenkel ist und kann dasselbe demnach konstruiren. Der Winkel an der Spitze $= \frac{460^\circ}{n}$ wäre auch ganz unabhängig zu finden gewesen, wenn man die Ebene um einen Punkt herum in n gleiche Theile zerlegt hätte. Dieß geschieht mit dem Transporteur — aber die rein geometrische Anfertigung desselben setzt wieder die Möglichkeit und Fertigkeit voraus, den Kreisumfang in n gleiche Theile zu zerlegen, was bei den Körpern mit runder Grundfläche zur Sprache kömmt. Übrigens ist auch durch den Eckenhalbmesser, durch den rechten Winkel und durch den halben Umfangswinkel oder durch den halben Winkel an der Spitze das halbe gleichschenklige Dreieck, also auch das ganze

gleichschenklige Dreieck bestimmt, deren n das regelmäßige Vieleck bilden. Dasselbe findet Statt, wenn man das Apostema oder den Seitenhalbmesser kennt; denn aus demselben, dem rechten Winkel, dem halben Umfangswinkel oder dem halben Winkel an der Spitze ist das rechtwinklige Dreieck konstruirbar, welches die Hälfte des gleichschenkligen Dreiecks ist, deren n das regelmäßige Vieleck bilden.

Faßt man die Vergleichung der nEcke nach ihrer Größe allein in's Auge, so sind die regelmäßigen Vielecke einander an Größe gleich, wenn sie die Seite, das Apostema oder den Seitenhalbmesser und den Eckenhalbmesser oder Strahl vom centrischen Punkte nach einer Ecke gleich haben. Unregelmäßige Vielecke sind flächengleich, wenn die Dreiecke oder Vierecke, durch welche dieselben gebildet wurden, flächengleich sind. Wollte man übrigens zwei unregelmäßige Vielecke bezüglich ihrer Fläche vergleichen, könnte man dieselben durch fortwährende Verwandlung in ein (n—1). Eck zuletzt in ein Dreieck verwandeln und bei den Dreiecken Grundlinie und Höhe vergleichen; oder man könnte die Dreiecke in Oblongen, diese in Quadrate verwandeln, so hinge dann die Vergleichung nur noch von der Vergleichung der Quadratseiten ab.

Aufgabe.

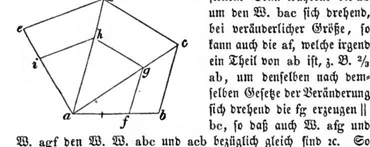
Ein Fünfeck in ein Quadrat zu verwandeln.

Man verwandelt zuerst das Fünfeck abcde in das Dreieck fgd, welches flächengleich ist; das flächengleiche Dr. fgd oder hik verwandelt man in das Oblongum mit derselben Grundlinie hi und der halben Dreiecshöhe li; das Oblongum endlich in das flächengleiche Quadrat, welches die Seite ln hat.

Der Flächeninhalt eines Vielecks wird berechnet, wenn man den Flächeninhalt der Dreiecke, Vierecke, Trapeze berechnet, in welche dasselbe durch eine oder mehrere, sich schneidende Diagonalen zerfällt. Der Flächen-

inhalt eines der nDreiecke, welche die regelmäßigen Vielecke bilden, ist = halbe Seite mal Apostema; also die Fläche des ganzen nEcks = n mal halbe Seite mal Apostema = halber Umfang mal Apostema.

Will man endlich die Vielecke bezüglich ihrer Gestalt vergleichen, abgesehen von ihrer Größe, so können sie dieselbe gleich oder ungleich haben, d. h. ähnlich sein oder unähnlich. Alle regelmäßigen Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich oder man kann sie nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden denken. Sie sind winkelgleich und das Seitenverhältniß ist auch ein sich gleichbleibendes. Man kann sich aber auch, ähnlich wie Dreiecke und Vierecke, so auch Vielecke nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden und dadurch, bei Winkelgleichheit und Seitenverhältnißgleichheit, als ähnlich vorstellen. Denn während die ab um den W. bac sich drehend, bei veränderlicher Größe, so kann auch die af, welche irgend ein Theil von ab ist, z. B. $\frac{2}{3}$ ab, um denselben nach demselben Gesetze der Veränderung sich drehend die fg erzeugen || bc, so daß auch W. afg und



W. agf den W. W. abc und acb bezüglich gleich sind 2c. So sind es also 3 ähnliche Dreiecke, von denen jedes mit dem folgenden eine Seite gemein hat (Dr. afg ∞ Dr. abc. Dr. agh ∞ Dr. acd 2c., afg hat mit ahg die Seite ag, abc mit acd die Seite ac gemein 2c.), welche durch Zusammensetzung das ähnliche Fünfeck bilden und umgekehrt lassen sich zwei ähnliche Fünfecke in 3 bezüglich ähnliche Dreiecke zerlegen. Ganz analog dem Früheren ist a der Ähnlichkeitspunkt; es ist sehr einfach und zwar durch das Legen von Parallelen über einer beliebigen oder gegebenen Geraden Figuren zu zeichnen, welche gegebenen Figuren ähnlich sind.

Die Umfänge ähnlicher Vielecke stehen in demselben Verhältnisse, wie die ähnlich liegenden Seiten. So ist der Umfang von dem Fünfeck afghi = $\frac{2}{3}$ des Umfangs des Fünfecks abcde, weil af = $\frac{2}{3}$ ab, ebenso fg = $\frac{2}{3}$ bc, gh = $\frac{2}{3}$ cd, ih =

$^2/_3$ ed ist. Eine nach dem Weimarischen Verjüngungsverhältnisse gezeichnete ähnliche Figur (nEck), welche einen Stadt- oder Flurplan darstellt, hat soviel Linien im Umfange, als in der Natur halbe oder ganze Ruthen à 1000‴ oder 2000‴ par. Soll der Umfang einer ähnlichen Figur n mal oder $\frac{1}{n}$ mal so groß werden, so braucht man eine entsprechende Seite, über welcher die ähnliche Figur konstruirt wird, nur n mal oder $\frac{1}{n}$ mal so groß zu machen.

In Bezug auf ihre Flächen verhalten sich zwei ähnliche Figuren, wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten. Das könnte man schon schließen aus dem durch die Induktion sich zeigenden Gesetze. Es ergiebt sich aber sehr einfach, wenn man bedenkt, daß jedes Dr. der einen von den ähnlichen Figuren mit dem folgenden eine Seite gemein hat. Dann ist nach voriger Figur

$$\text{Dr. abc} : \text{Dr. afg} = ac^2 : ag^2 = \text{Dr. acd} : \text{Dr. agh} = ad^2 : ah^2 = \text{Dr. ade} : \text{Dr. ahi}.$$

Daher

$$\text{Dr. abc} + \text{Dr. acd} + \text{Dr. ade} : \text{Dr. afg} + \text{Dr. agh} + \text{Dr. ahi} = ac^2 : ag^2 = ad^2 : ah^2$$

$$\text{Vieleck abcde} : \text{Vieleck afghi} = ac^2 : ag^2 \text{ ꝛc.}$$

Um also ein Vieleck einem andern ähnlich und n oder $\frac{1}{n}$ mal so groß zu machen, muß man die Seite, welche als ähnlich liegende gelten soll, mit $\sqrt{n}$ oder $\sqrt{\frac{1}{n}}$ multipliciren.

In den Plänen von Städten, Dörfern, Fluren, welche im Großherzogthume Sachsen-Weimar-Eisenach nach dem verjüngten Maßstabe gezeichnet werden, betragen die Flächen $\frac{1}{1000000}$ oder $\frac{1}{4000000}$ der ursprünglichen, je nachdem eine Quadratlinie 1000000 □‴ oder 4000000 □‴ bezeichnet oder eine Längenlinie entweder eine halbe Ruthe à 1000‴ par. eine ganze Ruthe à 2000‴ par. darstellt.

Am Schlusse des Kapitels von den Säulen kommen wir noch auf ihre Vergleichung bezüglich ihrer Größe und Gestalt zurück oder nur bezüglich der Größe oder Gestalt. Die Prismen oder Säulen entstehen, wenn irgend eine geradlinige Figur sich mit sich selbst parallel entweder senkrecht oder schief so bewegt, daß die einmal entstandenen Flächen, Linien- und Linienflächenwinkel einander gleich bleiben, bis die sich bewegende Figur eine

gewisse Höhe erreicht hat. Denkt man sich eine Säule durch dieselbe geradlinige Figur 2 mal gebildet, so hätte man zwei kongruente Prismen, welche in ihren Grund- und oberen Flächen, in ihren Seitenflächen und ihrer Anordnung, rechts oder links herum, in ihren möglichen Winkeln und also an Größe und Gestalt übereinstimmten. Wie man bei geradlinigen, ebenen Figuren nicht alle Bestandtheile derselben braucht, um eine an Größe und Gestalt bestimmte Figur zu zeichnen oder zwei kongruente; so auch genügen oft weniger Bestandtheile, um ein Prisma zu konstruiren. Sicherlich ist nur ein Prisma und nicht ein zweites verschiedenes möglich, wenn man die Kanten, Flächenwinkel und Flächenfiguren in bestimmter Reihenfolge und Ordnung kennt. Fände aber eine verschiedene Anordnung derselben Bestandtheile Statt, so hätte man nicht Kongruenz, sondern Symmetrie. Die symmetrischen Körper müssen erst umgekehrt werden, wenn sie kongruent werden sollen. Ausführliches Lehrbuch der ebenen und körperlichen Geometrie von Weller, S. 415. „Ist z. B. die Grundfläche eines Prisma, ferner zwei Flächenwinkel, welche zwei bestimmten anstoßenden Seiten in bestimmter Weise angehören, sowie die Größe und Lage der diesen Seiten zugehörigen Seitenkanten gegeben, so sind auch alle übrigen Seitenkanten, Flächenwinkel und Flächenfiguren zugleich in einer gewissen Reihenfolge und Ordnung bestimmt und es ist dann das Prisma selbst bestimmt. Ein Prisma ist hiernach bestimmt: durch seine Grundfläche, durch das in einem bestimmten Eckpunkte derselben gelegene Raumeck und die zugehörige Seitenkante; denn mit diesem Raumecke sind die oben erwähnten Flächenwinkel und die Lage der Seitenkante bestimmt."

Werden zwei Prismen bezüglich ihrer Größe allein verglichen, so kömmt es auf die Produkte aus Grundfläche und Höhe an. Ist das Prisma $P = G.H$ und das Prisma $p = g.h$, so ist $P : p = G.H : g.h$; werden die Grundflächen gleich, so verhalten sich die Prismen, wie die Höhen; werden die Höhen gleich, wie die Grundflächen.

Bewegt sich aber irgend eine ebene geradlinige Figur senkrecht oder schief aufwärts, und zugleich eine zweite der ersten ähnliche und zwar nach einem ähnlichen Gesetze, so daß die Flächen-, Linien- und Linienflächenwinkel, kurz alle Winkel gleich werden; so daß ferner, wenn die Seiten a, b, c in ihrer Höhe

m, n, o mal enthalten sind, ebenso auch die Seiten α, β, γ der ähnlichen Figur in ihrer Höhe ebenso oft enthalten sind, so ist das zweite Prisma dem ersten ähnlich. Nimmt man an, daß die entsprechenden Dimensionen des zweiten $^2/_3$ von denen des ersten betragen, so hat man $P : p = G.H : g.h$ oder anstatt $G : g = a^2 : \alpha^2$ und anstatt $H = a.m$ und anstatt $h = \alpha.m$, so wird $P : p = a^3.m : \alpha^3.m$ oder $= a^3 : \alpha^3$, d. h. ähnliche Prismen verhalten sich bezüglich ihrer Größe wie die Würfel über ihren Kanten.

Aufgaben.

I. Quadratische Säule.

a. Oberfläche rc.

1) Eine regelmäßige vierseitige (quadratische) Säule hat eine Grundfläche, deren Seite 1′ 9″ ist und eine Höhe von 7′; gesucht wird die Oberfläche.

2) Ein quadratisches Prisma hat 2′ 5″ Grundflächenseite und 6′ 3″ Höhe; wie groß ist der Mantel desselben?

3) Wie groß ist die Seite und der Inhalt der Grundfläche einer quadratischen Säule, deren Mantel 200□′ und deren Höhe 16′ ist?

4) Die Seite der Grundfläche der q. S. verhält sich zur Höhe, wie 2 : 5; die Grundflächenseite ist 1′ 7″; gesucht wird die Oberfläche.

5) Die Diagonale der Grundfläche ist 5′; die Höhe 7′; gesucht wird die Oberfläche.

6) Die Diagonale der Säule ist 10′; die Diagonale der Grundfläche 5′; gesucht wird die Höhe; die Seite der Grundfläche; die Oberfläche.

7) Die Seite der Grundfläche ist 2′; die Höhe 5′; wie groß ist die Oberfläche? Wie wächst dieselbe, wenn die entsprechenden Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder so klein werden?

8) Man will einer quadrat. Säule eine 2, 3, 4, 5, ... n mal so große oder kleine Oberfläche geben; wie vielmal so groß, oder so klein hat man die entsprechenden Dimensionen zu nehmen?

9) In dem Baukasten eines Knaben befinden sich 5 quadratische Säulen. Geht man von der ersten aus, welche 1″ Grundflächenseite und 2″ Höhe hat, so findet man, daß jede Dimension

der 4 folgenden immer um 1″ wächst; wie gestaltet sich die Oberfläche?

10) Wenn man das Netz einer quadratischen Säule konstruiren soll, wie viele und welche Bestandtheile braucht man dazu?

11) Zeichne das Netz einer quadratischen Säule, wenn die Grundfläche 3′, 4′, 5′ Seite und 7′, 8′, 9′ Seite hat nach dem 1000theiligen Maßstabe!

b. Kubikinhalt.

1) Grundflächenseite 4′ 6″; Höhe 5′; wie groß ist der Kubikinhalt?

2) Grundflächenseite 3″; Höhe 4″; gesucht wird der Kubikinhalt.

3) Ein Baumstamm mit quadratischer Grundfläche hat eine Grundflächenseite von $1\frac{1}{2}$′ und eine Länge von 30′; welchen Kubikinhalt hat derselbe? Was kostet derselbe, wenn der Kubikfuß 2 Sgr. kostet?

4) Ein Wasserbehälter mit quadratischer Grundfläche, deren Seite 5′ lang ist, hat 6′ Höhe; welche Wassermenge faßt derselbe? Wie groß ist das Gewicht des Wassers, wenn 1 k′ preuß. 1,072 Loth wiegt?

5) Eine Erdgrube hat 7′ Grundflächenseite, und 9′ Tiefe; welchen Kubikinhalt? Was kostet die Ausschachtung, wenn 1 k′ auszuschachten 6 pf. kostet?

6) Wie wächst oder vermindert sich der Kubikinhalt einer quadratischen Säule, wenn die Seite der Grundfläche und die Höhe 2, 3, 4 . . . n mal so groß oder so klein wird?

7) Es soll eine quadratische Säule konstruirt werden, welche einer andern ähnlich, aber 2, 3, 4, 5 mal an Kubikinhalt größer oder kleiner ist.

8) Diagonale der Grundfläche 5′, Höhe 8′, gesucht der Kubikinhalt.

9) Der Kubikinhalt einer quadratischen Säule beträgt 108 k′; die Seite der Grundfläche ist 3′; wie groß ist die Höhe der Säule und der Mantel?

10) Der Mantel einer Säule, welche 200 k′ Inhalt hat, beträgt 100 □′; wie groß ist die Seite der Grundfläche und die Höhe?

11) Was wiegt eine eiserne Säule, deren Grundflächenseite

4″ und deren Höhe 7″ ist, wenn 1 k″ preuß. Wasser = 1,072 Loth wiegt und das specif. Gewicht = 7,2 ist?

12) Wie viele und welche Bestandtheile braucht man, um eine quadratische Säule zu konstruiren?

13) Was kostet eine massive kupferne Säule, welche 3″ Grundflächenseite und 7″ Höhe hat, wenn das specif. Gewicht = 8,78 ist und der Centner Kupfer 45 Thlr. kostet?

II. Oblongische Säule.

a. Flächen an derselben und Oberfläche.

α) Berechnung des Oblongums.

1) Wie groß ist der Umfang eines Oblongums und der Flächeninhalt, wenn die Grundlinie und Höhe ist: 35′ und 20′; 8° 9′ und 3° 4′; 100° 7′ 5″ und 10° 8′ 4″; 3′ 5″ 7‴ und 7′ 2″ 8‴ (theils d, theils dd)?

2) Der halbe Umfang eines Oblongums beträgt 99°; die Grundlinie verhält sich zur Höhe wie 5 : 4; wie groß sind beide?

3) Die beiden Seiten eines Oblongums sind 19′ und 7′; 12″ und 5″; 7′ 5″ 3‴ und 3′ 2″ 5‴ dd; wie groß ist die Diagonale?

4) Die Diagonale eines Oblongums ist 20′ lang; die Grundlinie ist zweimal so groß, als die Höhe; wie groß ist jede? oder die Grundlinie ist $^3/_4$ von der Höhe; wie groß ist jede?

5) Wenn die beiden Seiten eines Oblongums 5′ und 8′ sind, wie groß ist der Radius des Kreises, welcher um dasselbe beschrieben werden kann?

6) Ein oblongischer Boden soll mit oblongischen Platten belegt werden; die beiden Dimensionen des Bodens und der Platte sind 24′ und 11′; 4′ und 2′; wie viele Platten braucht man?

7) Ein Saal soll gedielt werden; der Quadratfuß zu dielen kostet 2 sgr. 6 pf.; die Dimensionen des Saales sind 50′ und 25′; was kostet derselbe?

8) Wieviel Breter braucht man zur Dielung eines oblongischen Zimmers, dessen Dimensionen 30′ und 20′ sind, ein Bret ist 12′ lang und $1\frac{1}{2}$′ breit?

9) Ein Kasten von Holz, oben offen, soll inwendig mit Kupferblech beschlagen werden; ein Quadratfuß von der gegebenen Dicke

kostet 21 Sgr.; die einzelnen Dimensionen der Länge, Breite und Höhe sind 5′, $4\frac{1}{2}$′ und $3\frac{1}{4}$′.

10) Gegeben ein Garten in oblongischer Form, dessen Dimensionen 190′ und 130′ sind; in demselben befindet sich ein 70′ langes und 45′ breites Kartoffelland und durch denselben nach der Länge und Breite gehen zwei 5′ breite Wege; wieviel Gartenland bleibt zu andern Zwecken übrig?

11) Länge, Breite und Höhe eines Zimmers sind 30′, 20′ und 12′; was kostet a. die Dielung, wenn 1 □′ 2 sgr. kostet? b. der Anstrich der Decke, wenn 1 □′ $1\frac{1}{2}$ pf. kostet; c. das Tapeziren der 4 Wände, wenn ein 80□′ haltendes Stück Tapete 7 sgr. 6 pf. kostet; die beiden Thüren sind 7′ hoch und 4′ breit; die drei Fenster sind 5′ hoch und $3\frac{1}{2}$′ breit; rings herum läuft eine Lambris von 2′ Höhe; das Anstreichen der Thüren auf beiden Seiten und der Lambris kostet für den Quadratfuß 8; der Fensteranstrich kostet im Ganzen 1 Thlr. 15 sgr. Was kostet die Herstellung des Zimmers?

12) Quadratinhalt eines oblongischen Gartens 18□° 97□′ 33□″; die eine Dimension 3° 8′ 5″; gesucht die andere.

13) Ein Ackerstück hat 200□′; die Länge desselben ist 20 mal so groß, als die Breite; wie groß sind beide?

14) Die Quadratruthe kostet 2 Thlr.; es werden für einen Acker, der 26° breit ist, 375 Thlr. bezahlt, wie lang ist derselbe?

15) Summe zweier anliegenden Seiten ist 56′; die eine ist um 5′ kleiner, als die andere; gesucht werden beide Dimensionen und die Fläche?

16) Zwei Oblongen sind ähnlich; wie wachsen Umfang und Fläche, wenn die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder klein werden?

17) Ein oblongischer Plan soll 2, 3, 4 ... n mal so groß oder klein werden; wie gestalten sich dann die Dimensionen?

18) Grundlinie des Oblongums 100′; Höhe 30′; gesucht Diagonale und Inhalt.

19) Diagonale 110′; Höhe 90′; gesucht die Fläche.

20) Eine Seite 50′; Diag. 80′; gesucht der Inhalt.

21) Inhalt 400□′; Seite 36′; gesucht die Diag.

22) Diag. 20′; Höhe zur Grundlinie wie 5 : 7; gesucht G. G. und Inhalt.



23) Wenn ab = 50° und ad = 40° und das Oblongum von a aus in drei Theile getheilt werden soll, die sich wie 1 : 2 : 3 verhalten; wohin fallen die Theilungslinien und wie groß werden dieselben, wenn der kleinste Theil an ad zu liegen kömmt?

24) Wie wenn die oblong. Wiese von p aus getheilt werden sollte und zwar in 3 gleiche Theile; ab = 70°; ad = 45°; bp = 20°.

β) Konstruktion des Oblongums.

25) Ein Oblongum soll gezeichnet werden, wenn die beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten gegeben sind.

26) Gegeben eine Seite und der Winkel, welchen eine Diagonale mit derselben macht.

27) Gegeben eine Seite und die Diagonale.

28) Gegeben eine Seite und der Winkel, unter welchem sich die Diagonalen schneiden.

29) Diagonale und Winkel derselben mit einer Seite.

30) Eine Seite, Summe der Diagonale und anderen.

31) Diagonale und Winkel, unter welchem sich die Diagonalen schneiden.

32) Umfang und Diagonale.

33) Diagonale und Unterschied der Seiten.

34) Zu einem gegebenen Oblongum über gegebenen Seiten ähnliche Oblongen zu zeichnen.

γ) Oberfläche der oblongischen Säule.

35) Wie groß ist die Oberfläche einer senkrechten, oblong. Säule, wenn die Seiten der Grundfläche 2′ und 4′, die Höhe 15′ sind?

36) Die drei bestimmenden Dimensionen verhalten sich, wie 3 : 5 : 11; die Oberfläche beträgt 350 □′; wie groß sind die Dimensionen?

37) Mantel 300 □″; ganze Oberfläche 350 □″; eine Dimension der Grundfläche 7″, wie groß ist die andere und die Höhe?

38) Der Mantel einer 12″ hohen oblong. S. beträgt 120 □″; die Seiten der Grundfläche verhalten sich, wie 2 : 5; wie groß sind dieselben?

39) Eine oblong. S. hat eine Oberfläche von 200 □′; eine

andere ähnliche, deren Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder klein sind, hat eine wie große Oberfläche?

40) Man will eine oblong. Säule konstruiren, deren Oberfläche 2, 3, 4, . . . n mal so groß oder klein werden soll, wie groß muß man die entsprechenden Dimensionen nehmen?

b. Kubikinhalt der oblongischen Säule.

41) Wie groß ist der Kubikinhalt einer obl. S., wenn die drei Dimensionen sind: l = 3″; 4′ 5″; 6′ 5″ 3‴ und b = 2″; 3′; 5′ 2″ 4‴ und h = 7″; 8′ 3″; 10′ 8″ 7‴.

42) Eine Mauer ist 9′ hoch; 120′ lang und 3′ dick; gesucht der Kubikinhalt.

43) Länge eines Grabens 200′; Tiefe 5′; Breite $3\frac{1}{2}$′; welcher Kubikinhalt Erde ist auszustechen?

44) Länge eines Baumstammes 25′; Dimensionen der Grundfläche 2 und $2\frac{1}{2}$′; gesucht der Kubikinhalt und Preis, wenn 1 k′ 5 sgr. kostet.

45) Wieviel Klaftern à 108 k′ kann man aus einem Baumstamme machen, der 30′ lang, 2′ hoch und 3′ breit ist?

46) Wieviel preußische Quart faßt ein Wasserbehälter, dessen Dimensionen im Lichten 6′, 5′ und 4′ sind, wenn 1 preuß. Quart = 64 k″ ist?

47) Was kostet eine Mauer, welche 60′ lang, 8′ hoch und 2′ ist und aus Backsteinen aufgeführt werden soll, von denen jeder 10″ lang, 4″ breit und 3″ dick ist? 100 Backsteine kosten 1 Thlr. 5 sgr.

48) Ein Wasserbehälter hat die drei bestimmenden Dimensionen 8′, 5′, 4′; derselbe soll durch eine Röhre gefüllt werden, welche in jeder Minute 30 Quart liefert (1 preuß. Q. = 64 k″); in welcher Zeit wird derselbe gefüllt?

49) Ein Fruchtkasten ist 15′ lang, 4′ breit und 5′ hoch; wie viel preuß. Scheffel Getreide faßt derselbe, wenn $^1/_{24}$ Wispel oder 1 preuß. Scheffel = 3072 k″ ist?

50) Ein Teich, mit Wasser gefüllt, ist 230′ lang 150′ breit und 8′ tief; in jeder Sekunde laufen 9 k′ Wasser zu, aber 15 k′ Wasser ab, in welcher Zeit wird derselbe entleert sein?

51) Inhalt der o. S. 384 k′; Grundfläche 25 □′; gesucht die Höhe.

52) Inhalt 200□"; die beiden Dimensionen der Grundfläche = 5" und 4", gesucht die Höhe.

53) Eine Mauer hält 5000 k'; sie ist 8' hoch und 4' dick; wie lang?

54) Der Kubikinhalt einer oblongischen Säule beträgt 300 k"; die 3 Dimensionen verhalten sich, wie 3 : 4 : 5, wie groß sind dieselben?

55) In einer oblong. S. läßt man die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder klein werden; wie vielmal so groß oder klein wird der Kubikinhalt?

56) Bei einer oblong. S. soll der Kubikinhalt 2, 3, 4, . . . n mal so groß werden; wie viel mal so groß wird man die bestimmenden Dimensionen machen müssen?

57) Eine Kupferplatte ist 3' lang, 2' breit und $^{1}/_{5}$' dick; was wiegt dieselbe, wenn 1 k" Wasser = 1,072 Loth wiegt und das specif. Gewicht = 8,8 ist?

58) Ein Backstein ist 9" lang, $4\frac{1}{2}$" breit und $2\frac{1}{4}$" dick; das spec. Gew. = 2,2; wie groß ist das Gewicht?

59) Was wiegt die in einem Zimmer befindliche Luft, wenn das specif. Gewicht derselben = $\frac{1}{770}$ ist und die drei Dimensionen derselben 12', 30' und 40' groß sind?

60) Wie groß ist der Druck der Luft auf einen Menschen, wenn dessen Oberfläche zu 15□' anzunehmen ist, der Barometerstand 27" 3"' und das spec. Gew. des Quecksilbers = 13,5 ist?

61) Ein Stück Kupfer mit quadrat. Basis wiegt 3 Pfund; Länge 8"; spec. Gew. 8,8; gesucht die Seite der Grundfläche.

62) Eine obl. S. von Eichenholz ist 20' lang, 3' breit und 4' dick; das spec. Gew. 0,65; wie tief sinkt dieselbe im Wasser ein, wenn dieselbe mit der breiten Seitenfläche eingesenkt wird?

III. Aufgaben über alle übrigen Säulen (rhombische, rhomboidische, dreieckige, viereckige, vieleckige, regelmäßige).

a. Linien, Flächen, Oberflächen.

α) Rechnerisches.

1) Wie groß ist der Umfang eines Rhombus, wenn eine Seite 5"; 7' 8" ist?

2) Die beiden Seiten eines Rhomboids betragen 5' und 7' 9"; gesucht der Umfang.

3) Wie findet man den Umfang eines Dreiecks, je nachdem dasselbe gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig ist?

4) Wie findet man überhaupt den Umfang einer Figur, in's Besondere einer regelmäßigen?

5) Wie findet man bei einer regelmäßigen Figur den Ecken- und Seitenhalbmesser (Apostema)?

6) Bei einem Rhombus sind Grundlinie und Höhe: G = 9′; 8′ 5″; 7′ 5‴ 3‴ und H = 3′; 4′ 7″; 5′ 8″ 3‴, sowohl d, als dd, gesucht wird die Fläche.

7) Bei einem Rhomboid sind Grundlinie und Höhe: G = 5° 6′; 10° 9′; 20° 8′; H = 30° 5′; 50′ 6′; 100° 3′; gesucht wird der Flächeninhalt.

8) Ein Rhombus hat 375 □′ 63 □″ Inhalt bei einer Höhe von 10′ 5″; gesucht wird die Seite.

9) Inhalt des Rhombus 3000 □′; Seite 81′ 5″; gesucht die Höhe.

10) Wie groß ist die Seite eines Quadrats, welches an Fläche einem schiefwinkligen Pgm gleich ist, welches eine G hat = 9′ und H = 4′; oder 4° 8′ und 5° 6′; oder 5′ 6″ und 7′ 9″?

11) Ein Ackerstück ist 36° 8′ lang und hat eine Höhe von 18° 5′; was kostet dasselbe, wenn die Quadratruthe 1 Thlr. 25 Sgr. kostet?

12) Zwei Pgme haben gleiche Grundlinie; die Inhalte beider stehen in dem Verhältnisse von 5 : 11; die Höhe des ersten ist 8′; wie groß ist die Höhe des zweiten?

13) Zwei Pgme haben gleiche Höhe; der Inhalt des zweiten ist $6\frac{3}{4}$ mal so groß, als der Inhalt des andern; die Grundlinie des ersten ist 5′ 8″ 3‴, wie groß ist die des andern?

14) Wie wächst die Fläche eines schiefwinkligen Pgms, wenn die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder so klein werden?

15) Wie groß müssen die Seiten und bestimmenden Dimensionen eines Pgms werden, welches 2, 3, 4, . . . n mal so groß werden soll, als das ursprüngliche und demselben ähnlich?

16) Suche den Inhalt folgender Dreiecke:

a. G = 16,5′ und H = 13,4′
b. = 8,14′ „ = 12,7′
c. = 4,05′ „ = 13,32′

d. G = 0,15′ Meilen und H = 0,072′ Meilen.
e. = 5′ 8″ 3‴ " = 6′ 7″ 5‴.

17) Wie groß ist in folgenden Dreiecken die Höhe, wenn

a. die Grdl. = 11,5° u. die Fläche = 100 □° ist
b. " " = 14,4 " " " = 96,5 □°
c. " " = 17,7 " " " = 83,4 □°
d. " " = 15° 7′ " " " = 300 □° 88 □′
e. " " = 3′ 5″ 7‴ " " " = 35 □′ 83 □′ 75 □‴.

18) Wie groß würden die Grundlinien sein, wenn die Zahlen bei a, b 2c. in der Aufgabe Nr. 16 die Höhen bedeuten?

19) Ein Dreieck hat 36′ Grundlinie und 24′ Höhe; wie hoch muß ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte sein, wenn seine Grundlinie 30′ beträgt? Ebenso, wenn

die Grdl. 20′, die Dimensionen der flächengleichen 15′ u. 3′ sind
" " 3,7′ " " " " " " 18′ " 7,5′
" " 4,4′ " " " " " " 9,3′ " 2,5′

20) Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie 3 : 4 : 5, wie müssen die zu denselben gehörigen Höhen sich verhalten?

21) Wie verhalten sich die Flächen zweier Dreiecke von gleicher Höhe oder von gleicher Grundlinie?

22) Wie wächst der Umfang eines Dreiecks, wenn in einem andern ähnlichen die Seiten 2, 3, 4, ... n mal so groß werden?

23) Wie wächst oder vermindert sich die Fläche des Dreiecks, wenn die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4 . . . n mal so groß oder klein werden?

24) Wie groß muß man in einem Dreieck die bestimmenden Dimensionen nehmen, wenn es 2, 3, 4, . . . n mal so groß werden soll?

25) Ein dreieckiges Feld hat 14° 6′ Grundlinie und die zu derselben gehörige Senkrechte beträgt 28° 5′; auf 72 □° kömmt ein Scheffel Aussaat, wieviel Scheffel braucht man zur Aussaat?

26) Eine dreieckige Wiese hat 77° 5′ Grundlinie und 63° 4′ Höhe; eine Quadratruthe kostet 1 Thlr. 5 sgr., wie hoch kömmt die Wiese?

27) Die Diagonalen eines Rhombus sind 7′ 5″ 3‴ und 5′ 6″ 2‴, wie groß ist der Inhalt d und dd?

28) Die Diagonale eines Quadrats ist 9′ 5″; gesucht die Fläche; d und dd.

29) Seite des Quadrats 6′ 5″; gesucht die Höhe eines flächengleichen Dreiecks von 5′ 7″ Grundlinie.

30) Der Inhalt eines Dr. ist 100 □°; die Grundlinie 10°; um wieviel muß die Höhe größer werden, wenn die Grundlinie um 2° 4′ kleiner wird, die Fläche aber dieselbe bleiben soll?

31) Grundlinie 12′; Höhe 8′; wie gestaltet sich der Inhalt, wenn man die Grundlinie um 2′ 4‴ kleiner und die Höhe um ebensoviel größer macht?

32) Die Höhe eines Dreiecks ist 3 mal so groß, als die Grundlinie; der Inhalt 68 □° 44 □′; wie groß sind beide?

33) Grundlinie + Höhe = 70′; die Grundlinie ist um 12′ größer; gesucht der Inhalt.

34) Höhe = $1\frac{1}{2}$ mal Grundlinie; der Inhalt hat so viel Flächeneinheiten, als die Höhe Längeneinheiten; gesucht Grundlinie, Höhe und Inhalt. des Dr.

35) Die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dr. sind 3′ und 4′; 3° 4′ und 8° 5′; 9° 8′ 6″ und 25° 3′ 4″; gesucht die Hypotenuse.

36) Die Hypotenuse ist 30′, die eine Kathete 9′, wie groß die andere? ebenso für die Zahlwerthe 9′ und 3′; 100° und 25°?

37) Eine schiefe Ebene ist 44′ lang; die Höhe derselben beträgt 8′; wie groß ist ihre wagerechte Ausdehnung?

38) Hypotenuse 25′ 6″, eine Kathete 13′ 5″; gesucht die Fläche.

39) Inhalt 295 □° 33 □′; eine Kathete 9° 5′; gesucht die Hypotenuse.

40) In einem gleichschenkligen Dr. ist der Schenkel 38′ und die Höhe zur Grundlinie 25′; gesucht die Fläche.

41) Grundlinie 8,4; ein Schenkel 5,25′; gesucht die Fläche.

42) Umfang 24′; Schenkel 7′ 5″; gesucht der Inhalt.

43) Umfang 50′; Höhe 10′; gesucht der Inhalt.

44) Inhalt 500 □′; Höhe 25′; gesucht der Schenkel.

45) Aus der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dr. von 9′ soll die Fläche gefunden werden.

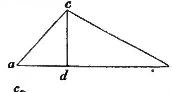
46) Die zur Hyp. gehörige Höhe eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dr. beträgt 5′; welche Fläche?

47) Inhalt der gleichschenklig-rechtw. Dr. = 200 □′; gesucht die Seiten.

48) Seite des gleichseitigen Dr. = 7'; gesucht der Inhalt.

49) Höhe eines gleichseitigen Dr. = 10'; gesucht Seite und Inhalt.

50) Inhalt des gleichseit. Dr. 8 □' 39 □"; gesucht Seite und Höhe.



51) Gesucht die Fläche des Dr. abc, wenn ab = 9° 5', ac = 3° 2' und bd = 2° 7' gemessen werden.

52) Gesucht der Inhalt, wenn ab = 5° 8'; bd = 8° 3' und ac = 4° 2' ist.

53) Die drei S. S. eines Dreiecks sind 8', 10', 15', gesucht werden die 6 Abschnitte, welche durch die Höhen gebildet werden und die Fläche.

54) Zwei S. S. sind 8' und 11'; die Höhe zur dritten 5'; gesucht der Inhalt und die dritte Seite.

55) Die drei Höhen eines Dr. sind 8', 10', 12'; gesucht die Seiten und der Inhalt.

56) Inhalt eines Dr. 3400 □'; Verhältniß der Seiten wie 3 : 4 : 5; gesucht die Seiten.

57) Die drei Höhen verhalten sich wie 1 : 2 : 3; Inhalt 1000 □'; gesucht die Höhen.

58) Seite des Rhombus 5'; ein Winkel 60°; gesucht die Fläche; S. 6', Winkel 45°.

59) Höhe 6°; Winkel 60°; gesucht Inhalt und Seite des Rhombus.

60) Seite des Rhombus 15'; eine Diagonale 36'; gesucht der Inhalt.

61) Die beiden Diag. sind 20' und 25'; gesucht der Umfang.

62) Seite 30'; Diag. 39'; gesucht Höhe und Inhalt des Rh.

63) Höhe 48'; Diagonale 60'; gesucht der Inhalt.

64) Fläche 200 □°; Diag. 25°; gesucht die S.

65) In einem Rhomboid sind die beiden S. S. 100° und 150°; die zu demselben gehörige Diagonale 180°; gesucht die andere Diag. und Fläche.

66) Umfang eines Rhomboids 1200′; eine S. 200′; Diag. 300′; gesucht der Inhalt.

67) Eine S. des Rhomboids 40′; die beiden Diag. 70′ und 30′; gesucht die an der ersten anliegende S. und der Inhalt.

68) Beide Höhen des Rhomboids 6′ und 7′; eine Diag. 12′; gesucht der Inhalt.

69) Seite des Rhomboids 10′; zugehörige Höhe 7′; eine Diag. 20′; gesucht die Höhe, welche zur unbekannten S. gehört.

70) Inhalt 200 □°; zwei anstoßende S. S. sind 15° und 16° lang; gesucht die Diag.

β) Konstruktives.

1) Man zeichne folgende Pgme:

a.	Fläche 20 □″,	Grundlinie	5″;	Winkel	30°
b.	„ 20 □″,	„ „	5″;	„	60°
c.	„ 20 □″,	„ „	5″;	„	70°
d.	„ 30 □″,	„ „	6″;	„	25°.

2) Man zeichne einen Rhombus

a. aus einer Seite und dem anliegenden W.

b. aus einer S. und dem Unterschiede des stumpfen und spitzen W.

c. aus der Höhe und einem Winkel.

d. aus Seite und Höhe.

e. aus der Höhe und einer Diagonale.

f. aus der Seite und Diagonale.

g. aus der Diagonale und dem W., durch welchen dieselbe geht.

h. aus beiden Diagonalen.

i. aus einer Diag. und dem gegenüberliegenden W.

k. aus der Seite und der Summe beider Diagonalen.

l. aus der Seite und dem Unterschiede der Diagonalen.

3) Ein Rhombus ist gegeben; man konstruire einen andern ähnlichen, dessen Umfang 2, 3, 4, . . . n mal und dessen Fläche 4, 9, 16 . . . n^2 mal so groß ist.

4) Ein Rhombus beträgt 200 □° und hat einen Winkel von 60°; man zeichne einen ähnlichen, dessen Inhalt 200 □‴ groß ist.

5) Zeichne ein Rhomboid

a. aus den beiden S. S. und dem Zwischenwinkel.

b. aus den 2 S. S. und der zur einen gehörigen Höhe.

c. aus einer S. und den W. W., welche die Diagonalen mit ihr machen.
d. aus einer Seite und den beiden Diagonalen.
e. aus einer Diagonale, einem W. und einer Höhe.
f. aus einer Diag., dem gegenüberliegenden W. und dem W., welchen sie mit einer S. bildet.
g. aus einer S., ihrer Höhe und einer Diag.
h. aus beiden Diag. und einer Höhe.
i. aus dem Umfang, einer Diag. und ihrem Gegenwinkel.
k. aus einer S., einer Diag. und dem W., den beide einschließen.
l. aus einer Diag. und den beiden anstoßenden S. S.
m. aus den beiden Diag. und dem W., unter dem sie sich schneiden.
n. aus einer S., einem anliegenden W. und der Diagonale, welche durch den andern W. geht.
o. aus einer S. und den beiden Höhen.

6) Zu einem gegebenen Rhomboid ein anderes zu zeichnen, welches einen 2, 3, 4 . . . . n mal so großen oder kleinen Umfang hat.

7) Zu einem gegebenen Rhomboid ein anderes, ähnliches zu zeichnen, welches einen 2, 3, 4, . . . n mal so großen Flächeninhalt hat.

8) Zu einem Rhomboid über einer gegebenen Geraden ein demselben ähnliches zu zeichnen.

9) Ein Dreieck aus seinen früher angedeuteten, zur Bestimmung nothwendigen Bestandtheilen zu zeichnen (a. aus 2 S. S. und dem eingeschlossenen W., b. aus einer S. und den beiden anliegenden W. W., c. aus einer S., einem an- und einem gegenüberliegenden W., d. aus 2 S. S. und dem W., welcher der größeren gegenüberliegt).

10) Man zeichne ein Dreieck, wenn gegeben sind Grundlinie, Höhe und Seite; Grundlinie, Höhe und ein W. an der Grundl.;

11) Zeichnung des rechtwinkligen Dreiecks, wenn gegeben sind: die beiden Katheten; die Hypotenuse und eine Kathete; die Hypotenuse und ein spitzer W.; eine Kathete und ein spitzer W.; eine Kathete und der Unterschied der spitzen W. W.; Hypotenuse und Unterschied der spitzen W. W.; Höhe aus dem rechten W. und

ein Abschnitt der Hypot.; Höhe und eine Kathete; ein Abschnitt der Hypot. und die anliegende Kathete; ein Abschnitt der Hypot. und der anliegende spitze W.; die Höhe und der gegenüberliegende W.; eine Kath. und die Summe aus der Hypot. und andern Kath.; Hypot. und Summe beider Kath.; Hypot. und Unterschied der Katheten; Summe der Hypot. und einen Kathete und dem von denselben eingeschlossenen W.; Summe der beiden Kath. und ein spitzer W.; Summe der Kath. und der Unterschied des spitzen W.; Unterschied der Kath. und ein W., welcher der einen Kath. gegenüberliegt; ein spitzer W. und der Unterschied zwischen Hypot. und einer Kathete; ein spitzer W. und der Unterschied zwischen der Höhe und einen Kathete; Hypot. und Höhe; der Umfang und ein spitzer W.; die Katheten sollen sich wie 1 : 2 verhalten; der eine spitze W. soll 2 mal so groß sein, als der andere oder auch 3 mal; eine Kathete und das Verhältniß der spitzen W. W., wie 2 : 1; Hypot. und dasselbe Verhältniß; eine Kathete und die andere soll $1/2$ von der Hypot. werden.

12) Ein gleichschenkliges Dr. soll gezeichnet werden, wenn gegeben sind:
Grundlinie und W. an derselben: Grundl. und Schenkel; Schenkel und W. an der Grdl.; Grdl. und Höhe; Schenkel und Höhe; Schenkel und W. an der Spitze; Höhe und W. an der Grdl.; Höhe und W. an der Spitze; Grdl. und W. an der Spitze; Schenkel und zugehörige Höhe; W. an der Grdl. und zugehörige, auf die Gegenseite gefällte Höhe; W. an der Spitze und Höhe, welche zum Schenkel gehört; W. an der Spitze und Unterschied zwischen Grdl. und Schenkel; Grundl. und Schenkel + Höhe; Umfang und Höhe; Grdl. und zum Schenkel gehörige Höhe; Schenkel + Grdl. und Winkel an letzterer; Schenkel + Grdl. und W. an der Spitze; Schenkel — Höhe und W. an der Spitze; Schenkel + Höhe und W. an der Spitze; Höhe + Schenkel und W. an der Grdl.; Umfang und W. an der Grdl; Umfang und W. an der Spitze; W. an der Grdl. und Grdl. — Schenkel oder Schenkel — Grdl.

13) Das gleichschenklig-rechtwinklige Dr. soll gezeichnet werden, wenn gegeben ist: die Hypotenuse; die Kathete; die Höhe; Höhe + Kathete; Kathete — Höhe; Umfang; Hypot. + Kathete; Hypot. — Kathete.

14) Das gleichseitige Dr. soll gezeichnet werden, wenn gegeben sind: die Höhe; der Umfang; Seite — Höhe; Seite + Höhe; Höhe + Abschnitt der Grdl.;

15) Zeichne das Dr., wenn folgende Bedingungen gegeben sind: die beiden Abschnitte, welche durch die Senkrechte auf der Grdl. gemacht sind und eine Seite; die beiden Abschnitte der Grdl. und ein W.; die beiden Abschn. und die Höhe; die Höhe und die beiden anliegenden S. S.; die Höhe, eine anliegende S. und der W., welcher derselben gegenüberliegt; die Höhe und die beiden W. W. an der Grundlinie; die W. W. an der Grdl. und eine Höhe aus einem derselben; eine S., der an derselben liegende W. und die Höhe aus demselben; Höhe, W. an der Spitze und ein W. an der Grdl.; ein W. und die beiden zu den Schenkeln gehörigen Höhen; Grdl., der kleinere anliegende W. und der Unterschied der andern S. S.; ein W., der Unterschied der einschließenden S. S. und die Höhe auf eine dieser S. S.; S. + S., der eingeschlossene W. und ein gegenüberliegender; Grdl., ein anliegender W., und die Summe der andern S. S.; eine S., der gegenüberliegende W. und die Summe der andern S. S.; zwei W. W. und die Summe zweier Seiten; Umfang und Winkel an der Grdl.; Umfang, Höhe und ein W. an der Grdl.; Grdl., Gegenwinkel derselben und Unterschied der andern S. S.; Summe zweier S. S. und ihre beiden Gegenwinkel; Summe zweier S. S., eine Höhe zur S., und die dritte S.

16) Zu einem beliebigen Dr. soll ein anderes ähnliches gezeichnet werden, welches einen 2, 3, 4, . . . n mal so großen Umfang hat.

17) Zu einem beliebigen Dr. soll ein anderes ähnliches gezeichnet werden, welches einen 4, 9, 16 . . . n^2 mal so großen oder kleinen Flächeninhalt hat; wieviel mal so groß muß man die entsprechenden Dimensionen machen?

18) Zu einem beliebigen Dr. soll ein anderes ähnliches gezeichnet werden, welches 2, 3, 5, . . . n mal so groß oder klein an Fläche ist; wie hat man die Seiten zu nehmen?

19) Zu einem gegebenen Dr. über einer gegebenen Geraden ein anderes, ähnliches zu zeichnen.

20) Zwei ähnliche Dreiecke zu summiren: d. h. ein drittes

ähnliches Dr. zu zeichnen, welches so groß ist, als die beiden andern.

21) Zwei ähnliche Pgme zu summiren; d. h. ein drittes ähnliches zu zeichnen, welches so groß ist, als beide zusammen.

22) Ein ähnliches Dr. oder Pgm zu zeichnen, welches der Unterschied zwischen zweien andern ähnlichen ist.

23) Zwei beliebige Pgme so zu summiren, daß ein Pgm entsteht, welches so groß ist, als die beiden andern.

Es mögen sich noch einige Aufgaben über ähnliche Dreiecke anreihen.

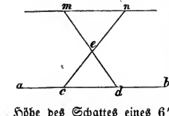
24) Die drei Seiten eines Dr. sind 9′ 4″; 8′ 5″; 7′ 6″; die kleinste Seite eines ähnlichen ist 10′ 5″; wie groß sind die andern?

25) Die S. S. sind 10′, 11′, 15′; die größte S. des andern ähnlichen ist 20′ 5″, wie groß sind die andern?

26) Die Seiten eines Dr. sind 50′, 100′ und 120′ lang; parallel zur Seite 50′ soll eine 20′ lange Parallele gelegt werden? wie weit von der Spitze muß die Parallele gelegt werden?

27) In einer Flurkarte betragen die Seiten eines dreieckigen Ackers 15‴, 17‴, 25‴; die größte Seite des Feldes wird gemessen und ergiebt ein Länge von 600′; wie groß sind die andern S. S.?

28) Grundlinie 300′; Höhe 500′; in welcher Höhe muß die 150′ lange Parallele liegen?



29) Durch den P. m soll auf dem Felde eine Parallele zu ab abgesteckt werden. Man mißt ce = 30′; de = 31 und em = 40′; wie groß muß en genommen werden?

30) Höhe des Schattens eines Thurmes oder Baumes = 80′; Höhe des Schattes eines 6′ hohen Stabes = 3′; gesucht die Höhe des Gegenstandes.

31) Die durch die Senkrechte aus der Spitze des rechten W. auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte sind 5′ und 7′; 8′ und 9′; wie groß ist der Inhalt?

32) Hypotenuse 25′; ein Abschnitt 10′; gesucht die Höhe und die Katheten.

33) Kathete 5′; Abschnitt an derselben 3′; gesucht die Hypot., andere Kathete und der Inhalt.

34) Höhe zur Hypot. 10′; ein Abschnitt derselben 4′ 5″; gesucht Hypot. und Katheten.

35) Hypot. 8′ 6″; eine Kathete 4′ 3″; gesucht die Abschnitte der Hypot., die andere Kathete und die Höhe zur Hypot.

36) In einem Dr. verhalten sich zwei S. S., wie 4 : 5; die dritte S. mißt 100′; wie groß werden die beiden Abschnitte, welche die Halbirungslinie des von den S. S. eingeschlossenen Winkels bildet?

37) Die Seiten sind in einem Dr. 20′, 25′ 30′; in welche beiden Abschnitte theilt die Halbirungslinie des W., welchen die S. S. 20′ und 25′ einschließen?

38) Umfang eines Dr. 25′; Verhältniß der entsprechenden Seiten, wie 6 : 9; wie groß ist der Umfang des zweiten?

39) Die Umfänge zweier ähnlichen Dreiecke sind 50′ und 70′; die entsprechende eine Seite 5′ 7″, wie groß die andere?

40) Umfang 43,4′; entsprechende Seiten 8′ und 5′; gesucht der Umfang des ähnlichen.

41) Inhalt eines Dr. 100 □°; die entsprechenden Seiten der ähnlichen Dreiecke sind 30′ und 40′; gesucht der Inhalt des andern.

42) Umfänge der ähnlichen Dr. Dr. 200′ und 300′; Inhalt des ersten 150 □′; gesucht der Inhalt des andern.

43) Auf einem Stadtplane ist die eine Seite eines dreieckigen Platzes 5″ 3‴; die entsprechende Senkrechte 9″; die Seite des Platzes in natura mißt 120′; gesucht der Inhalt.

44) Eine dreieckige Fläche mißt auf der Flurkarte 33 □‴; wie viel in natura, für das Großherzogthum Weimar.

45) Zwei Seiten eines Dreiecks betragen 100′ und 135′; parallel zur dritten Seite soll eine Linie gelegt werden, welche das Dr. halbirt; wie weit von der Spitze muß dieselbe auf der einen oder andern Seite gelegt werden?

46) Wie, wenn die parallele Seite den fünften Theil abschneiden soll; oder wenn 2 parallele Linien das Dr. in 3 gleiche Theile zerlegen sollen; oder wenn ein Stück von 35 □′ von oben her abgeschnitten werden soll?

47) Die Umfänge zweier ähnlichen schiefwinkligen Pgme ver-

halten sich, wie 9 : 16; die Seite des kleineren ist 75′; wie groß die des größeren?

47) Umfang eines Pgms = 135′; eine Seite 20′, entsprechende des andern 25′; wie groß ist der Umfang des zweiten?

48) Umfänge der ähnlichen Pgme 4′ und 15′; Diagonale des letzteren 6′; wie groß ist die Diag. des ersteren?

Paralleltrapez, Trapez, unregelmäßige Vielecke.

1) Die beiden parallelen Seiten sind 15′ und 9′; der senkrechte Abstand derselben ist 5′; gesucht die Fläche.

2) Aus den beiden parallelen Seiten von 12° 4′ und 17° 5′ und der Höhe 8° 6′, sowohl d als dd soll die Mittellinie und der Flächeninhalt gefunden werden.

3) Ptrpz hat 7″ 5‴ und 9‴ 3‴ parall. S. S. und 5″ Höhe; gesucht die Seite eines ebenso großen Quadrats.

4) Die Fläche eines Ptrpzes beträgt 65 □′ 66 □″; die beiden Parallelen sind 8′ 5″ und 6′ 7″; gesucht die Höhe (d und dd).

5) Inhalt 133 □′; eine Parallele 15′ 7″; Höhe 5′ 6″; gesucht die andere Parallele.

6) Inhalt 300 □°; Höhe 36°; gesucht die Mittellinie, welche die nicht parallelen Seiten halbirt.

7) Umfang 125′; die beiden nicht parallelen Seiten 25′ und 23′; Höhe 27′; gesucht der Inhalt.

8) Verhältniß der Höhe und Parallelen, wie 3 : 4 : 5; Fläche 1000 □°; gesucht die Parallelen und die Höhe.

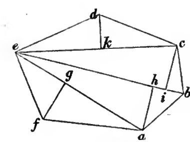
9) In einem Trapeze sind gegeben die Diagonale D und die beiden Höhen H und h, welche von den Spitzen auf die Diagonale gefällt sind:

D = 30′; H = 15′; h = 12′;
„ = 26° 5′; „ = 9° 6′; „ = 5° 5′;
„ = 9° 8′; „ = 4° 3′; „ = 5° 6′; gesucht der Inhalt.

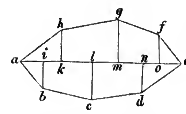
10) Inhalt des Trapezes 160 □°; die beiden Höhen sind 7° und 8°; gesucht die Diagonale.

11) Fläche 100 □°; die Höhen und die Diagonale verhalten sich, wie 4 : 5 : 11; wie groß sind dieselben?

12) 200 □′ 66 □″; die Höhen und die Diagonale sind gleich; wie groß?



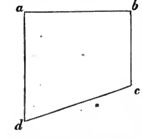
13) In einem Sechseck hat man gemessen ec = 50′ und dk = 10′; eb = 75′ und ci = 11′; ah = 12′; ea = 39′ und fg = 7′; wie groß ist die Fläche desselben?



14) Man hat gefunden ae = 100°; ak = 25°; km = 43°; mo = 20°; oe = 12°; hk = 7°; dm = 15°; fo = 9°; ai = 11°; il = 26°; ln = 34°; ne = 29°; bi = 7°; lc = 13°; dn = 9°; wie groß ist die Fläche?

15) Wenn man zu einem gegebenen Paralleltrapez, Trapez, unregelmäßigen Vieleck ein ähnliches hat, in welchem die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4, . . . n mal so groß oder klein werden, wie vielmal so groß oder klein werden dann die Linien, Umfänge und die Flächen?

16) Wie groß muß man die bestimmenden Dimensionen eines Vielecks nehmen, welches eine 2, 3, 4, . . . n mal so große Fläche haben soll?



17) W. a = 90°; dc = 19′; bc = 9′ und ad = 17′ wie groß ist die Wandfläche? was kostet der Anstrich, wenn der Quadratfuß 5 pf. kostet?

18) Ebenso die Fläche gesucht, wenn ad = 9′ 4″; bc = 3′ 7″; dc = 11′ 2″ ist und a = 90°.

19) Die beiden parallelen S. S. sind 30′ und 17′; der senkrechte Abstand 15′; eine nicht parallele 15′; wie groß ist die vierte S. und der Inhalt?

20) Die Parallelen 200′ und 100′; die Nichtparallelen 80′ und 40′: gesucht die Höhe.

21) In einem Paralleltrapeze sind die parallelen Seiten 68°;

32°; eine anliegende 70°; die Höhe 56°; man soll dasselbe in 2 gleiche Theile zerlegen; wie hoch fällt die zu den Parallelen parallele Linie?

22) Zwei beliebige ähnliche Vierecke verhalten sich bezüglich ihrer Seiten wie 9 : 16; der Umfang des einen ist 150′; wie groß der des andern? Wie groß ist die Fläche des zweiten, wenn die des ersten 300 □° ist?

23) Zwei ähnliche Vielecke verhalten sich mit ihren entsprechenden Seiten, wie 5 : 7; ist nun der Inhalt des einen = I; der Umfang = U, wie groß ist der Inhalt und Umfang des andern?

Konstruktives.

1) Ein Paralleltrapez soll gezeichnet werden, wenn von demselben gegeben sind: drei S. S. und der von zweien eingeschlossene W.; die beiden parallelen und nicht parallelen S. S.; die beiden Parallelen und die beiden an einer anliegenden W. W.; zwei anstoßende S. S. und beide Diagonalen; der Unterschied der parallelen S. S., die beiden nicht parallelen S. S. und eine Diagonale; eine Parallele, die ihr zukommende Höhe und die beiden Diagonalen.

2) Ein unregelmäßiges Viereck soll gezeichnet werden, wenn gegeben sind: 4 Seiten und ein W.; 4 S. S. und eine Diag.; drei W. W. und die beiden von denselben eingeschlossenen S. S.; 3 S. S. und die beiden von denselben eingeschlossenen W. W.; 3 W. W. und 2 neben einander liegende S. S., welche von den W. W. nicht eingeschlossen werden; zwei gegenüberliegende S. S. und 3 W. W.; 3 S. S. und 2 Diag.; 2 anstoßende S. S., die dazu gehörige Diag., und die beiden W. W., durch welche dieselbe geht; 3 auf einander folgende S. S. und die vierte rechtwinklig zu den beiden anliegenden; 3 auf einander folgende S. S. und die beiden W. W. an der vierten.

3) Ein Fünfeck zu zeichnen, wenn gegeben sind: 5 S. S., 2 an einer liegende W. W. und die Anordnung der Bestandtheile; 5 S. S. und 2 aus einer Ecke gehende Diag.; 4 S. S. und 3 eingeschlossene W. W.

4) Ein Sechseck zu zeichnen, wenn gegeben sind: 6 S. S. und 3 aus einer Ecke gezogene Diag.; 5 S. S. mit den 4 eingeschlossenen Winkeln.

5) Zu einem gegebenen Paralleltrapez, Trapezoid, unregel-

mäßigen Vieleck soll über einer gegebenen Geraden ein anderes demselben ähnliches konstruirt werden.

7) Gegeben ist ein unregelmäßiges Vieleck, man soll ein 4, 9, 16 . . . n^2 mal so großes oder kleines konstruiren; ebenso ein 2, 3, 5 . . mal so großes oder kleines.

Das regelmäßige Vieleck.

Die Berechnung der regelmäßigen Vielecke nach Umfang, linearen Verhältnissen und Fläche kann erst später in der Kreislehre weiter dargestellt werden. Hier möge nur Einzelnes angedeutet werden. Den Umfang findet man, indem man eine Seite mißt und n mal nimmt, wenn es sich um das regelmäßige nEck handelt; den Inhalt, wenn man den halben Umfang mit dem Seitenhalbmesser oder Apostema multiplicirt; das Apostema findet man, wenn man zwei Winkel des regelmäßigen Vielecks, welche an einer und derselben Seite liegen, halbirt, die Halbirungslinien bis zu ihrem Durchschnitte verlängert und eine Senkrechte auf die Seite fällt; die Halbirungslinie vom Eckpunkte bis zum centrischen ist der Eckenhalbmesser oder Radius des Kreises, welcher um das regelmäßige Vieleck beschrieben werden kann. Ein jedes regelmäßige nEck kann in n gleichschenklige, beim Sechseck gleichseitige Dreiecke zerlegt werden, welche unter sich kongruent sind. In denselben bildet die Vieleckseite die Grundlinie, der Schenkel den Eckenhalbmesser und die Senkrechte von der Spitze das Apostema. Also bilden die halbe Grundlinie, das Apostema und der Eckenhalbmesser ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem man stets die dritte Seite finden kann, wenn man zwei kennt. Es kömmt darauf an, anzudeuten, wie sich eine Linie im Werthe der andern Linie ausdrücken läßt. So ist die Seite des regelmäßigen Sechsecks dem Eckenhalbmesser gleich; nennt man den Eckenhalbmesser r, so ist der Umfang 6r; ist ϱ das Apostema $= \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r}{2} . \sqrt{3}$, so ist der Inhalt des Sechsecks $= \frac{3}{2} r^2 . \sqrt{3} = 1{,}732 . 3 r^2 = 2{,}598\ r^2$ oder weil r = Sechseckseite, so ist die Fläche des Sechsecks = 2,598 mal Quadrat der Sechseckseite. Es ist aber immer möglich, wie sich später zeigen wird, das Apostema und die Seite im Werthe des Eckenhalbmessers, die Fläche also im Werthe des Quadrats des Eckenhalbmessers auszudrücken; aber auch das

Apostema im Werthe der Seite, also die Fläche im Werthe des Quadrats der Seite. Hier an dieser Stelle möge wenigstens zur Ausführung der Rechnung eine Tabelle stehen, welche sich zum Theil auf erst später (im Kap. vom Cylinder) zu entwickelnde Rechnungen gründet.

Den Flächenraum eines regelmäßigen Vielecks findet man, wenn man den halben Umfang mit dem Apostema oder das Quadrat der Seite mit dem bezüglichen Faktor der vierten Kolumne der untenstehenden Tabelle multiplicirt. Ferner

1) kennt man das Apostema und will den Eckenhalbmesser finden, so multiplicire man dasselbe mit dem bezüglichen Faktor der ersten Kolumne.

2) Den Eckenhalbmesser muß man mit dem bezüglichen Faktor der zweiten Kolumne multipliciren, um die Seite zu finden.

3) Die Seite multiplicirt man mit dem bezüglichen Faktor der dritten Kolumne, um den Eckenhalbmesser zu finden.

Namen der Figur	Seitenanzahl	I. Faktor für den Eckenhalbm. aus d. Apostema.	II. Faktor für die Seite aus dem Eckenhalbm.	III. Faktor für Eckenhalbmesser aus Seite.	IV. Faktor für Fläche aus dem Quadrat der Seite.
Dreieck	3	2	1,732	0,579	0,433
Viereck	4	1,414	1,414	0,707	1
Fünfeck	5	1,238	1,174	0,852	1,72
Sechseck	6	1,155	1	1	2,598
Siebeneck	7	1,11	0,867	1,16	3,634
Achteck	8	1,08	0,765	1,307	4,828
Neuneck	9	1,062	0,681	1,47	6,1818
Zehneck	10	1,05	0,616	1,625	7,694
Elfeck	11	1,04	0,561	1,777	9,365
Zwölfeck	12	1,037	0,515625	1,94	11,196

(Aus dem prakt. Taschenbuch für Ingenieure und Techniker nach Haslett und Hackley bearbeitet von Dr. Brauns. Braunschweig, Vieweg 1858. S. 79).

1) Der Eckenhalbmesser ist 8′, wie groß ist die Seite des Dreiecks? des Vierecks? Fünfecks? Sechsecks?

2) Die Seite des regelmäßigen Dr. ist 9′, wie groß ist der Eckenhalbmesser?

3) Eckenhalbmesser = 10′, gesucht die Seite des regelmäßigen Vierecks.

4) Die Seite des regelmäßigen Vierecks ist 20′, wie groß der Eckenhalbmesser?

5) Eckenhalbmesser = 6′, gesucht die Seite des regelmäßigen Siebenecks, Achtecks, Neunecks, Elfecks, Zwölfecks.

6) Die Seite eines Siebenecks, Achtecks, Neunecks beträgt 8′, wie groß ist der Eckenhalbmesser?

7) Das Apostema ist 3′ lang, gesucht Se_3 oder die Seite des regelmäßigen Dr.

8) Das Apostema ist 6″ lang, wie groß ist die Seite des regelmäßigen Vierecks, Fünfecks, Sechsecks, Neunecks?

9) Die Seite eines regelmäßigen Dreiecks ist 10′; gesucht der Inhalt.

10) Die Seite eines regelm. Fünfecks ist 9′, gesucht der Inhalt.

11) Seite des regelm. Sechsecks 4′ 5″ 6‴, gesucht der Inhalt.

12) Die Seite eines regelmäß. Achtecks ist = 80′; eines Zehnecks = 30′; eines Zwölfecks = 24′; gesucht wird der Inhalt.

13) Der Inhalt eines regelm. Dreiecks ist = 54□′ 66□″
" " " " Fünfecks " = 1700□′
" " " " Sechsecks " = 433□°
" " " " Achtecks " = 100□° 24□′
" " " " Zehnecks " = 7843□′,
wie groß sind die bezüglichen Seiten?

14) Der Eckenhalbm. eines regelm. Dreiecks = 17′
" " " " " Vierecks = 7″
" " " " " Fünfecks = 5′ 3″
" " " " " Sechsecks = 12′
" " " " " Achtecks = 4′ 5″
" " " " " Zehnecks = 10′
" " " " " Zwölfecks = 6′,
gesucht wird der Inhalt der regelmäßigen Figuren.

15) Inhalt des regelm. Dreiecks = 150□′
" " " Vierecks = 2000□′
" " " Fünfecks = 4560□′
" " " Sechsecks = 2499□′
" " " Achtecks = 1000□′

15) Inhalt des regelm. Zehnecks = 4576 □'
" " " Zwölfecks = 5776 □',
gesucht der Eckenhalbmesser.

16) Wie groß ist der Inhalt des regelm. Sieben-, Neun-, Elfecks, wenn die Apostemen sind 5', 7', 9'?

17) Wie groß sind die Apostemen, wenn die Flächeninhalte des regelmäßigen Dreiecks, Fünfecks, Achtecks, Zehnecks sind 33 □'; 100 □'; 397 □'; 500 □'.

18) Die Seite eines regelm. Zehnecks im Kreise ist 4'; wie groß ist die des regelm. Sechsecks?

19) Mit welchem Halbmesser muß man einen Kreis konstruiren, wenn das in denselben gezeichnete regelmäßige Fünfeck ebenso groß sein soll, als ein Quadrat von 5' 3" Seite?

20) Ein Quadrat und ein regelm. Dreieck haben gleichen Umfang, wie verhalten sich ihre Flächen?

Konstruktion.

Denkt man sich von dem centrischen Punkte eines regelmäßigen Vielecks nach den Eckpunkten der Umfangswinkel Gerade (Strahlen, Eckenhalbmesser) gezogen, so zerfällt dasselbe in so viele kongruente gleichschenklige Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Man wird also das Vieleck konstruiren können, wenn man hinreichende Bestandtheile zur Konstruktion dieses Dreiecks kennt. Den Umfangswinkel des regelmäßigen Vielecks von bestimmter Seitenzahl, oder den Winkel, welchen je zwei benachbarte Seiten des Vielecks bilden, kennt man schon (90°; 108°; 120°; $128\frac{4}{7}$; 135 ꝛc.); ebenso den halben Umfangswinkel oder den Winkel an der Grundlinie eines der gleichschenkligen Dreiecke und also auch den Winkel, welchen zwei Strahlen oder Eckenhalbmesser im centrischen Punkte mit einander bilden; derselbe ist $\frac{360^\circ}{n}$ oder beim regelm. Viereck = 90°; Fünfeck, = 72°; Sechseck, = 60°; Siebeneck, = $51\frac{3}{7}$°; Achteck, = 45° ꝛc. Zugleich wird vorausgesetzt, daß man sich eines genügend eingetheilten Transporteurs bedienen könne.

1) Man soll ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck ꝛc. Zwölfeck konstruiren, wenn gegeben sind folgende Bestandtheile: eine Seite; die halbe Seite; der Eckenhalbmesser; das Apostema.

2) Von irgend einem regelmäßigen Vieleck sind gegeben: die Größe der Seite und ihres Strahlenwinkels oder ihres Winkels am Umfange; die Anzahl der Seiten und die Größe, entweder dieser Seiten oder des Eck- oder Seitenstrahls; die Größe des Seiten- und Eckstrahls; die Größe einer dieser beiden Linien und die Größe der Seite.

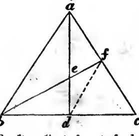
3) Wenn der Eckstrahl unbestimmt ist, während der Eckstrahlenwinkel eine bestimmte Größe hat, so sind unzählig viele regelmäßige Figuren möglich. Alle haben dieselbe Seitenzahl. Ihre Seiten verhalten sich wie ihre Umfänge oder auch wie ihre Seiten oder Eckstrahlen.

4) Ein Tischler will in der Mitte eines Saales einen achteckigen parkettirten Stern anbringen. Der Eckenhalbmesser, mit welchem er von dem Mittelpunkte aus den Kreis schlägt, ist 5′ 3″ lang, wie groß wird die Seite des Achtecks?

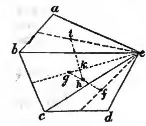
5) Ein Tischler will einen Saal so parkettiren, daß er 20 sechseckige Sterne in demselben anbringen will; jede Seite soll 2′ groß werden, wie groß wird Eckenhalbmesser und Apostema?

6) Ein Saal soll mit regelmäßigen Fünfecken parkettirt werden; gegeben ist das Apostema als Linie; man zeichne das verjüngte regelmäßige Fünfeck.

Fragt man noch bei materiellen Drei-, Vier- ꝛc. Vielecken, z. B. von Bret, nach dem Schwerpunkte, so liegt derselbe bei den regelmäßigen Figuren im geometrischen Mittelpunkte; der Schwerpunkt eines andern Dreiecks läßt sich leicht finden, wenn man von zwei Spitzen desselben nach der Mitte der gegenüberliegenden Seiten gerade Linien zieht. Denkt man sich das Gewicht des Bretes in a, b, c vereinigt, so kann man die Gewichte von b und c in d vereinigen, also ist ad die Linie, in welcher der Schwerpunkt liegt; aber auch die Gewichte von a und c lassen sich in f vereinigen, also liegt der Schwerpunkt auch in der Linie bf, also in dem Durchschnittspunkte e. Der Punkt e liegt so, daß de = $\frac{1}{2}$ ae ist. Denn die Dr. Dr. bea und def sind ähnlich; daher de : ea = df : ab oder = 1 : 2,



also de = $1/2$ ea. Man muß also die Schwerlinie da in 3 gleiche Theile theilen und von d aus den ersten Theilpunkt nehmen. Ebenso



ließe sich der Schwerpunkt des vieleckigen Bretes abcde finden. Man zerlegt das Vieleck in Dreiecke, bestimmt den Schwerpunkt jedes einzelnen Dreiecks und berücksichtigt, daß die in den Schwerpunkten dieser Dreiecke angreifenden Kräfte dem Flächeninhalte der Dreiecke proportional sind. Setzt man voraus, daß Dr. cde = $1/2$ Dr. ceb ist, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunkt auf der Linie fg um $1/3$ fg von g, also in h, weil gh = $1/3$ gf gemacht ist; ist endlich Dr. abe = Dr. cde = $1/2$ Dr. bec, so ist Dr. abe = $1/3$ des Vierecks bedc und also muß der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Bretes auf der hi liegen und zwar um $1/4$ hi von h nach i entfernt, also in k, wenn hk = $1/4$ hi ist.

Der Schwerpunkt eines Pgms liegt im Durchschnittspunkt der Diagonalen.

IV. Aufgaben über Oberfläche und Kubikinhalt der rhombischen, rhomboidischen, dreieckigen, viereckigen, vieleckigen, regelmäßigen Säulen.

1) Die Säule ist regelmäßig, dreiseitig; Seite der Grundfläche 6′; Höhe 10′; gesucht die Oberfläche.

2) Die Säule ist regelm. sechsseitig; Höhe 20′; Seite der Grundfl. 3′; gesucht der Mantel; wie hoch kömmt der Anstrich, wenn 1 □′ 9 pf. kostet?

3) Gesucht die Oberfläche einer dreiseitigen senkrechten Säule, wenn die Seiten 3′, 4′, 5′ und die Höhe 10′ ist.

4) Oberfläche einer regelm. dreiseitigen Säule 400 □′; Seite der Grundfl. 5′; gesucht die Höhe der Säule.

5) Die Seite einer regelmäßigen drei-, vier-, fünf- 2c. zwölfeckigen Säule ist 3″; 6″; 8″; 11″; 15″; die Höhen sind 5″; 7″; 10″; 15″; 17″; gesucht die Oberflächen.

6) Ein regelmäßiges drei-, vier-, fünfseitiges Prisma hat eine Grundflächenseite = 5′; 6′; 7′; Höhe 10′, 12′, 14′; gesucht wird der Kubikinhalt.

7) Grundfläche einer neuneckigen Säule 4□′ 36□″, Höhe 8′ 3″; gesucht der Kubikinhalt.

8) Die Grundfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Säule hat 16″ Seite und die Säule ist 10′ hoch; gesucht der Kubikinhalt.

9) Der Umfang einer sechsseitigen regelmäßigen Säule ist 18′; die Höhe 15′; gesucht K.

10) Die drei Seiten der Grundfl. sind 6′, 8′, 10′; die Höhe 14′; gesucht K.

11) Grundfläche ist gleichschenklig; Umfang 30″; Schenkel 9″; Höhe der Säule 10′; gesucht K.

12) Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dr. von 20′ Umfang; Höhe 9′; gesucht K.

13) Grdfl. ein Paralleltrapez; Höhe 15′; parallele Seiten 3′ nnd 4′; Entfernung beider 2′; gesucht K.

14) K = 533 k′; G = 15□′ 66□″; gesucht die Höhe.

15) In welcher Weise wächst die Oberfläche irgend einer Säule, wenn die betreffenden Dimensionen einer ähnlichen 2, 3, 4, ... n mal so groß werden?

16) Man soll eine Säule konstruiren, welche einer andern ähnlich ist und eine 2, 3, 4 ... n mal so große Oberfläche hat; wie groß muß man die entsprechenden Lineardimensionen nehmen?

17) Wie wächst oder nimmt ab der Kubikinhalt einer Säule, wenn die entsprechenden Lineardimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß werden?

18) Was wiegt eine 18″ hohe Säule von Gußeisen, deren Grundfläche ein rechtwinkliges Dr. ist mit 5″ 3‴ Hyp. und 3″ 4‴ einer Kathete; spec. Gew. 7,2.

19) Ein behauener Tannenholzstamm von einer Länge von 40′, hat eine Grundfläche von 3□′; das spec. Gew. ist 0,79; wie schwer ist das Gewicht? (1 k″ rheinl. Wasser = $1\frac{5}{12}$ Loth.).

20) Eine Säule ist regelmäßig, sechsseitig, von Sandstein; spec. Gew. 2,5; Höhe 20′; Umfang 12″; gesucht das Gewicht.

Anm. Die schiefen Säulen werden nicht besonders durch Aufgaben erläutert; die Berechnung der Oberfläche bietet nichts Neues dar; die Berechnung des Kubikinhaltes ist dieselbe wie bei senkrechten Säulen = Grundfläche mal Höhe oder Senkrechte zwischen den beiden parallelen Flächen. Die Sätze über das Verhalten ähnlicher schiefer Säulen bezüglich der Oberfläche und des Kubikinhaltes sind dieselben.

III. Die Walze oder der Cylinder.

Der Lehrer stellt eine senkrechte Walze auf den Tisch, so daß dieselbe auf der Grundfläche ruht und die längere Ausdehnung von unten nach oben gerichtet ist. Mit einem solchen Gegenstande haben mancherlei andere Gegenstände, welche man im gewöhnlichen Leben kennen lernt, Ähnlichkeit, z. B. eine Ackerwalze, ein Hutkopf, eine Säule an einem Gebäude, ein Baumstamm von gleicher Dicke, eine Kaffeetrommel u. s. w. Dieser Gegenstand hat drei Ausdehnungen, eine von vorn nach hinten, eine von unten nach oben und eine von rechts nach links, ist also ein Körper und zwar ein natürlicher oder physikalischer, weil er noch einen gewissen Stoff mit einer Farbe und sonstigen Eigenschaften hat. Schwebte uns der Körper ohne diesen Stoff und seine Eigenschaften vor dem Auge unseres Geistes, so stände eine mathematische Walze vor demselben. Sie stimmt in ihren drei Ausdehnungen mit allen andern Körpern überein. Von wie vielen Flächen ist denn die Walze eingeschlossen? Von drei Flächen, von einer untern oder Grundfläche, von einer oberen Fläche, welche in Größe und Gestalt mit der untern übereinstimmt und eine zu derselben parallele Lage hat und einer Seitenfläche oder einem Mantel. Vergleicht man diese Flächen mit denen, welche uns an den bisher betrachteten Körpern entgegentraten, so findet man wesentliche Unterschiede. Was zuerst die Seitenfläche oder den Mantel anlangt, so kann man zwar von unten nach oben oder umgekehrt, d. h. von einem Punkte des Umfangs der Grundfläche nach einem Punkte des Umfangs der oberen Fläche, welcher senkrecht über dem untern liegt, eine Gerade ziehen; das kann man aber nicht bewirken von rechts nach links oder von einem

Punkte des untern Umfangs nach einem Punkte des oberen Umfangs, welcher oberhalb rechts oder links läge. Die Seitenfläche unterscheidet sich also wesentlich von allen bisher betrachteten ebenen Flächen, in denen man nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen konnte, welche immer ganz in die Ebene hinein fielen und man nennt dieselbe gekrümmt und zwar einseitig gekrümmt. Analog kann man hier schon an solche Flächen erinnern, in denen man nach keiner Richtung gerade Linien ziehen kann oder allseitig gekrümmte. In der Grundfläche, sowie in der oberen kann man nach allen Richtungen hin Gerade ziehen, welche ganz in dieselbe hineinfallen; dieselben sind also ebene Flächen. Sie unterscheiden sich aber wesentlich von den bisherigen Figuren, welche ebene Flächen waren, von drei, vier, fünf 2c. Geraden eingeschlossen. Grund- und obere Fläche werden von einer einzigen krummen Linie eingeschlossen und zwar von einer solchen, deren jeder Punkt vom Mittelpunkte gleichweit absteht oder von einer Kreislinie. Dieselbe ist eine ihre Richtung fortwährend ändernde oder krumme Linie; ihr Abstand vom Mittelpunkte heißt Halbmesser oder Radius; alle Halbmesser oder Radien sind einander gleich. Eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und mit ihren Endpunkten im Umfange liegt, heißt Durchmesser oder Diameter. Jeder Durchmesser ist zweimal so groß, als der Halbmesser, alle Durchmesser eines und desselben Kreises sind einander gleich. Zwei Kreise stimmen schon in ihrer Gestalt überein, alle Kreise haben Ähnlichkeit oder sind gleich gestaltet, was von dem ähnlichen Bildungsgesetze herrührt, durch welches dieselben entstehen. Schon früher wurde gezeigt, wie die sich nach einem Punkte außerhalb einer Geraden oder ihrer Richtung bewegende Gerade eine Fläche, unter Umständen ebene Fläche bildet; die Gerade kann dieß auch bewirken, wenn dieselbe mit einem Punkte festliegend sich so lange in der Ebene dreht, bis sie wieder in ihre frühere Lage zurückkehrt. Dreht sich nun die größere ab und die kleinere ac, welche in einander liegen um den Punkt a, so entstehen zwei mit dem Mittelpunkte zusammenliegende oder koncentrische Kreise, welche einander ähnlich und nur in der Größe verschieden sind; wären die Radien gleich gewesen, so wären die Kreise nicht allein nach einem ähnlichen, sondern sogar nach demselben Bildungsgesetze entstanden und hätten sich darum

decken oder kongruiren müssen. Es geht daraus hervor, daß die Größe eines Kreises nur von seinem Halbmesser abhängt und daß mit dem Halbmesser auch die Größe des Kreises bekannt ist, daß er also des Kreises einziges Bestimmungsstück ist. Der Lage nach ist aber ein Kreis bestimmt, wenn man seinen Mittelpunkt kennt. Liegen zwei Kreise in einer Ebene und mit dem Mittelpunkte über einander, so decken sie sich, wenn beide gleiche Halbmesser haben oder der kleinere liegt auf dem größeren, wenn die Radien verschieden sind. Liegen dieselben in verschiedenen Ebenen, wie die Grund- und obere Fläche des Cylinders, so können sie gleiche Lage haben oder parallel sein, aber auch ungleiche Lage oder zu einander geneigt sein, so daß sie in ihren Ebenen verschoben sich entweder in einem Punkte berühren oder in einer Geraden durchschneiden, so daß die Umfänge zwei Punkte gemein haben. Durch den Kreis hat man auch ein Mittel der Winkelmessung. Denn der Halbmesser vollendet entweder eine Drehung, welche kleiner ist, als der vierte Theil der Umbrehung oder einen spitzen Winkel oder eine Drehung, welche dem vierten Theile der Umbrehung gleich ist oder einen rechten Winkel, einen Rechten oder eine Drehung, größer als den vierten Theil und kleiner als die Hälfte der ganzen Umbrehung, oder einen stumpfen Winkel, ferner eine halbe Umbrehung oder einen gestreckten Winkel und endlich eine Drehung, welche größer als die halbe, aber kleiner, als die ganze Umbrehung ist oder einen überstumpfen Winkel. Die spitzen, rechten und stumpfen Winkel heißen auch hohle; daher die drei Hauptarten der Winkel: hohle, gestreckte und überstumpfe. Die spitzen, stumpfen und überstumpfen Winkel können unter sich gleich sein, müssen es aber nicht, die rechten und gestreckten Winkel müssen als Viertel und Hälften derselben Umbrehung einander gleich sein. Wie die Hälften, Viertel des Kreisbogens, so sind auch die 360ten Theile desselben einander gleich: den 360ten Theil des ganzen Kreisumfangs nennt man einen Grad; verbindet man die Endpunkte des Grades durch zwei Radien mit dem Mittelpunkte, so hat man ein kleines Winkelchen, welches Winkelgrad heißt und auch entsteht, wenn man den Radius sich um den 360ten Theil der ganzen Umbrehung drehen läßt. 360 solcher kleinen Winkelchen lassen sich mit dem Scheitel und je einem Schenkel so zusammenlegen, daß sie gerade

die Kreisebene ausfüllen. Ein ganzer in 360 oder ein halber in 180 Gerade eingetheilter Kreis kann als Instrument gebraucht werden a. um vorliegende Winkel zu messen, b. um Winkel von verlangter Größe zu zeichnen. Ein solches Instrument heißt Transporteur. Die Winkel lassen sich nun auch eintheilen, a. in hohle, größer als 0° (Grad) und zwar α) spitze, größer als 0° und kleiner als 90°; β) in rechte, größer gleich 90° und γ) in stumpfe, größer als 90° und kleiner als 180°; b. in gestreckte, c. in überstumpfe. Es möge ferner bemerkt sein, daß eine Gerade, welche zwei Punkte des Kreisumfangs mit einander verbindet, ohne durch den Mittelpunkt zu gehen, eine Sehne des Kreises heißt; die größte Sehne ist der Durchmesser selbst, alle andern sind kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkte abstehen, bis dieselben endlich in dem Umfange des Kreises verschwinden, wenn die Entfernung dem Halbmesser gleich wird. Bewegt sich eine Gerade vom Mittelpunkte mit sich selbst parallel fort, bis sie um den Halbmesser vom Mittelpunkte absteht, so hat dieselbe nur noch einen Punkt mit dem Umfange gemein und heißt Tangente oder Berührungslinie, während eine andere, welche zwei Punkte mit dem Kreisumfange gemein hat und von welcher nur ein Theil innerhalb der Kreisfläche liegt, eine Schneidelinie oder Sekante heißt. Die Fläche, welche von einer Sehne und einem Theile des Kreisumfangs begrenzt wird (gemischtlinig) heißt Kreisabschnitt oder Segment; die Fläche, welche von zwei sich schneidenden Radien und einem Theile des Kreisumfangs eingeschlossen wird, heißt Kreisausschnitt oder Sektor (gemischtlinig).

Nachdem die drei Flächen, welche den Cylinder begrenzen, betrachtet worden sind, muß noch bemerkt werden, daß mindestens 4 ebene Flächen nothwendig sind, um einen Raum einzuschließen, daß aber schon zwei ebene und eine einseitig gekrümmte, später sogar eine ebene und eine einseitig gekrümmte, endlich sogar eine einzige allseitig gekrümmte Oberfläche einen Körperraum begrenzen können. Wie entsteht nun die senkrechte oder schiefe Walze oder wie bilden sich einzelne Theile derselben? Man kann sich die senkrechte Walze dadurch entstanden denken, daß sich ein Kreis in irgend einer Zeit und mit irgend einer Geschwindigkeit senkrecht nach oben bewegt und zwar bis zu einer solchen Höhe, daß dieselbe größer ist, als der Durchmesser des Kreises. Denn

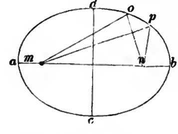
wenn auch ein solcher Körper mit einer Höhe = oder ∠ als der Durchmesser immer noch unter den allgemeinen Begriff des Cylinders fiele, so pflegt man doch denselben, wie z. B. einen preußischen Thaler nicht einen Cylinder, sondern eine Scheibe zu nennen, weil die Höhe oder Länge desselben nicht größer ist als der Durchmesser. Anstatt daß aber der Kreis sich senkrecht nach oben bewegt, kann man sich auch vorstellen, daß derselbe bei seiner Bewegung nach oben rechts oder links, nach vorn oder hinten abwiche, wodurch der schiefe Cylinder entstehen würde. Der senkrechte Cylinder würde auch noch anders entstehen. Denn denkt man sich durch die beiden Mittelpunkte der Grund- und oberen Fläche des Cylinders eine Ebene gelegt, so würde dieselbe ein Oblongum sein; dreht man dasselbe, senkrecht auf einer Ebene stehend, um die lange Seite und zwar eine halbe Umdrehung, oder die Hälfte des Oblongums eine ganze Umdrehung, so entsteht die senkrechte Walze ebenfalls; ebenso entsteht die schiefe Walze durch Umdrehung eines schiefwinkligen Parallelogramms. Dabei ist freilich eine Veränderlichkeit der Linien ausgeschlossen. Aus der Entstehungsweise des Cylinders ergiebt sich von selbst, daß er überall gleiche Dicke haben muß. Anstatt des ganzen Kreises kann sich aber auch ein Kreisausschnitt, z. B. ein Viertel- oder halber Kreis senkrecht nach oben bewegen; dadurch entstände die Viertels-, oder Halbwalze, welche der Lehrer näher beschreiben lassen kann. Die Viertelswalze ist von einer Grund- und oberen Fläche, dem Viertel eines und desselben Kreises, dann von drei Seitenflächen eingeschlossen, von denen die eine der vierte Theil der gekrümmten Oberfläche ist und die beiden andern Oblongen sind, deren kurze Seite der Halbmesser und deren lange Seite die Höhe oder Länge des Cylinders ist. Bei der Halbwalze sind 4 Flächen zu unterscheiden, zwei Grundflächen, welche die Hälften von Kreisflächen sind und zwei Seitenflächen; die eine ist die Hälfte des Mantels und die andere das Oblongum, durch welches die senkrechte Walze erzeugt werden kann.

Bei den bisher betrachteten Körpern waren die Kanten gerade Linien in verschiedener Anzahl, bisher nicht unter 12; beim Cylinder sind nur zwei Kanten da, welche durch den Durchschnitt der gekrümmten Seitenfläche mit der oberen und unteren Fläche entstehen und krumme, ja Kreislinien sind. Der Cylinder unter-

scheidet sich auch weiter von den bisher betrachteten Körpern dadurch, daß derselbe keine Ecken hat. Die Seitenfläche steht beim senkrechten Cylinder zur obern und untern Fläche senkrecht, daher ist der gebildete Flächenwinkel ein Rechter, ebenso steht die Achse oder die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte auf den Endflächen senkrecht, daher die Linienflächenwinkel Rechte sind. Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte heißt beim senkrechten Cylinder Höhe oder Achse, weil die auf der gekrümmten Seitenfläche liegende Walze um dieselbe gedreht werden kann. Hätte man einen schiefen Cylinder, so wäre die untere Grundfläche erweitert und von einem Punkte der obern Fläche auf die untere eine Senkrechte gefällt zu denken, welche die Höhe sein würde. Diese Linie fiele mit der Achse, der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte nicht zusammen.

Anstatt eines Kreises kann man aber auch einen länglich runden Kreis oder eine Ellipse sich senkrecht oder schief nach oben bewegt denken, es würde dann eine senkrechte oder schiefe elliptische Walze entstehen.

Legt man bei einer stehenden Walze eine Ebene parallel zur Grundfläche und läßt dieselbe die Walze durchschneiden, so ist der Durchschnitt ein Kreis, welcher mit der oberen und unteren Kreisfläche kongruent ist. Wird aber der Schnitt schief gegen die Achse des Cylinders geführt, so entsteht das Langrund oder die Ellipse, welche man daran erkennt, daß sie einen langen Durchmesser ab und einen kurzen cd hat und zwei Punkte m und n, welche Brennpunkte heißen aus physikalischen Gründen und welche so beschaffen sind, daß wenn von m u. n nach irgend einem Punkte o oder p Fahrstrahlen gezogen werden, allemal die Summe mo + on = der Summe der Linien mp + pn = ab ist.



Wäre die Erde eine Walze, welche mit ihren beiden Kreisflächen nach Norden und Süden liegt, so könnte man nach Westen gehend um dieselbe herum und von Osten wieder kommen. Also ist eine Reise um die Welt nach Westen oder Osten, von welcher

man aus der umgekehrten Richtung zurückkehrt, noch kein Beweis für die Kugelgestalt der Erde, da dasselbe auch bei der Cylindergestalt der Erde möglich ist.

An einer Walze können ausgemessen werden die geraden Linien, die krummen Linien, die einzelnen Flächen, die Gesammtoberfläche, welche die Summe der einzelnen Flächen ist und der Kubikinhalt.

Die wesentlichen geraden Linien, welche am Cylinder vorkommen, sind der Halbmesser, der Durchmesser, die Achse und Höhe, welche mittelst eines Längenmaßes leicht zu messen sind. Aber auch die krummen Linien, welche die obere und untere Kreisfläche begrenzen, müssen gemessen werden. Man könnte zu diesem Zwecke ein Band um die Seitenfläche des Cylinders schlingen, dasselbe dann gerade ziehen oder rektificiren und dann mit dem Längenmaßstabe messen. Man würde dann finden, daß wenn der Durchmesser sieben Linien, Zolle, Fuße oder überhaupt Längeneinheiten hat, der Umfang 22 Linien, Zolle oder Fuße hat, so daß also der Umfang $3\frac{1}{7}$ mal so groß wäre, als der Durchmesser. Du findest also den Umfang des Kreises, wenn du den Durchmesser mit dem Längenmaße missest und die also erhaltene Zahl $3\frac{1}{7}$ mal nimmst. Wäre also der Durchmesser 1, 2, 3, 4 ꝛc. Längeneinheiten, so beträge der Umfang 1 mal $3\frac{1}{7}$, 2 mal $3\frac{1}{7}$, 3 mal $3\frac{1}{7}$, 4 mal $3\frac{1}{7}$ ꝛc. Längeneinheiten, so daß der Umfang in demselben Maße wächst, als der Halbmesser oder Durchmesser. Wollte man daher den Umfang halb so groß oder zweimal so groß machen, so brauchte man nur den Durchmesser oder Halbmesser halb oder zweimal so groß zu machen. Will man ferner wissen, wie sich die Umfänge zweier Kreise verhalten, so braucht man nur zu untersuchen, wie oft der eine Durchmesser oder Halbmesser im andern enthalten ist. Will man durch Multiplikation des Durchmessers mit $3\frac{1}{7}$ den ganzen Kreisumfang finden, so braucht man nur mit 2, 4, ꝛc. mit 360 zu theilen, um den Umfang des Halbkreises, des Viertelkreises ꝛc. oder eines Grades zu finden. Wollte man die Größe von 47° berechnen, so müßte man die Länge eines Grades berechnen und 47 mal nehmen. Umgekehrt kann man auch aus dem Unfange oder einem Theile desselben den Durch- oder Halbmesser finden. Denn wäre der Umfang 22 Zoll, so hätte man denselben gefunden, indem man

den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ multiplicirte; theilt man umgekehrt die 22 Zoll mit $3\frac{1}{7}$, so erhält man 7 Zoll als Durchmesser. Umfang getheilt $3\frac{1}{7}$ = Durchmesser. Wären 63° des Kreises vielleicht irgend lang, z. B. 126 Zoll, so wäre ein Grad = 2 Zoll, der Kreisumfang = 360 mal 2 Zoll = 720 Zoll, also der Durchmesser = 720 Zoll getheilt durch $3\frac{1}{7}$. Der halbe Durchmesser = Halbmesser.

Man kann ferner die Grundfläche oder die obere Fläche oder den Mantel ihrem Inhalte nach berechnen und die einzelnen Flächen zusammenzählen, um also die ganze Oberfläche des Cylinders zu finden. Was nun zuerst eine der beiden Kreisflächen anlangt, so verhält sich die Sache also. Denkt man sich den Kreisumfang in unendlich viele unendlich kleine Bogen getheilt, wie ab, so ist die Fläche des Dreiecks acb = ab mal $\frac{dc}{2}$, weil man ab, ohne einen Fehler zu begehen, als gerade Linie betrachten kann; aber dc ist der Radius, daher Dr. acb = ab mal halber Halbmesser. Um also die ganze Kreisfläche zu finden, müßte man den ganzen Kreisumfang sich als eine gerade Linie machen, rektificiren und mit dem halben Halbmesser multipliciren. Daher Kreisfläche = Kreisumfang mal halber Halbmesser. Aber der Kreisumfang ist ja = 2 mal Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$; daher Kreisfläche = 2 mal Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$ mal $\frac{1}{2}$ Halbmesser. Weil aber 2 mal $\frac{1}{2}$ = 1 ist, so ist die Kreisfläche = Halbmesser mal Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$ oder: Willst du die Fläche eines Kreises finden, so miß den Halbmesser und nimm das Quadrat des Halbmessers $3\frac{1}{7}$ mal, was man in Buchstaben andeuten kann, wenn r den Halbmesser und F die Kreisfläche bedeutet F = r□ mal $3\frac{1}{7}$. Wäre also der Halbmesser = 1′, 2′, 3′ &c., so wäre der Flächeninhalt = $1 . 3\frac{1}{7}$, $4 . 3\frac{1}{7}$, $9 . 3\frac{1}{7}$ &c. Quadratfuß. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachtet. Denn die Fläche desselben ist ja nach dem Früheren = $\frac{1}{2}$ Umfang mal Seitenhalbmesser. Für den Kreis geht aber der Seitenhalbmesser in den Halbmesser über, daher = $\frac{1}{2}$ Umfang mal Halbmesser = $\frac{1}{2}$ mal 2 mal Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$ mal Halbmesser = Halbmesser mal Halbmesser

mal $3\frac{1}{7}$ = Quadrat des Halbmessers mal $3\frac{1}{7}$. Das Quadrat des Halbmessers ist aber der vierte Theil vom Quadrate des Durchmessers, daher die Kreisfläche auch = Durchmesserquadrat getheilt durch 4 mal $3\frac{1}{7}$. Ebenso könnte man aus dem Umfange oder einem Theile desselben einen Schluß machen auf des Kreises Fläche. Denn theilt man den Umfang durch $3\frac{1}{7}$, so hat man den Durchmesser, oder theilt man den halben Umfang durch $3\frac{1}{7}$, so findet man den Halbmesser, aus beiden wieder die Fläche. Wüßte man die Länge von 36^0 z. B. = 7', so sind die 360^0 = 70', daraus läßt sich wieder Durchmesser und Halbmesser, also auch die Kreisfläche finden. Ebenso läßt sich auch die Fläche eines jeden Kreisausschnittes z. B. von 37^0 finden, wenn man seine Bogenlänge, die Gradzahl und den Halbmesser kennt. Denn Bogenlänge mal halber Halbmesser = Kreisausschnitt; oder da man bei bekanntem Halbmesser die Fläche vom Kreise finden kann, so wäre Halbmesserquadrat mal $3\frac{1}{7}$ mit 360 zu theilen, dann mit 37 zu multipliciren.

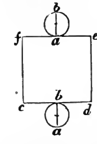
Läßt man den Radius eines Kreises allmälig wachsen, so gestaltet sich die Sache folgendermaßen.

Halbmesser.	Umfang.	Kreisfläche.
1'	2 mal $3\frac{1}{7}$'	$1 . 3\frac{1}{7}$ □'
2'	4 „ $3\frac{1}{7}$'	$4 . 3\frac{1}{7}$ □'
3'	6 „ $3\frac{1}{7}$'	$9 . 3\frac{1}{7}$ □'
4'	8 „ $3\frac{1}{7}$'	$16 . 3\frac{1}{7}$ □' rc.

d. h. macht man den Halbmesser eines Kreises 2, 3, 4 rc. mal so groß, so wird auch der Umfang 2, 3, 4 rc. mal so groß, aber die Fläche wird 2 mal 2, 3 mal 3, 4 mal 4 mal so groß rc. Man findet also hier wieder, was man bereits beim Quadrate beobachten konnte und was wenigstens soviel ahnen läßt, daß ähnliche Gesetze bei allen regelmäßigen Figuren Statt finden dürften, wenn man auch noch nicht soweit kommen kann, daß dasselbe Gesetz bei allen Figuren waltet, welche nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden sind.

Da die beiden Kreisflächen, welche sich an dem Cylinder finden, einander gleich sind, so kömmt es zur Berechnung der Oberfläche nur noch darauf an, den Flächeninhalt der gekrümmten Seitenfläche finden zu können. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Mantel aufzuwickeln und in eine Ebene zu legen, dann ist derselbe ein Oblongum, welches des Cylinders Höhe zur Höhe

und den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie hätte. Hätte z. B. der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders 7 Längeneinheiten, so hätte der Umfang deren 22; wäre nun noch die Höhe des Cylinders 12 solcher Längeneinheiten, so würde das in eine Ebene gelegte, aufgewickelte Bild oder Netz des Cylinders folgendes werden.



Bleibt man bei dem obigen Beispiele stehen, so ist eine der beiden Kreisflächen = $\frac{7}{2}$ mal $\frac{7}{2}$ mal $3\frac{1}{7}$ Quadratzoll, wenn man die Längeneinheit Zoll sein läßt; also beide zusammen = 2 mal $\frac{7}{2}$ mal $\frac{7}{2}$ mal $\frac{22}{7}$ Quadratzoll = 77□″. Das Oblongum cdef = cd mal de = 22 mal 12□″ = 264□″; endlich ganze Oberfläche = (264 + 77)□″ = 341□″. Setzt man nun voraus, daß Durchmesser und Höhe gleichmäßig wachsen, also 2, 3, 4 &c. mal so groß werden, so daß man dadurch Cylinder erhält, welche einander an-Gestalt gleich oder ähnlich sind, so wird die Oberfläche 4, 9, 16 &c. mal so groß. Denn macht man ab 2 mal so groß, so wird die Fläche 4 mal so groß; dasselbe muß mit dem Oblongum Statt finden, da sowohl cd, als auch dc 2 mal, die Fläche dadurch 4 mal so groß wird. Also muß auch die ganze Oberfläche 4 mal so groß werden. Es könnte aber auch die Aufgabe gestellt werden, die Oberfläche einer halben, Viertels-, Achtelswalze zu finden; dieselbe ließe sich immer auf das schon Dargestellte zurückführen.

Soll der Kubikinhalt des Cylinders berechnet werden, so betrachtet man denselben als eine Säule und hat dann Grundfläche mal Höhe. In obigem Beispiele beträgt die Grundfläche $\frac{7}{2}$ mal $\frac{7}{2}$ mal $3\frac{1}{7}$□″, die Höhe 12″, daher Kubikinhalt = $\frac{7}{2}$ mal $\frac{7}{2}$ mal $\frac{22}{7}$ mal 12 = 462 Kubikzoll. Läßt man nun die Dimensionen 2, 3, 4 &c. mal so groß werden, so wird die Grundfläche 4, die Höhe 2 mal so groß, also der Kubikinhalt 8 mal, oder die Grundfläche 9, die Höhe 3 mal, also der Kubikinhalt 27 mal &c. mal so groß.

Einfache Höhe und Durchm.	Oberfl.	Kubikinh.
Doppelte " " "	4fache	8facher
Dreifache " " "	9fache	27facher &c.

Cylinder, bei denen Durchmesser und Höhe, die beiden Dimensionen,

auf welche es besonders ankömmt, in demselben Verhältnisse stehen und wachsend oder abnehmend stehen bleiben, heißen ähnlich.

Wie viele und welche Flächen der Walze ein Auge übersehen kann, das hängt von der Stellung desselben ab. Steht zunächst ein Auge senkrecht über dem Mittelpunkte der oberen Fläche oder senkrecht unter dem Mittelpunkte der unteren Fläche, so kann es nur die eine Kreisfläche übersehen. Steht ein Auge in wagerechter Richtung vor dem senkrechten Cylinder, so übersieht es die Hälfte des Mantels; steht endlich ein Auge oberhalb der oberen Fläche, so übersieht es die obere Fläche und einen Theil des Mantels.

Welchen Schatten wirft ein Cylinder? Die einfachsten Fälle sind 1) daß der leuchtende Punkt dem Mittelpunkte senkrecht gegenüberliegt und die verlängerten Lichtstrahlen zur Schattenfläche senkrecht stehen, so wird man einen Kreis als Schatten sehen; stände 2) der Lichtpunkt dem Mittelpunkte einer der Grundflächen zwar senkrecht gegenüber, fielen aber die zu verlängernden Lichtstrahlen schief auf die Schattenfläche, so würde man einen ins Längliche gezogenen Kreis sehen. Fielen endlich 3) die Lichtstrahlen wagerecht auf den senkrecht stehenden Kegel, so würde man als Schatten an der Wand ein Oblongum sehen, dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich und dessen obere und untere Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich wäre. Beim Schiefeinfallen der Sonnenstrahlen würde das Oblongum sich zu einem Rhomboid umgestalten.

Der Schwerpunkt eines Kreises oder eines kreisförmigen Ringes liegt im Mittelpunkte desselben. Der Schwerpunkt eines Cylinders liegt in der Mitte seiner Achse oder der Geraden zwischen den beiden Mittelpunkten.

Es mögen an dieser Stelle, da wir dem Kreise, als der Grundfläche des Cylinders begegnen, die wesentlichsten Eigenschaften und Beziehungen desselben zu Punkten, Geraden, geradlinigen Figuren, der Hauptsache nach in möglichster Kürze erörtert werden.

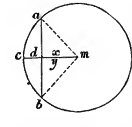
Schon aus der Entstehung des Kreises ergiebt sich's, daß ein **Punkt**, welcher vom Mittelpunkte um die Länge des Halbmessers entfernt ist, in dem Umfange oder der Peripherie liegen muß; steht aber ein Punkt vom Mittelpunkte um eine Linie ab, welche kleiner oder größer ist als der Halbmesser, so muß derselbe

entweder in der Kreisfläche oder jenseits und außerhalb des Kreises liegen. Ist er vom Mittelpunkte um die Länge 0 entfernt, so fällt er mit dem Centrum zusammen.

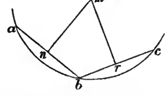
Bringt man eine Gerade in Beziehung zum Kreise, so kann dieselbe a. mit dem Kreise gar keinen Punkt gemein haben und muß außerhalb des Kreises liegen. Dann muß sogar der nächste Punkt der Geraden vom Mittelpunkte weiter entfernt sein, als um den Radius, oder die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Gerade muß größer sein, als der Radius.

Da ma senkrecht ist, muß mb größer sein; aber weil ma > mc, so liegt schon a außerhalb des Kreises. b. die Gerade kann mit dem Kreise nur einen Punkt gemein haben, wenn ihr nächster Punkt c um den Radius vom Mittelpunkte m absteht. Der P. c, welchen die Gerade ac mit dem Kreise gemein hat, steht um die Senkrechte mc vom Mittelpunkte ab. Jeder andere Punkt, wie a liegt außerhalb, weil ma > mc ist. c. die Gerade kann mit dem Kreise 2 Punkte gemein haben, z. B. P. a und P. b. Die Senkrechte md muß kleiner sein als der Radius. Der nächste P. d liegt in der Kreisfläche; ma = mb = dem Radius, daher liegen die Punkte a und b in der Peripherie und die Gerade ab heißt Sehne oder chorda. Betrachten wir die Größe der Sehne, so schwankt dieselbe zwischen 0 und der Größe des Durchmessers. Das hängt von der Größe der Senkrechten md ab; denn die halbe Sehne ad, die Senkrechte md sind die Katheten des rechtw. Dreiecks adm und es ist $am^2 = ad^2 + dm^2$ oder auch $am^2 - dm^2 = ad^2$. Setzt man am = dm = r, so ist der Unterschied zwischen am^2 und dm^2 oder $ad^2 = o$, also auch ad = o, also auch 2ad = ab = o. d. h. steht die Sehne um den Halbmesser vom Mittelpunkte ab,

so verschwindet sie zum Punkte. Je kleiner aber dm, also auch dm^2 wird, desto größer wird $am^2 - dm^2$ oder ad^2; macht man $dm = o$, so ist eben $am^2 = ad^2$ oder $am = ad$ oder $r = ad$ oder $2r = 2ad = ab$, d. h. wird das Perpendikel $md = o$, d. h. ist die Sehne gar nicht vom Mittelpunkte entfernt oder geht durch den Mittelpunkt, so wird dieselbe zum Durchmesser. Die größte Sehne im Kreise ist der Durchmesser. Die Sehne theilt den Kreis stets in zwei Theile; sind die Theile gleich, so ist die Sehne der Durchmesser. Faßt man weiter das in's Auge, daß amb gleichschenklig ist, so erneuern sich die Erinnerungen und Beziehungen an das gleichschenklige Dreieck. Die Senkrechte md halbirt ab und auch den Winkel amb, welcher mit seinem Scheitel im Mittelpunkte liegt

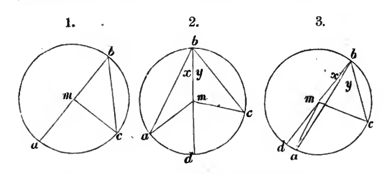


und Centriwinkel heißt und auch den Bogen acb in c. Denn da der Centri- oder Mittelpunktswinkel amb den ganzen Bogen acb zum Maße hat und durch die Senkrechte md halbirt wird, so muß W. x die Hälfte von acb oder ac zum Maße haben. Die Senkrechte vom Mittelpunkt auf die Sehne halbirt also die Sehne, den zu derselben gehörigen Mittelpunktswinkel und Bogen; umgekehrt geht die im Mittelpunkte der Sehne errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt und die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Halbirungspunkte der Sehne ist senkrecht. Dadurch ist auch die Möglichkeit gegeben, den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu

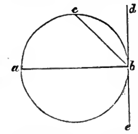


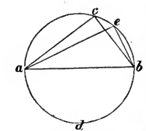
finden. Denn die Senkrechte in der Mitte der Sehne ab errichtet geht durch den Mittelpunkt, ebenso die Senkrechte in der Mitte von bc errichtet. Die beiden Senkrechten müssen sich aber schneiden, weil ab und bc nicht eine gerade Linie bilden — daher ist m des Kreises Mittelpunkt. Bei dieser Gelegenheit sind zwei Sehnen zum Kreise in Bewegung gesetzt worden. Dieselben haben sich innerhalb des Kreisumfangs in b getroffen und einen Winkel abc gebildet,

welcher mit seinem Scheitel b in der Peripherie oder dem Umfange liegt und deßhalb **Umfangswinkel** heißt oder **Peripheriewinkel**.



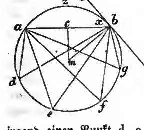
Die drei beistehenden Umfangswinkel haben entweder den Mittelpunkt in einem Schenkel oder in der Fläche oder außerhalb der Fläche des Peripheriewinkels; zeichnet man jedesmal den Mittelpunktswinkel amc, so ergiebt sich, daß **der Umfangswinkel auf gleichem Bogen mit dem Mittelpunktswinkel halb so groß ist, als derselbe oder daß er die Hälfte seines Bogens zum Maße hat.** Denn 1. amc = 2 mal W. b, weil bm = mc; ebenso 2. amd = 2x und dmc = 2y, also amc = 2 (x + y) = 2b; endlich, wenn bm gezogen und verlängert ist (3) dmc = amd + amc = 2x + 2y, also amc = 2y oder 2b. Auch ein Winkel wie cbd, welcher von der Sehne cb und der Berührungslinie db gebildet wird, hat die Hälfte des Bogens cb zwischen der Geraden cb und bd zum Maße. Denn W. abd ist = R, also = 90°, also = $\frac{1}{2}$ arc. ac + $\frac{1}{2}$ arc. bc; da nun abc = $\frac{1}{2}$ ac, so muß W. cbd = $\frac{1}{2}$ arc. bc sein. Ebenso W. cbe, der stumpfe. **Alle Umfangswinkel, welche auf demselben Bogen stehen, haben die Hälfte desselben zum Maße oder sind einander gleich; Umfangswinkel auf dem Halbkreise sind = R = 90°.** Also W. acb = R, weil ab Durchmesser ist und Bogen adb der Halbkreis. Dadurch





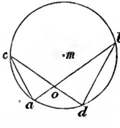
kann auch im Endpunkt c eine Senkrechte bc ohne Verlängerung errichtet werden; man macht ac zur Sehne eines Kreises, indem man ac halbirt und im Halbirungspunkte eine Senkrechte errichtet und einen Punkt derselben als Mittelpunkt des Kreises annimmt und ab als Durchm. zieht. Ebenso ist W. aeb = R. Man kann nun auch einen gegebenen Winkel in einen Kreis so bringen, daß derselbe über einer Geraden als Sehne sich befindet, so daß seine Schenkel auf den Endpunkten der Sehne stehen.

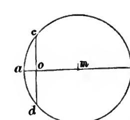
Aufg. Gegeben eine Gerade ab und ein W. x; die Gerade soll Sehne eines Kreises werden, auf deren Endpunkten der Winkel x mit seinen Schenkeln steht.



Ist ab die Gerade, trägt man bei b den W. x an, errichtet in dem Halbirungspunkte c die Senkrechte cm, so muß in derselben der Mittelpunkt liegen; ebenso in der bm, welche in b senkrecht errichtet ist, wenn vw als Tangente des Kreises betrachtet wird. Verbindet man irgend einen Punkt d, e, f, g mit a und b, so erhält man den W. x, welcher $1/2$ des Bogens azb zum Maße hat.

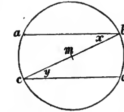
Hat man 2 Sehnen im Kreise, so kann ihr Durchschnittspunkt aber nicht allein im Umfange, sondern auch in der Fläche liegen. Verbindet man dann c mit a und b mit d, so erhält man zwei ähnliche, weil winkelgleiche Dreiecke (W. coa = dob und W. c = W. b, Peripheriewinkel auf demselben Bogen). Daher ao : co = od : ob oder ao . ob = co . od, d. h. die Produkte aus den Abschnitten zweier Sehnen, die sich im Kreise schneiden, sind einander gleich.



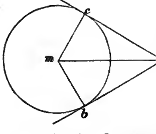


Läßt man die eine Sehne den Durchmesser sein und die Sehne cd im Halbirungspunkte o senkrecht treffen, so ist co.od = ao.ob oder weil co = od, co^2 = ao.ob. Daher die Weise, die mittlere Proportionale zwischen 2 gegebenen Geraden zu finden. Denn setzt man ao und ob bekannt, co = x, gesucht, voraus, so wäre x^2 = ao.ob oder ao : x = x : ob oder x wäre mittlere Proportionale. Man braucht nur die ao und bo zu einer Geraden ab zusammen zu setzen, in m zu halbiren und in o, wo die beiden Geraden zusammengesetzt sind, die co zu errichten. Das wurde aus andern Gründen schon früher gezeigt; es giebt aber auch noch andere Weisen, die mittlere Proportionale zu finden. Doch zunächst davon genug.

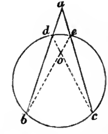
Die Geraden, welche zu einander in Beziehung stehen und zum Kreise, können aber auch zwei parallele Sehnen sein, wie



ab und cd; dann muß W. x = W. y sein, als Wechselwinkel, also Bogen ac = Bogen bd; sind umgekehrt die Bogen gleich, so sind es auch die Winkel und die Sehnen parallel. Ferner können Tangenten oder Berührungslinien und Sekanten oder Schneidelinien zu einander in Beziehung gesetzt werden und zum Kreise. Denn eine Tangente kann man nicht bloß an den Kreis legen, wenn der P. im Umfange gegeben ist, sondern auch, wenn der P. außerhalb derselben gegeben ist. Denn sollte man



von a aus eine Tangente an den Kreis legen und wäre dasselbe schon geschehen, so kennte man von dem rechtwinkligen Dr. amc 1) die am, 2) die mc, 3) den rechten W. bei c. Konstruirt man also dasselbe, so findet man ac = ab, denn die Dr. Dr. abm und acm sind ≅; daher gehen von a zwei gleiche Tangenten an den Kreis.

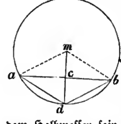


Gingen vom P. a aus zwei Sekanten durch den Kreis, so wäre Dr. adc ∾ Dr. aeb, (denn W. a ist gemeinschaftlich und W. b = W. c, als Umfangswinkel auf demselben Bogen de); daher ad : ac = ae : ab oder ad.ab = ac.ae, d. h. die Produkte aus den ganzen Sekanten mal den außerhalb liegenden Abschnitten sind gleich. Geht nun ac wieder nach der rechten Seite, bis dieselbe zur Berührungslinie wird, so wird das Stück ec = o, aber ae wächst und man hat ae^2 = ab.ad oder: das Quadrat der Tangente ae ist so groß, als das Produkt aus der ganzen Sekante mal dem außerhalb liegenden Abschnitte, wenn Sekante und Tangente von einem Punkte ausgehen. Dieß giebt nicht nur ein neues Mittel an die Hand zwischen ad und ab die mittlere Proportionale ae zu finden, sondern auch die Aussichtsweite von einem über dem Niveau des Meeres erhabenen Punkte zu finden. Denn ae ist, wenn man von der Strahlenbrechung absieht, der Sehstrahl oder die Aussichtsweite; kennt man die Höhe, z. B. des Ettersberges bei Weimar = 1350′; die Größe des Durchmessers = 1719.24000′, so ist ae^2 = (1719.24000 + 1350).1350; also ae = der Quadratwurzel daraus = einer etwa 10 Meilen langen Linie.

Hat man einen Kreis und faßt an ihm theils den Umfang, theils die Größe seiner Fläche in das Auge, so wurde schon früher im Allgemeinen angedeutet, daß der Umfang = $3\frac{1}{7}$ mal Durchmesser und die Fläche = $\frac{1}{2}$.Umfang mal Halbmesser = $\frac{1}{2}$.2.Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$ mal Halbmesser = $\frac{1}{2}.2.3\frac{1}{7}$.Halbmesserquadrat. = $3\frac{1}{7}$.Quadrat des Halbmessers. Daß der Umfang = Durchmesser mal $3\frac{1}{7}$ ist bei einem bestimmten Kreise und daß dieß bei allen Kreisen der Fall sein muß, weil alle nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden sind, läßt sich behaupten. Man gewinnt aber eine weitere Einsicht, wenn man sich erinnert, daß in ein jedes regelmäßige Vieleck sich ein Kreis beschreiben läßt, ebenso um dasselbe. Wäre es nun

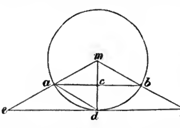
möglich, den Kreis in 2, 4, 8, 16 ꝛc. Theile zu theilen, die Theile mit Sehnen zu bespannen, so hätte man das regelmäßige Zweieck, Viereck, Achteck ꝛc. in dem Kreise und könnte durch Tangenten zu den Seiten des eingeschriebenen Achtecks ein regelmäßiges Achteck um den Kreis beschreiben. Ist aber $\overset{Se}{8}$ = der Seite des eingeschriebenen Achtecks und $\overset{Su}{8}$ = der Seite des umschriebenen Achtecks, so könnte man beide als irgend einen Theil des Halbmessers ausrechnen und durch Multiplikation mit 8 den Umfang der Fläche des ein- und umschriebenen Achtecks finden; zwischen beiden würde der Umfang des Kreises inne liegen. Also Kreisumfang = $(\overset{Ue}{8} + \overset{Uu}{8}) : 2$. Man könnte beim Sechzehneck, beim Zweiunddreißigeck ꝛc. ebenso verfahren und fände den Umfang als ein Vielfaches des Halbmessers oder Durchmessers und zwar bis auf so viele Decimalstellen genau, als bis auf wie viele die Umfänge der ein- und umschriebenen Figur mit einander übereinstimmten. In ähnlicher Weise kann man sagen, daß die Flächen der regelmäßigen- ein- und umschriebenen Vielecke der Kreisfläche als der letzten Grenze zustreben. Es läßt sich aber die Seite des Achtecks und auch das Apostema als Theil des Halbmessers vom Kreise ausdrücken, daher auch die Fläche der ein- und umschriebenen Vielecke im Werthe des Quadrats des Radius ausdrücken. Die Fläche des Kreises ist dann auf soviele Decimalstellen genau, als auf wie viele die Fläche des ein- und umschriebenen Vielecks mit einander übereinstimmen. Man sieht also hier die Nothwendigkeit ein, das Wichtigste über die regelmäßigen Figuren beim Kreise zu erwähnen.

a. das regelmäßige Dreieck.



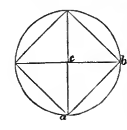
Soll ab die Seite des regelmäßigen Dreiecks sein, so muß der Bogen adb = 120° sein; halbirt man in c durch die Senkrechte mc, so wird auch Bogen adb in d halbirt; daher W. amd = 60°. Da aber Dr. amd wegen am = ad den W. mad = W. mda = 60° hat, so muß ad die Seite des regelmäßigen Sechsecks = dem Halbmesser sein. Man sieht leicht, daß auch mc = cd = dem halben Radius ist. Nennt man nun den Radius r, so läßt sich ac im Werthe des Radius berechnen. Denn

$am^2 - mc^2 = ac^2$ oder $r^2 - \frac{r^2}{4} = ac^2$; $ac^2 = \frac{3r^2}{4}$ und ac $= \frac{r}{2} . \sqrt{3}$ und $2ac = ab = \frac{Se}{3} =$ der Seite des eingeschriebenen Dreiecks $= r \sqrt{3} = r . 1,732050$; daher $\frac{Ue}{3} = 5,196150 . r$. Die Fläche des eingeschriebenen Dr. $= 3 . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . r . r . 1,732050 . = r^2 . 1,299037$. Kennt man aber einmal die $\frac{Se}{3}$, so findet man leicht a. $\frac{Se}{6}$ und daraus $\frac{Ue}{6}$ als auch die Fläche im Werthe des Quadrats des Halbmessers und b. $\frac{Su}{3}$ und daraus $\frac{Uu}{3}$ und $\frac{Fu}{3}$. Denn ad ist $= r$, wie schon oben gezeigt. Das hätte man aber auch anders finden können. Denn kennt man am $=$ r und ac im Werthe des Radius, so kann man mc finden, also auch $dc = r - mc$. Dann ist ad die Hypotenuse des rechtw. Dreiecks acd, in welchem ac und cd bekannt sind und kann also gefunden werden. Ebenso aber auch df; denn kennt man $md = r$; $mc = \frac{r}{2}$ und überhaupt $=$ dem Apostema, ebenso $cb = \frac{1}{2} \frac{Se}{3}$, so ist $mc : md = cb : df$; df kann also gefunden werden; nimmt man es doppelt, so hat man $\frac{Su}{3}$. So kann man die Seite und den Umfang, des 3Ecks, 6Ecks, ꝛc., welches ein- und umgeschrieben werden kann, im Werthe des Halbmessers; ebenso die Fläche dieser Figuren im Werthe des Quadrats des Halbmessers finden. Durch vielfache Verdoppelung hat man sich sowohl dem Kreisumfange $= 2r . \pi$ oder $= 2r . 3,1416$ genähert, als auch der Kreisfläche $= r^2 . \pi = r^2 . 3,1416$. Man kann regelmäßige Figuren zeichnen, wenn ihre Seitenzahl 3; 2.3.; 4.3 ꝛc., kurz 2x.3 ist.



b. das regelmäßige Viereck.

Soll ab die Seite des regelmäßigen Vierecks sein, so muß $acb = R$ sein. Man braucht nur zwei Durchmesser im Mittelpunkte senkrecht auf einander zu errichten, so findet man ab. Verfährt man in ähnlicher Weise wie beim regelmäßigen Dreieck, so findet man $\frac{Se}{4}$ im Werthe des Radius; daraus auch $\frac{Ue}{4}$ und $\frac{Fu}{4}$; ebenso $\frac{Su}{4}$, $\frac{Uu}{4}$ und



${}^{Fu}_{4}$; dann ${}^{Se}_{8}$ 2c., überhaupt die Seite des Vielecks, dessen Seitenzahl $= 2^x$ ist.

c. das regelmäßige Fünfeck. Könnte man einen Kreisbogen von 36° finden, so wäre die denselben bespannende Sehne = der Seite des regelmäßigen Zehnecks $= {}^{Se}_{10}$; bespannte man den doppelten Bogen, so hätte man ${}^{Se}_{5}$. Aus diesen Seiten ließe sich dann Alles, wie bei a und b berechnen. Aber die Seite des regelmäßigen Zehnecks findet man, wenn man den Halbmesser des Kreises durch den goldenen Schnitt theilt. Der größere Theil läßt sich 10 mal im Kreise herumtragen; der Winkel von 36° ist entstanden, wenn man den Radius zum Schenkel und den goldenen Abschnitt zur Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks macht. Denn ist $cb^2 = ac.ab$ (Theilung des Radius nach dem goldenen Schnitte), und hat man mit $db = da = cb$ das gleichschenklige Dr. bda gebaut, so ist auch $ad^2 = ac.ab$ oder $ac : ad = ad : ab$, die Seiten, welche denselben Winkel a einschließen. Aber Dr. acd und adb sind ähnlich, folglich beide gleichschenklig, weil Dr. acd gleichschenklig ist. Da nun ac : ad = Schenkel : Grundlinie, so muß auch ad : ab = Schenkel : Grundlinie sein. Nun ist $v = a = 2c$, ebenso W. $d = 2c$, folglich $a + d + c = 2c + 2c + c = 5c = 180°$; $c = 36°$. Also Bogen $ad = 36°$, daher Sehne $ad = {}^{Se}_{10}$ und $de = {}^{Se}_{5}$, wenn Bogen ae = Bogen ad gemacht ist. Wie früher läßt sich Umfang und Fläche 2c. berechnen. Konstruirbar sind die $2^x.5$Ecke.

d. Da man einen Bogen von 60° durch den Halbmesser abschneidet und einen Bogen von 36° durch den nach dem goldenen Schnitte getheilten Halbmesser, so kann man auch durch Abziehen einen Bogen von 24° oder $^1/_{15}$ des Kreisumfangs finden, bespannen und also auch ${}^{Se}_{15}$ finden und wie früher analoge Rechnungen anstellen. Regelmäßige Vielecke sind konstruirbar, wenn die Seitenzahl $= 2^x.3.5$ ist.

e. Anderweite Vielecke, wie das regelmäßige 17Eck und entsprechende mögen hier ganz außer Acht gelassen werden.

Man findet

	Fläche.	Seite.
Dreieck	0,43 . S □	1,73 r
Viereck	S □	1,41 r
Fünfeck	1,72 . S □	1,17 r
Sechseck	2,60 . S □	r
Siebeneck	3,63 . S □	0,87 r
Achteck	4,83 . S □	0,76 r
Neuneck	6,18 . S □	0,68 r
Zehneck	7,69 . S □	0,62 r
Zwölfeck	11,19 . S □	0,52 r 2c.

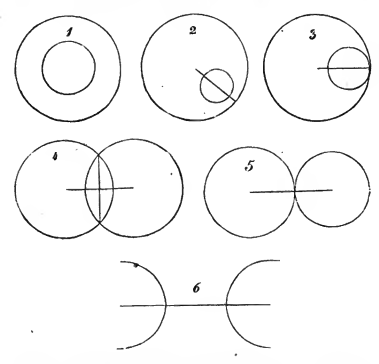
(Aus den Materialien von Schellen.)

Berechnet man vom regelmäßigen Viereck ausgehend, durch fortwährende Verdoppelung $\frac{F.Se}{32768}$ und $\frac{F.Su}{32768}$, so findet man für den Halbmesser = 1 und das Quadrat desselben = 1 Quadrateinheit, die betreffenden Werthe $3{,}1415926 . r^2$, also bis auf 7 Decimalstellen übereinstimmend. Die Zahl 3,1415926 ist genauer und näher, als $3\frac{1}{7}$, aber doch nur bis zu den 10 Milliontheilchen genau.

Vergleicht man nun, ähnlich wie bei den geradlinigen Figuren, zwei Kreise a. in Bezug auf Größe und Gestalt, b. bezüglich der Größe allein und c. bezüglich der Gestalt allein, so findet man, daß Kreise bezüglich der Größe und Gestalt allein vom Radius abhängen. Kreise von gleichen Radien sind kongruent; einen Kreis kann man zeichnen, so daß derselbe an Größe und Gestalt festliegt, wenn man seinen Halbmesser kennt. Die Größe haben zwei Kreise gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben; die Gestalt haben alle Kreise gleich, weil dieselben alle nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden sind. Es gelten daher auch die bei geradlinigen ähnlichen Figuren gefundenen Wahrheiten auch für die Kreise; denn ist R und r der Radius zweier Kreise, bedeuten P und p die Umfänge und F und f die Flächen, so hat man $P : p = 2R . \pi : 2r . \pi = R : r$, d. h. die Umfänge stehen in demselben Verhältnisse, wie die Halbmesser oder Durchmesser, oder wie entsprechende Gerade. Ebenso findet man $F : f = R^2 . \pi : r^2 . \pi = R^2 : r^2$, d. h. die Flächen stehen in demselben Verhältnisse, wie die Quadrate der Halbmesser oder auch weil $4R^2 = D^2$ und $4r^2 = d^2$ ist, wie die Quadrate der Durchmesser.

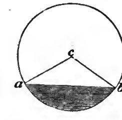
Man kömmt also überhaupt bei ähnlichen gerad- und krummlinigen Figuren zu dem letzten Schlusse, daß sich die Umfänge verhalten, wie entsprechende Seiten und die Flächen, wie die Quadrate der entsprechenden Seiten.

Endlich hat es bei Kreisen noch Interesse, zwei bezüglich ihrer gegenseitigen Lage in der Ebene mit einander zu vergleichen. Dabei sei die Entfernung der beiden Mittelpunkte oder die Centrale $= M$. Ist $M = o$, so liegen beide koncentrisch übereinander und kongruiren (1), wenn $R = r$ ist. So lange $M < R - r$, so liegt der eine Kreis innerhalb des andern (2); wird $M = R - r$, so



berühren sich die Kreise inwendig (3); ist $M < R + r$, so schneiden sich dieselben in zwei Punkten (4); wird $M = R + r$, so berühren sie sich auswendig; Ist endlich $M > R + r$, so liegen sie ganz außerhalb einander und haben keinen Punkt mit einander gemein. (6.)

Zuweilen handelt es sich darum, anstatt die Fläche eines Kreises zu berechnen nur die Fläche für eine bestimmte Anzahl von Graden zu bestimmen, z. B. für n^0. Zu $r^2 . \pi$ gehören 360^0 oder zu 1^0 gehört $\frac{r^2 . \pi}{360}$ also zu n^0 gehört $\frac{r^2 . \pi}{360} . n$ ꝛc. Ebenso könnte man verfahren, wenn man nicht die Länge der ganzen Kreislinie, sondern nur die Länge von n^0 bestimmen wollte. Denn zu 360^0 gehört $2r\pi$, zu 1^0 gehört $\frac{2r\pi}{360}$, also zu n^0 gehört $\frac{n . 2r\pi}{360}$. Umgekehrt könnte man aus der Fläche und dem Umfange von n^0 auf die ganze Fläche und den ganzen Umfang einen Schluß machen und den Halbmesser oder die Gradzahl finden. Der Kreisring bei Fig. 1. ist $R^2 . \pi - r^2 . \pi = (R + r) . (R - r) . \pi$. Der Kreisabschnitt. Wenn die ganze Fläche von acb ein Kreisausschnitt oder Sektor ist und man den Flächeninhalt des Dreiecks acb davon abzieht, so bleibt das schattirte Flächenstück oder der Kreisabschnitt, Segment, übrig. So lange man also die Fläche des Dreiecks acb nicht kennt, kann man das Segment nicht finden. Daher: Bestimme die Fläche des Kreisausschnitts und die Fläche des zugehörigen Dreiecks und ziehe letztere von ersterer ab.



Aufgaben über den Kreis und Cylinder.

I. Kreis.

a. gegeben ist der Halbmesser oder Durchmesser, der Umfang und Inhalt soll berechnet werden.

1) Der Halbmesser eines Kreises ist dd : 5′; 6′ 3″; 7′ 5″ 6‴; dann d : 8′; 9′ 5″; 7′ 8″ 3‴; gesucht wird der Umfang und Inhalt des Kreises.

2) Der Durchmesser des Erdäquators beträgt 1720 geogr. Meilen; wie groß ist der Umfang desselben? (Merkur, 671; Venus 1710; Mars 892; Vesta 60; Juno 60; Pallas 150; Jupiter 20018; Saturn 16305; Uranus 7466; Neptun 9070, wie groß sind die Äquatorialumfänge?)

3) Der Umfang eines Tisches wird gesucht, wenn der Durchmesser = 1′; 2′; 3′; 4′ ꝛc. . . . n Fuß ist. Der Umfang

eines kreisrunden Tisches, Teiches 2c. soll 3, 4, 5 . . . n oder $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ 2c. . . . $\frac{1}{n}$ mal so groß gemacht werden, wie groß muß man den Halbmesser machen?

4) Wenn der Halbmesser eines Kreises 2, 3, 4 2c. . . . . n mal so groß gemacht wird, wie vielmal so groß wird dann der Inhalt? Ebenso wenn man den Halbmesser oder Durchmesser $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 2c. . . . $\frac{1}{n}$ mal so groß macht.

5) Der Umfang eines runden Platzes beträgt 100'; der Halbmesser eines andern ist 2; 3,99; 5; 7,3 mal so groß, wie groß ist der Umfang der betreffenden Kreise?

6) Der Inhalt eines Tisches (kreisrunden) ist 2□'; man will einen 3, 4, 5 2c. mal so großen Tisch machen, wie groß muß man den Radius nehmen?

7) Zwei Kreise verhalten sich bezüglich ihrer Radien wie 3 : 5; wie 7 : 11; wie 8 : 13 — wie verhalten sich ihre Umfänge und Flächeninhalte?

8) Man hat verschiedene Ölgefäße von 2, 3, 4, 5 und 6" Durchmesser, wie groß sind die Umfänge und Inhalte der Grundflächen derselben?

9) Ein Oblongum ist 8' lang und 5' breit; aus demselben soll ein Kreis von 2' Durchmesser geschnitten werden; eine wie große Fläche bleibt übrig?

10) An einem Ziehbrunnen ist der Durchmesser der Walze 9"; das Seil wird 25 mal um die Welle gewunden, ehe der Eimer oben ist; wie tief ist der Brunnen?

11) Wie viel Umdrehungen macht ein Rad von 4', um eine Strecke von 12000 F. zurück zu legen?

12) Der runde Schnitt eines Baumes hat einen Durchmesser von 3' 5" d, wie groß ist sein Umfang und seine Fläche?

13) Ein großer, kreisrunder Platz hat 100' d Durchmesser; ein Quadratfuß kostet $1\frac{1}{2}$ sgr. zu pflastern; was kostet der ganze Platz?

14) Wenn der Halbmesser eines Kreises = r ist, wie groß ist der Umfang im Werthe des Durchmessers ($r = \frac{d}{2}$, oder $2r = d$) und der Flächeninhalt im Werthe des Quadrats des Radius für das ein- und umschriebene Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Achteck, Zehneck, Zwölfeck?

15) Die Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen Neunecks und Siebenecks beträgt 9″ und 7″, wie groß sind a. ihre Umfänge, c. ihre Flächen, b. die Umfänge der umschriebenen, d. die Inhalte der umschriebenen Vielecke von derselben Seitenzahl?

16) Wenn der Umfang sammt Durchmesser = 84,22′ d ist, wie groß ist der Halbmesser des Kreises? $2r\pi + 2r = 84{,}22$ oder $(\pi + 1).2r = 84{,}22$ ꝛc.

b. aus dem gegebenen Umfange den Durchmesser und Inhalt des Kreises zu berechnen.

1) Der Umfang eines Kreises ist dd 5′ 9″ 3‴; 7″ 11‴; 10‴; dann d : 100′; 9′ 4″ 2‴; 8′ 3″ — gesucht wird der Durchmesser, Halbmesser und Inhalt.

2) Umfang eines Kreises 33′ 5″ 3‴ d, gesucht der Halbmesser und Inhalt.

3) Der Umfang eines kreisrunden Gefäßes beträgt 22 Fuß, wie groß muß der Halbmesser des Deckels auf dasselbe werden?

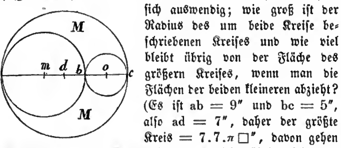
c. aus dem Inhalte des Kreises wird der Halbmesser gesucht.

1) Der Inhalt eines Kreises ist dd : 13□° 65□′ 72□″; 99□′ 36□″; 77□″ 100□‴; dann d : 6□° 3□″ 63□‴; 73□″ 66□‴; 75□‴; gesucht wird der Halbmesser.

2) Ein Dreieck hat eine Grundlinie von 10′ und eine Höhe von 5′; wie groß muß der Radius eines ebenso großen Kreises genommen werden?

3) Eine geradlinige Figur von 93□″ 99□‴ soll als eine ebenso große Kreisfläche dargestellt werden, wie groß ist der Halbmesser?

4) Zwei Kreise von 9″ Durchm. und 5″ Durchm. berühren sich auswendig; wie groß ist der Radius des um beide Kreise beschriebenen Kreises und wie viel bleibt übrig von der Fläche des größern Kreises, wenn man die Flächen der beiden kleineren abzieht? (Es ist ab = 9″ und bc = 5″, also ad = 7″, daher der größte Kreis = $7.7.\pi$□″, davon gehen die Flächen der beiden Kreise ab und es bleibt übrig 2 M.



5) Ein Kreis hat eine Fläche von 100□″, gesucht wird ein anderer Kreis, dessen Hälfte, Drittel oder Viertel schon 100□″ hat; wie groß ist der Halbmesser?

6) Ein regelmäßiges Sechseck hat eine Fläche von 30□′ 76□″, wie groß ist der Halbmesser und die Fläche des Kreises, in welchen das Sechseck beschrieben ist?

7) Ein Kreis hat einen Inhalt von 35□′ 36□″, wie groß ist die Seite des um denselben beschriebenen Quadrats?

d. die Länge eines Kreisbogens von gegebener Gradzahl und gegebenem Halbmesser und umgekehrt soll gesucht werden.

1) Der Halbmesser ist 9″; 8‴; 5′ 3″ d lang, wie groß ist der Bogen von 36°; 75°; 100°?

2) Welcher Bogen gehört zu einem Mittelpunktswinkel von 25° 36′, wenn r = 7′ 3″ ist?

3) Umfang des Kreises 100′; wie groß ist der Bogen von 80°?

4) Inhalt des Kreises = 100□″ dd, wie groß ist ein Bogen von 21°?

5) Wenn zwei Orte gleiche geographische Breite haben, der eine aber 51° nördliche, der andere 51° südliche, wie lang ist der Meridianbogen zwischen denselben? (d = 1713).

6) Wenn 2 Orte auf demselben Parallelkreise liegen, aber um 30° von einander entfernt und wenn der Durchmesser des Parallelkreises = 3000 Meilen ist, wie viel Meilen stehen sie von einander ab?

7) Wie groß ist ein Bogen, welcher bei einem Halbmesser des Kreises von 1′ die Seite des regelmäßigen Dreiecks, Vierecks, Fünfecks, Sechsecks bespannt?

8) Wie groß ist die Länge eines Grades, einer Minute, einer Sekunde, wenn der Halbmesser = 1 ist?

9) Wie viel Grade des Kreises muß man rektificiren, damit eine Linie, so groß als der Radius herauskomme?

10) r = 5″ 9‴, l = 2″ 7‴, wie viel Grad hat der Kreisbogen?

11) Das Bogenstück zwischen zwei Radien zu 7′ 9″ d, beträgt 1′ 5″ d, wie groß ist der entsprechende Centriwinkel?

12) Die Erde bewegt sich in jeder Sekunde um $4\frac{1}{4}$ Meile weit in ihrer Bahn, welche wir einmal als kreisförmig annehmen

wollen; wie groß ist der entsprechende Centriwinkel, wenn die Sonne als in der Mitte stehend angenommen wird und der Halbmesser der Erdbahn $20\frac{1}{4}$ Million Meilen beträgt?

13) Ein Winkel von 75° hat einen Bogen von 36° 7′, wie groß ist der Halbmesser?

14) Ein Meridiangrad oder $\frac{1}{360}$ des Erdumfangs ist = 15 geogr. Meilen, wie groß ist der Durchmesser der Erde?

15) Der Bogen über der Seite eines regelmäßigen Vierecks im Kreise beträgt 4′, wie groß ist der Halbmesser?

e. der Kreisausschnitt oder Sektor.

1) Der Bogen eines Kreisausschnitts bei 3′ 4″ d Halbmesser beträgt 0,8′; wie groß ist der Inhalt?

2) Der zum Kreisausschnitt gehörige Winkel ist 63°; der Halbmesser 5′; gesucht Inhalt.

3) Umfang 100′; Centriwinkel 100°; gesucht die Fläche des Ausschnitts.

4) Der ganze Kreis ist 100□′; wie groß ist ein Ausschnitt von 27° 8′?

5) Inhalt des Sektor = 33□′ 88□″ d; der Bogen 35°; gesucht r.

6) Centriwinkel 25°; Inhalt 45□′; gesucht der Halbmesser und Bogen.

7) Inhalt eines Kreises 100□′; Inhalt des Kreisausschnitts 7□′ 33□″; gesucht die Gradzahl des Mittelpunktswinkels.

f. Kreisabschnitt oder Segment.

1) Wie groß ist ein Kreisabschnitt, wenn der Bogen = 60° ist und der Halbmesser 2′ 5″?

2) Der Halbmesser eines Kreises ist 4″; wie groß ist der betreffende Kreisabschnitt?

3) Wie groß ist der Kreisabschnitt über einer Quadratseite von 12′?

4) Der Inhalt eines Sechsecks im Kreise beträgt 32□′ 66□″, wie groß ist der Kreisabschnitt über einer Seite desselben?

5) Ein Kreis hat 100′ Umfang; wie groß ist das Stück dieses Kreises, welches zwischen 2 parallelen Sehnen liegt, die zu einem Mittelpunktswinkel von 36° und 85° gehören?

g. der Kreisring.

1) Die Halbmesser zweier Kreise sind: dd 8′ 3″ und 2′ 5″; 3′ 9″ und 1′ 2″ d; 7‴ und 4‴ d; 9″ 3‴ und 2″ 9‴ d, gesucht der Inhalt des koncentrischen Ringes.

2) Die Umfänge zweier Kreise sind 150 und 100 Fuß, wie groß ist der betreffende Ring?

3) Der äußere Durchmesser einer kreisförmigen Bleiröhre ist 8‴, der innere 5‴, wie groß ist die Dicke des Ringes und die Fläche?

4) Der Inhalt des Kreisrings = 25 □′; der Halbmesser im Lichten 2′ 5″; wie groß ist der große Halbmesser?

5) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie 5 : 7; der bezügliche Kreisring ist 25 □′, wie groß sind die Radien?

6) Wie groß ist das auf 36° kommende Stück des Ringes, wenn die Radien 5′ und 2′ sind?

7) Die Halbmesser sind 8′ 9‴ und 5′ 3‴, der Mittelpunktswinkel ist 75° 30′, wie groß ist das dazu gehörige Ringstück?

II. Cylinder.

a. Mantel oder konvexe (einseitig gekrümmte) Oberfläche des Cylinders aus gegebenem Halbmesser (Durchmesser) und Höhe.

1) Gesucht der Mantel des Cylinders, wenn in dd $r = 7'$ $5''$ und $h = 3'$ $4''$; dann $r = 3'$ $5''$ $4'''$ und $h = 4'$ $7''$; $d = 6'$ und $h = 2'$; oder in d : $r = 2'$; $3'$ $5''$; $5'$ $7''$ $9'''$ und $h = 4'$; $6'$ $7''$; $9'$ $3''$ $2'''$ ist.

2) Der Umfang des Cylinders ist 7′; die Höhe 8′; gesucht der Mantel.

3) $12' = h$, $4' = d$; gesucht M; ebenso $h = 20'$ und $r = 2\frac{3}{4}'$.

4) Wieviel Quadratfuß Blech braucht man zur Anfertigung von einer cylinderförmigen Röhre, wenn der Durchmesser 5″ und die Länge 5′ ist? Was kostet die Röhre, wenn ein Quadratfuß Blech 6 sgr. kostet?

5) Der Umfang einer cylinderförmigen Säule von 16′ Höhe beträgt 8′; was kostet der Anstrich des Mantels, wenn der Quadratfuß 10 sgr. kostet?

6) Der Durchmesser von Blechröhren soll 7″ sein; sämmtliche

Röhren sollen zusammen 130′ lang werden; wieviel Quadratfuß Blech werden gebraucht und was kosten die Röhren, wenn der Quadratfuß zu $6\frac{1}{2}$ sgr. berechnet wird?

7) Der Mantel eines Cylinders ist 90 □′; die Höhe 10′; gesucht der Radius.

8) Der Mantel eines Cylinders ist 100 □″ 70 □‴ d, der Halbmesser 3′; gesucht die Höhe.

9) Um eine Walze von 4′ Durchmesser ist ein wollener Sack von 120 □′ geschlungen; gesucht wird die Länge des Sackes.

10) Wie wächst die konvexe Oberfläche oder der Mantel des Cylinders a. wenn der Radius allein 2, 3, 4 . . . . n mal oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . . $\frac{1}{n}$ mal so groß wird, b. wenn die Höhe allein in demselben Verhältnisse wächst oder abnimmt, c. wenn sowohl der Halbmesser, als auch die Höhe zu gleicher Zeit in demselben Verhältnisse zu- oder abnehmen?

b. ganze Oberfläche des Cylinders.

1) Wie groß ist die ganze Oberfläche eines Cylinders, wenn der Durchmesser 2′ 6″ dd und die Höhe 7′ 3″ dd ist; ferner in dd : r = 1′ 2″ h = 5′ 6″; r = 2′ 3″ h = 6′ 4″; in d : r = 3′ 5″; h = 6′ 7″; r = 3′ 5″ 6‴; h = 4′ 7″ 8‴.

2) Wieviel Quadratfuß Blech braucht man zur Anfertigung eines cylinderförmigen Gefäßes, welches einen Durchmesser von 6′ und eine Höhe von 2′ hat und oben offen stehen soll?

3) Wie groß ist die Gesammtoberfläche einer eisernen Walze, welche 2′ Durchmesser und 18′ Länge hat?

4) Die Gesammtoberfläche eines Cylinders beträgt 25 □′ 16 □″ dd, die Höhe 3′; gesucht r.

5) Die Gesammtoberfläche eines Cylinders beträgt 145 □′ dd; der Radius ist 4′; wie groß die Höhe?

6) Die Oberfläche eines oben offenstehenden Gefäßes beträgt 157 □′ 8 □″ dd; der Radius 5′; wie groß ist die Höhe?

7) Die Oberfläche eines Cylinders ist 66 □″ d, der Durchmesser 3″; gesucht die Höhe.

8) In welcher Weise wächst die Gesammtoberfläche eines Cylinders, a. dessen Radius 2, 3, 4 . . . n mal so groß oder 2, 3, 4 . . . n mal so klein wird, b. dessen Höhe in demselben Verhältnisse wächst oder abnimmt, c. bei welchem sowohl der

Radius, als auch die Höhe in demselben Verhältnisse wächst oder abnimmt?

9) Die Gesammtoberfläche eines Cylinders ist $513 \square' \; 65 \square'' \; 4 \square'''$; wie groß ist die Oberfläche eines zweiten, dem ersten ähnlichen, wenn der Radius sowohl, als auch die Höhe 3 mal so groß sind?

10) Zwei Cylinder sind ähnlich; ihre Oberflächen sind $20 \square' \; 36 \square'$ d und $30 \square' \; 25 \square'$ d; der Umfang des einen beträgt 4'; wie groß ist der Umfang des andern?

11) Man will 2 ähnliche Gefäße in Cylinderform anfertigen; man braucht dazu $30 \square'$ Blech; wie viel Blech braucht man zu jedem, wenn die Durchmesser 1' und 2' sind?

12) Gegeben $r = 5''$ und $h = 10''$, gesucht O.

13) $O = 513 \square' \; 65 \square''$ dd; $r = 8'$; gesucht h.

c. Kubikinhalt.

1) Grundfl. $= 9 \square'$; Höhe 18'; gesucht K.

2) $r = 7' \; 5'' \; 6'''$, $h = 3' \; 9'' \; 3'''$ dd; gesucht K.

3) $r = 4{,}5$; $h = 20{,}7$ d; gesucht K.

4) $d = 15'$, $h = 37'$; gesucht K. (d).

5) Grundfläche $= 25 \square' \; 93 \square''$; Kubikinhalt $= 100$ k' 586 k"; gesucht die Höhe.

6) Grundfläche $= 23 \square'$; Kubikinhalt $= 75$ k': gesucht die Höhe.

7) Kubikinhalt $= 173$ k'; Höhe $= 25'$; gesucht die Grundfläche; ebenso $K = 128$ k' 63 k", $h = 20'$; gesucht die Grundfläche G.

8) $K = 120$ k'; $h = 7' \; 5''$; gesucht r.

9) $r = 2\frac{1}{2}'$; $h = 12\frac{4}{5}$; gesucht O und K.

10) Umfang $= 14{,}13'$; $h = 48'$; gesucht K.

11) Aus einem Baumstamme, welcher die Form einer quadratischen Säule mit 2' Seite hat, soll ein cylinderförmiger gemacht werden, der 20' lang ist, wieviel Kubikfuß Holz fällt ab?

12) Ein cylinderförmiger artesischer Brunnen ist 1,6' weit und 490' tief; wieviel Kubikfuß Erde ist herausgeschafft worden?

13) Ein runder Baumstamm ist 22' lang und hat einen Halbmesser von $1\frac{1}{2}'$; der k' kostet 3 sgr. 6 pf.; was kostet der Baumstamm?

14) Aus einem cylinderförmigen 2′ dicken Baumstamme soll eine quadratische Säule behauen werden, deren Grundflächenseite = 10″ ist; wie groß ist der Holzabfall?

15) Ein cylinderförmiger Baumstamm hat 8′ Umfang und 25′ Länge; der Kubikfuß kostet 3 sgr.; was ist derselbe werth?

16) Wie hoch müssen die Ölgefäße, Ölmaße für $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1 Pfund werden, wenn das specifische Gewicht 0,94 für Leinöl ist und man den Durchmesser 2, 3, 4, 5 Centimeter annimmt? (Dabei ist das neue Gewicht zu Grunde gelegt, 1 Pf. = 30 Loth; 1 Pf. = 500 franz. Grammen; 1 Gramm = Kubikcentimeter.)

Anm. Da 1 k′ rheinländisch oder preuß. = 66 Altpfund schwer ist, so ist ein k″ $\frac{66.32}{1728} = 1\frac{2}{9}$ Altloth schwer.

Aber x neue Lth. $1\frac{2}{9}$ alte Lth. 11.
171.9. $34\frac{1}{5}$ 10.30 neue Lth. 5.
57 513|550|$1\frac{37}{513}$ neue Lth. = 1,072 neue Lth.
513
37
513|3700|0,0721
3591
1090
1026
640

Oder x $1\frac{2}{9}$ alte Lth. 11.
8.9 $1\frac{1}{7}$ alte Lth. 1 neues Lth. 7.
72|77|$1\frac{5}{72}$ = 1,07 neue Lth.
72|500|0,07
504.

17) Ein cylinderförmiges Gefäß soll ein Nösel, 2, 3, 4 ꝛc. 100 Nösel fassen; die Weite desselben soll 2, 3, 4 Zoll ... 10 Zoll werden, wie groß wird die Höhe, wenn 1 Quart preuß. 64 k″ und ein Nösel = 32 k″ ist?

18) Ein Brunnentrog ist 8′ lang, 3′ breit und 4′ tief und mit Wasser angefüllt; er wird mit einem cylinderförmigen Gefäße von 9″ Durchmesser und 12″ Tiefe oder Höhe ausgeschöpft; wie oft muß geschöpft werden?

19) Ein cylinderförmiger Baumstamm ist 40′ lang, und $3\frac{1}{2}$ F. dick und kostet 90 Thlr.; was kostet der Kubikfuß?

20) Eine Feuerspritze hat 2 Druckpumpen, deren Stiefel $3\frac{1}{2}$″ im Lichten ist; die Hubhöhe ist 9″; der Kolben geht in der Minute 20 mal auf und ab; wieviel Quart Wasser liefert dieselbe in 25 Minuten, wenn 64 k″ = 1 Quart sind?

21) Ein cylinderförmiges Gefäß ist 10" weit und wird mit einem andern von 4" Halbm. und 7" Höhe vollgeschöpft; wie hoch steht die Flüssigkeit nach 10maligem Schöpfen?

22) Eine blecherne Kanne soll 20 preuß. Quart fassen; die Höhe derselben soll 4' betragen, wie groß muß der Radius werden und wieviel Quadratfuß Blech braucht man, da das Gefäß oben offen steht?

23) Ein cylinderförmiges Gefäß soll 15 Quart preuß. fassen; Durchmesser und Höhe sollen in dem Verhältnisse von 1 : 2 stehen; wie groß muß der Durchmesser und die Höhe werden?

24) Aus 20□' Blech soll ein cylinderförmiges Gefäß gefertigt werden, dessen Durchmesser = der Höhe ist (gleichseitiger Cylinder); wieviel preuß. Quart muß dasselbe fassen?

25) Zwei ähnliche cylinderförmige Gefäße haben zusammen 5 k' Wasser; das eine ist 1', das andere 2' hoch; wieviel Kubikfuß geht in jedes der Gefäße?

26) Das Gewicht eines eisernen Cylinders, der 10 Fuß hoch ist, beträgt 100 Pfund; wie groß ist der Halbmesser? (sp. Gew. des gegossenen Eisens = 7,207.)

27) Das Gewicht einer marmornen cylinderförmigen Säule sei = 300 Pfd.; das specif. Gewicht des Marmors = 2,7; der Halbm. = 2'; gesucht die Höhe.

28) Der Durchmesser eines cylinderförmigen Gefäßes ist = 12" dd, die Höhe 15" dd; wieviel beträgt der Druck des Wassers in demselben gegen die krumme Seitenwand?

29) Eine Marmorsäule hat 8' Umf. und 18' Höhe; das spec. Gew. = 3; wie groß ist das Gewicht derselben?

30) Wie schwer ist ein Mühlstein aus Tilleda, wenn das spec. Gew. des Steines = 2,8, der Durchm. $3\frac{1}{2}$', die Höhe 8" ist?

31) Es sollen eiserne cylinderförmige Gewichte gegossen werden von 10, 20, 30, 40, 50 und 100 Pfd.; der Durchmesser soll von 6" um stets 2 Zoll wachsen; das spec. Gew. ist = 7,2; wie groß ist die Höhe?

32) Wie schwer ist eine cylindrische Quecksilbersäule, deren Durchmesser 1" und deren Höhe 28" ist, wenn das spec. Gewicht derselben = $13\frac{1}{2}$ ist?

33) Aus 16 Ctr. Eisen sollen 3 Walzen, jede 4' lang gegossen werden; dem Gewichte nach sollen sich dieselben wie 3 : 4 : 5

verhalten; wie groß werden die Halbm., wenn das spec. Gewicht 7,2 ist?

34) In ein Gefäß von 9″ Weite, welches mit Wasser angefüllt ist, wird ein kupferner Würfel von 20 Pfd. gelegt, wie hoch muß das Wasser steigen? (spec. Gewicht = 9).

d. Hohler Cylinder.

1) Gesucht wird der Kubikinhalt eines Cylinderringes, wenn der große Durchmesser 10″, der kleine (im Lichten) 7″ und die Höhe 11″ ist?

2) Eine Brunnenleitung in bleiernen Röhren ist 5000′ lang; der äußere Durchm. = 3″; der innere 2″ 4‴; das Pfd. Blei kostet 2 sgr. 6 pf. und hat das specif. Gewicht 11,4; was kostet die Leitung?

3) Welchen Kubikinhalt hat eine 7′ lange eiserne Röhre, wenn ihr Umfang 3′ 5″ und die Eisendicke .2″ beträgt?

Konstruktive Aufgaben über den Kreis.

1) Von 2 gegebenen Punkten zwei Kreise zu beschreiben, welche einander von Innen oder von Außen berühren.

2) Die Linie anzugeben, in welcher die Mittelpunkte aller Kreise liegen, welche durch 2 gegebene Punkte gehen (den geometrischen Ort).

3) Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte einen Kreis zu legen (durch die Spitzen eines Dreiecks).

4) Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

5) Gegeben ein Punkt in der Peripherie; man soll eine Tangente durch denselben an den Kreis legen; ebenso, wenn ein Punkt außerhalb des Kreises gegeben ist.

6) An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche mit einer gegebenen Linie einen gegebenen Winkel macht.

7) Gegeben ein Kreis und eine Gerade; in der letztern soll der dem Umfange nächste Punkt bestimmt werden.

8) Gegeben ein Punkt und eine Gerade; man soll von demselben aus einen Kreis zeichnen, welcher die Gerade berührt.

9) Gegeben ein Punkt im Kreise; man soll durch denselben die kleinste Sehne ziehen.

10) Über einer gegebenen Geraden einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel faßt.

11) Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

12) Den geometrischen Ort für die Spitzen der Dreiecke zu bestimmen, welche bei gemeinsamer Grundlinie denselben Winkel an der Spitze haben.

13) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches den rechten Winkel an der Spitze hat.

14) Ein gegebenes Dr. in ein anderes von gegebener Grundlinie und dem ihr gegenüberliegenden W. zu verwandeln.

15) Zu 2 gegebenen Geraden in verschiedener Weise die mittlere Proportionale zu finden.

16) Auf einer Geraden ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck, Achteck, Zehneck, Funfzehneck zu zeichnen.

17) Gegeben die Seite eines 2nEcks, man soll ein nEck und auf der Seite des nEcks ein 2nEck zeichnen.

18) Gegeben ist ein Kreis, man soll in und um denselben das regelmäßige Zweieck, Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Achteck, Zehneck, Zwölfeck, Funfzehneck, Sechszehneck, Zwanzigeck, Zweiunddreißigeck ꝛc. zeichnen.

19) Wenn eine regelmäßige Figur oder ein beliebiges Dr. gegeben ist, in dieselben und um dieselben einen Kreis zu zeichuen.

20) In einen Rhombus einen Kreis, in ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck, in ein regelmäßiges Sechseck ein regelmäßiges Dreieck, in ein beliebiges Dreieck ein Quadrat, in ein Dreieck ein Oblongum zu zeichnen, dessen Seiten in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

21) Um ein Oblongum und ein Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel sich zu 2 R ergänzen, einen Kreis zu beschreiben.

22) Gegeben ist ein Kreis, man soll einen 4, 9, 16 . . . n^2 mal so großen oder kleinen, oder einen 2, 3, 5, 6, 7 ꝛc. mal so großen oder kleinen zeichnen.

23) Einen Kreis zu zeichnen, welcher so groß ist als 2, 3, 4, . . . n andere Kreise zusammengenommen.

24) Ein größerer und ein kleinerer Kreis sind gegeben, man soll einen andern zeichnen, welcher der Unterschied zwischen beiden ist.

25) Ein Quadrat in ein Oblongum von gegebenem Umfange zu verwandeln.

26) Einen Halbkreis in einen ganzen von derselben Fläche;

ebenso einen ganzen Kreis in einen Halbkreis; einen Kreis in eine ringförmige Figur; einen Kreis in eine mondähnliche Figur; eine Ringfläche in einen ebenso großen Kreis; einen Quadranten in einen Halbkreis; einen Quadranten in einen ganzen Kreis; ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dr. in einen Mond; zwei gleichseitige Dr. Dr. in eines zu verwandeln zwei ähnliche Figuren in eine dritte beiden ähnliche Figur, welche die Summe ist, zu verwandeln.

27) Ein Vieleck zu zeichnen, welches einem andern ähnlich ist und einen bestimmten Flächeninhalt hat.

28) Ein Dr. in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen ähnlich ist.

29) Ein ungleichseitiges Dr. in ein gleichschenkliges und gleichseitiges zu verwandeln, ebenso ein Paralleltrapez in ein Quadrat.

30) Ein Dr. in 4, 9, 16 2c. n^2 kongruente Dr. Dr. zu theilen.

31) Eine geradlinige Figur zu zeichnen, welche einer andern gegebenen ähnlich, aber irgendvielmal, 2, 3, 4, . . . n mal so groß ist.

32) Einen Kreis zu zeichnen, der einen 2, 3, 4, . . . n mal so großen oder einen ebenso vielmal so kleinen Umfang hat.

IV. Von den Pyramiden.

Eine Pyramide kann auf verschiedene Weise entstehen. So kann sich im einfachsten Falle irgend ein Dreieck senkrecht oder schief, mit seiner früheren Lage stets parallel nach oben bewegen und dabei nach einem bestimmten Gesetze so lange an Größe abnehmen, bis dasselbe endlich zu einem Punkte zusammenschrumpft. Man könnte aber auch drei Linienwinkel mit den zwischen ihren Schenkeln liegenden Ebenen so zusammen stellen, daß sie eine körperliche Ecke bildeten und dieselbe durch eine vierte Ebene, welche ein Dreieck werden müßte, durchschneiden. Stände ferner auf irgend einer Ebene eine senkrechte Linie, bildete man sich ein rechtwinkliges Dreieck, indem man die andere Kathete in der Ebene annähme und beider Katheten Endpunkte durch die Hypotenuse verbände; drehte man das Dreieck um die erste Kathete, wobei man aber die zweite Kathete und Hypotenuse in ihrer Größe stetig ab- oder zunehmend voraussetzte, so daß drei Dreiecke mit derselben Spitze und auch ein Dreieck als Grundfläche entstände, so entstände ebenfalls die dreiseitige Pyramide.

Die dreiseitige Pyramide ist ein von 4 Dreiecken eingeschlossener Körper. Dieselbe hat 3 Ausdehnungen; die eine von rechts nach links, die zweite von vorn nach hinten, die dritte von unten nach oben. Das hat dieselbe mit den früheren Körpern gemein, ebenso, daß dieselbe von ebenen, geradlinigen Flächen eingeschlossen ist. Man erkennt leicht die Grundfläche, das Dreieck, auf welchem die Pyramide steht, die 3 Seitenflächen, welche nach oben in eine Spitze zusammenlaufen. Man findet 6 Kanten, 3 Grundflächen- und 3 Seitenkanten, 4 Ecken, von denen jede durch drei ebene Winkel gebildet und eine die Spitze ist. Also die Kantenzahl ist 2 mal so groß, als die Seitenzahl der Grundfläche,

die Eckenzahl um 1 größer. Je nach der Beschaffenheit der Grundfläche, ob dieselbe ein gleichseitiges, gleichschenkliges, ungleichseitiges, recht-, stumpf-, oder spitzwinkliges Dreieck ist, gestaltet sich die Pyramide anders. Zwei Seitenflächen können höchstens auf der Grundfläche senkrecht stehen, die dritte muß stets schief stehen und einen Flächenwinkel, kleiner als 90° bilden. Was zunächst die Linienwinkel der Grundfläche anlangt, so kann unter denselben höchstens ein rechter oder stumpfer sein, dasselbe gilt von den Winkeln der Seitenflächen, da dieselben auch Dreiecke sind. Über die Neigung der Seitenflächen zur Grundfläche läßt sich nicht für alle 3seitige Pyramiden Etwas im Voraus bestimmen. Heißt man die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe und fällt diese noch innerhalb der Grundfläche, so werden die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, kleiner als 90°; fällt die Höhe mit ihrem Fußpunkte in den Umfang des Dreiecks, so steht auch eine von den Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche und man hat einen rechten Flächenwinkel und zwei spitze, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden. Man konnte auch sagen, fällt die Höhe in eine Seitenfläche, so steht dieselbe auf der Grundfläche senkrecht; fällt die Höhe mit einer Seitenkante zusammen, so stehen 2 Seitenflächen — aber nicht mehr — auf der Grundfläche senkrecht. Fällt endlich die Höhe weder innerhalb der Grundfläche, noch in den Umfang, sondern in die verlängert zu denkende Grundfläche, so muß der eine Flächenwinkel stumpf werden. Ist das Grundflächendreieck rechtwinklig und stehen auf den beiden Katheten zwei rechtwinklige Dreiecke senkrecht, welche die Höhe oder eine Kathete gemein haben, so bilden zwei Seitenflächen mit der Grundfläche rechte Flächenwinkel; der dritte muß dann schief und zwar spitz sein. Fragt man ferner nach den Flächenwinkeln, welche die Seitenflächen mit einander bilden, so hängt ihre Größe auch davon ab, ob die Höhe die Grundfläche, den Umfang oder die zu verlängernde Grundfläche trifft, so daß sich die Sache für den einzelnen Fall anders gestaltet. In ähnlicher Weise steht es auch mit den Linienflächenwinkeln.

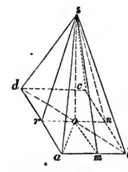
Man kann sich aber auch anstatt einer dreieckigen Grundfläche eine beliebige vier-, fünf-, sechs- . . . nseitige Grundfläche denken, durch deren Aufwärtsbewegung die mehrseitige

Pyramide gebildet wird. Dieselbe hat ein nEck zur Grundfläche und so viele Seitenkanten, als die Grundfläche Seiten oder Ecken hat; die Anzahl aller Kanten zusammengenommen ist 2 mal so groß, als die Seitenzahl der Grundfläche; die Anzahl der Ecken ist um 1 größer, die Spitze wird durch 4, 5, ... n ebene Winkel, jede Ecke an der Grundfläche durch 3 ebene Winkel gebildet. Über die Linienwinkel, die Flächenwinkel, die Linienflächenwinkel läßt sich im Voraus Nichts bestimmen. Denkt man sich das 4Eck, 5Eck ... nEck der Grundfläche durch Diagonalen in 2, 3, ... $n-2$ Dreiecke zerlegt und legt man durch die Spitze und je eine Diagonale Ebenen, so zerfällt die vier-, fünf-, ... nseitige Pyramide in 2, 3 ... $n-2$ dreiseitige Pyramiden. Die Summe der Grade oder rechten Winkel, welche alle Linienwinkel der Pyramide bilden, läßt sich leicht berechnen. Denn ist die Grundfläche ein nEck, so sind alle Winkel derselben $n-2$ mal 2 Rechte oder 180^0; dann hat man aber auch noch nDreiecke, jedes hat 2 Rechte oder 180^0, daher die Linienwinkel aller Seitenflächen n mal 2 Rechte oder 180^0 betragen. Zählt man nun die Gradzahl der Winkel der Grundfläche und der Seitenflächen zusammen, so hat man $n-2$ mal 2 Rechte $+$ n mal 2 Rechte oder zusammen $2n-2$ mal 2 Rechte oder auch $(n-1)$ mal 4 Rechte. Setzt man $n = 3$, also $n-1 = 2$, so hat man 2 mal 4 oder 8 Rechte, denn es sind 4 Dreiecke vorhanden.

Legt man durch die Spitze einer Pyramide und die Höhe eine Ebene senkrecht zur Grundfläche, so muß die Durchschnittsfigur ein rechtwinkliges Dreieck sein, wenn die Höhe in eine Seitenfläche der Pyramide fällt; das Dreieck wird spitzwinklig, wenn der Fußpunkt der Höhe innerhalb der Grundfläche liegt, und stumpfwinklig, wenn dieser Fußpunkt in die zu verlängernde Grundfläche fällt.

Zur weiteren Betrachtung der Pyramiden errichte man in irgend einem Punkte der Ebene eine Senkrechte oder denke sich dieselbe errichtet; den Fußpunkt des Perpendikels verbinde man mit den Eckpunkten der Grundfläche durch Eckstrahlen, die Eckpunkte der Grundfläche denke man sich mit dem andern Endpunkte der Senkrechten, mit der Spitze, durch gerade Linien verbunden, so erhält man soviel rechtwinklige Dreiecke, als die Grundfläche

Seiten oder Ecken hat. Alle diese Dreiecke haben die Höhe als die eine Kathete gemein; ob die Kanten oder Hypotenusen gleich sind, hängt nur noch davon ab, ob die Eckstrahlen gleich sind. Das Dreieck, in welchem der Eckstrahl der größere ist, hat auch die größere Kathete; sind die Eckstrahlen nach 2 benachbarten Eckpunkten einander gleich, so muß die Seitenfläche, welche die Kante zwischen den beiden Ecken zur Grundlinie hat, ein gleichschenkliges Dreieck sein. Zum näheren Verständniß errichte man in einem Punkte einer wagerechten Ebene die Senkrechte os und wenn z. B. die Grundfläche ein Viereck abcd ist und die Eckstrahlen oa, ob, oc und od, die Seitenkanten as, bs, cs und ds sind, so hat man die rechtwinkligen Dreiecke aos, bos, cos und dos; ist oa = ob, so ist auch as = bs 2c. Hat der Schüler erst die betreffenden Linien, welche in verschiedenen Ebenen liegen, mehrmals angeschaut, so wird derselbe auch im Stande sein, die in einer Ebene liegenden Linien als in verschiedenen liegend sich vorzustellen und also geistig sich das Bild der Pyramide zu reproduciren.



Beistehende Figur soll uns die Pyramide und die in verschiedenen Ebenen liegenden Linien als in einer Ebene liegend vorstellen; die punktirten Linien sind die dem Auge nicht sichtbaren; von dem Fußpunkte o sind Senkrechte nach den Kanten der Grundfläche gefällt or, on, om, welche also den Seiten der Grundfläche parallel laufen, wenn die Grundfläche ein rechtwinkliges Parallelogramm, z. B. ein Oblongum ist. Dann sind auch die Eckstrahlen oa, ob, oc und od einander gleich, also auch die Kanten as, bs, cs und ds; fällt man ferner Senkrechte von dem Punkte s in den einzelnen Seitenflächen, welche gleichschenklige Dreiecke sind, auf die Grundlinien, so treffen dieselben die Halbirungspunkte r, m, n, welche auch von den Senkrechten or, om, on getroffen sind und die Winkel ors, oms und ons stellen uns das Maß der Neigung der Seitenflächen zur Grundfläche oder die Flächenwinkel vor. Denkt man sich den Winkel oms (und zwar om in der Ebene der Grundfläche und ms in der Ebene der

Seitenfläche) rechts oder links gerückt, so daß die Linien sich immer parallel bleiben, so bleibt das Maß für die Neigung der Flächen immer dasselbe oder konstant. Die Senkrechte in der Seitenfläche, also rs, ms, ns ist als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks immer größer, als die entsprechende Senkrechte in der Grundfläche oder die Kathete or, om, on. Die Dreiecke aob und asb haben zwar dieselbe Grundlinie ab, aber verschiedene Höhe, om < ms, daher muß der Flächeninhalt des Dreiecks aob < sein, als der Flächeninhalt des Dreiecks asb. Was aber von diesem einzelnen Dreieckspaare gilt, das gilt von allen, wie aod und asd, doc und dsc, boc und bsc, so daß man behaupten kann, daß in der genannten Pyramide die 4 Seitenflächen größer sind, als die Grundfläche. Man könnte aber auch ebensowohl eine mehr, als 4seitige Figur voraussetzen, in welcher die Eckstrahlen gleich wären; es finden ferner auch ganz dieselben Beziehungen Statt, wenn die Höhe der Pyramide außerhalb derselben auf die zu verlängernde Grundfläche oder in eine ihrer Seitenflächen fällt. Daher: In einer Pyramide die Summe der Seitenflächen immer größer ist als die Grundfläche. Denkt man sich das rechtwinklige Dreieck amo mit dem rechten Winkel bei m. in das rechtwinklige Dreieck ams gelegt, so fällt mo zwar entlang der ms, aber o zwischen m und s; am haben beide Dreiecke gemein, und aom wird dann der Außenwinkel des Dreiecks aos (man braucht aom nur um den Winkel oms zu drehen); als solcher ist aber Winkel aom größer, als asm. Ebenso W. mob > Winkel msb rc. Daher: die Summe der Eckstrahlwinkel der Grundfläche ist größer, als die Summe der ebenen Winkel an der Spitze s der Pyramide. Mit der Gleichheit der Eckstrahlen ergiebt sich die Gleichheit der Seitenkanten, also die Gleichschenkligkeit der Dreiecke, welche die Seitenflächen bilden. Ob aber diese Dreiecke unter sich wieder kongruent sind, das hängt noch von der Größe der Kanten der Grundfläche oder auch von den Winkeln asb, bsc rc. ab. Wäre die Grundfläche ein Quadrat, oa = ob = oc = od und ebenso ab = bc = cd = da, so wären die 4 Dreiecke kongruent. Wäre die Grundfläche abcd ein Oblongum, so wäre zwar die Gleichschenkligkeit der Seitenflächen, aber nicht die Kongruenz vorhanden; es wären dann nur die gegenüberliegenden

Seitenflächen einander gleich. Setzt man außer der Gleichheit der Eckstrahlen noch die Gleichheit der Seiten der Grundfläche voraus oder läßt man die Ebene um den Punkt o herum durch die gleichen Eckstrahlen in n gleiche Winkel theilen (n = oder > 3), so wird die Grundfläche eine regelmäßige Figur; die Dreiecke aob, boc 2c. die Flächenwinkel ors, oms 2c., die Seitenflächen asb, bsc 2c. sind kongruent; ist dann im Mittelpunkte der Grundfläche die Höhe oder Achse errichtet, so heißt die Pyramide regelmäßig und senkrecht oder gerade. Mit der Ungleichheit der Eckstrahlen hängt die Ungleichheit der Seitenkanten zusammen.

Es ergiebt sich nun daraus ganz von selbst, daß bei der Gleichheit der Seitenkanten einer Pyramide die Grundfläche einen nach den Ecken centrischen Punkt haben muß; es geht ferner das aus dem Scheitel auf die Grundfläche gefällte Perpendikel durch den Mittelpunkt derselben, weil die Fußpunkte der Seitenkanten vom Fußpunkte der Höhe gleiche Entfernung haben. Setzt man die Seitenflächen einer Pyramide als gleichschenklige, kongruente Dreiecke voraus, so ist auch die Grundfläche gleichseitig, centrisch nach den Ecken und das vom Scheitelpunkt gefällte Perpendikel trifft den centrischen Punkt. Die Grundfläche ist also auch centrisch nach den Seiten. Eine Pyramide ist demnach gerade, wenn die Seitenflächen derselben gleichschenklige kongruente Dreiecke sind. Die Geradheit einer Pyramide ergiebt sich auch, wenn sie nur gleichschenklige Dreiecke zu Seitenflächen hat und diese mit der Grundfläche gleiche Winkel bilden; denn die Grundfläche ist dann nach Ecken und Seiten centrisch, während die Senkrechte aus dem Scheitel durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht.

Hat man irgend eine Pyramide und nimmt in einer Seitenkante zwischen einer Ecke der Grundfläche und der Spitze einen Punkt an und legt durch denselben eine Gerade parallel zu den Seiten der Grundfläche und fährt so fort, bis in jeder Seitenfläche eine Parallele zu einer Seite der Grundfläche liegt, so erhält man ein nEck, dessen Seiten zu denen der Grundfläche parallel mit einander dieselben Winkel bilden, wie die Seiten der Grundfläche. Beide Figuren von gleicher Seitenzahl sind an Gestalt gleich, wenn auch an Größe verschieden. Legt man durch eine zu einer Seite der Grundfläche parallele Gerade eine

Ebene quer durch die Pyramide, so zerfällt dieselbe 1) in einen oberen Theil, welcher eine der ganzen Pyramide ähnliche kleinere Pyramide ist und mit ihrer Grundfläche auf die größere Grundfläche herunter gerückt gedacht werden kann, so daß die Achsen in einander fallen; 2) in ein Körperstück, welches die ursprüngliche Grundfläche und eine zu dieser parallele obere Fläche hat. Dasselbe würde einer Säule gleichen — aber die Seitenkanten sind nicht parallel, nur die unteren und oberen, so daß die Seitenflächen, welche der Zahl nach der Zahl der Seiten der Grundfläche gleich sind, Paralleltrapeze sind. Die Senkrechte zwischen den beiden Grundflächen oder ihrer Verlängerung, heißt die Höhe der abgekürzten Pyramide; diese Höhe ist bei der geraden Pyramide ein Theil der Achse.

Wie eine Pyramide durch Bewegung eines nEcks nach einem bestimmten Gesetze in der Richtung nach oben entsteht, ist bereits früher angedeutet worden. Denkt man sich, daß dasselbe nEck nach demselben Gesetze und in derselben Weise sich wiederholt bewegte, so würden Pyramiden entstehen, welche als nach einem identischen Bildungsgesetze entstanden, in Bezug auf Größe und Gestalt mit einander übereinstimmten oder kongruent wären. Denkt man sich den von der einen eingenommenen Raum leer, so könnte man jede von den übrigen so in denselben hineinschieben, daß er den Raum derselben vollkommen ausfüllte. Zwei solche Pyramiden stimmten in jeder Beziehung mit einander überein — also in den Grundflächen, in der Anzahl und Kongruenz und Aufeinanderfolge der Seitenflächen, in der Größe und Aufeinanderfolge der Seitenkanten, der Flächenwinkel ꝛc. Man könnte aber auch die Frage aufwerfen, welche von den Bestandtheilen einer Pyramide man kennen müßte, um aus denselben die Pyramide zu bilden, so daß dieselbe an Gestalt und Größe bestimmt wäre, so daß die wiederholt gebildete Pyramide allen früheren kongruent wäre. Es lassen sich dabei sehr mannigfache und verschiedene Fälle denken. So ist z. B. die Pyramide, welche von 4 gleichseitigen, unter sich kongruenten Dreiecken eingeschlossen ist und das Tetraeder oder der Vierflächner genannt wird, schon bestimmt, wenn man eine Kante oder die Seite des gleichseitigen Dreiecks kennt. Denn aus derselben kann man das gleichseitige Dreieck, welches die Grundfläche bildet, zeichnen und die übrigen dann so anlegen,

daß sich die Kanten an einander anschließend zur Spitze zusammenlaufen und dabei die Flächenwinkel zur Grundfläche und unter sich selbst mit Nothwendigkeit bilden. Ebenso könnte man leicht eine gerade Pyramide bauen aus der Grundfläche, welche eine regelmäßige Figur wäre und aus einer der kongruenten Seitenflächen ꝛc. Kennt man bei einer Pyramide die an der Spitze liegenden Flächen nach Größe, Gestalt und Aufeinanderfolge und das Raumvieleck, welches durch dieselben gebildet wird, und die Länge der Kanten, welche mit der Größe und Gestalt der Flächen gegeben ist, so kennt man überhaupt die Pyramide oder dieselbe ist bestimmt. Bleibt man bei den dreiseitigen Pyramiden stehen, so ist eine solche vollständig bestimmt, wenn drei zusammenstoßende, bestimmte Seitenflächen, oder wenn zwei bestimmte Seitenflächen und der von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel bei einer bestimmten Lage derselben in bestimmter Ordnung auf einander folgen; oder wenn eine Seitenfläche bestimmt ist und die drei anliegenden Flächenwinkel (durch den Flächenwinkel zweier an Größe nicht bestimmten Flächen, erfährt man nur ihre Richtung, nicht ihre Größe) bei einer bestimmten Lage derselben in einer bestimmten Weise auf einander folgen.

An zwei Pyramiden kann man ganz dieselben, an Gestalt und Größe gleichen Bestandtheile voraussetzen; aber was an der einen von einem bestimmten Punkte aus rechts herum, kann bei der andern links herum liegen, was durch Drehung des erzeugenden Dreiecks in entgegengesetztem Sinne entstanden sein kann. Solche Pyramiden heißen symmetrisch. Man müßte eine von beiden, wie einen Handschuh erst umstülpen oder link machen, wenn Kongruenz Statt finden sollte. Bei symmetrischen Dreiecken braucht man nur das eine von beiden umzudrehen. So findet man auch die Symmetrie an den beiden menschlichen Händen, wenn man an denselben die innere Fläche betrachtet; an Häusern, wenn sich von einer gewissen Mittellinie aus Alles ebenso nach links, als nach rechts gestaltet ꝛc. Wenn freilich die Pyramiden symmetrisch und gerade sind, so braucht keine Umstülpung Statt zu finden, um Kongruenz zu erzeugen; dieselben sind trotzdem kongruent, weil bei der Entgegengesetztheit der Lage die übereinstimmenden Stücke dennoch in der nämlichen Ordnung auf einander folgen.

Die Form der Pyramiden in der Natur ist nicht selten; manche Thurmdächer, Feueressen rc. erinnern uns an dieselbe Gestalt. Besonders aber gedenken wir hier der berühmten ägyptischen Pyramiden, welche in der Grundfläche 4eckig sind und im Innern wagerechte, schräg und senkrecht absteigende Gänge enthalten, welche zu Gemächern, den muthmaßlichen Begräbnißstätten der Könige führen und gewöhnlich nach den 4 Himmelsgegenden gerichtet sind. Das Wort selbst soll ägyptischen Ursprungs sein und auf das Königsgeschlecht und hohe erhabene Denkmale hinweisen. Aus der Pyramidengruppe von Dschize in Ägypten ist die größte und nördlichste die des Cheops. Riesige Baukräfte, durch lange Zeiträume hindurch, müssen dieselbe vollendet haben. Die Länge jeder Seite ist ungefähr 650 par. F., die Höhe 465 par. F.; die Pyramide ist abgestumpft; die obere Fläche ist ein Quadrat von 30 F. Seite.

Der Körperwinkel an der Spitze der Pyramide ist aus n Ebenen gebildet, wobei $n =$ oder > 3 sein muß. Die Pyramide ist dann $n$seitig, hat $n + 1$ Grenzflächen (n Dreiecke und ein nEck), $2n$ Kanten und $n + 1$ Ecken (eine $n$seitige und $n$dreiseitige).

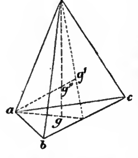
Je weiter man in der Senkrechten, welche im Mittelpunkte einer regelmäßigen Figur errichtet ist, den Punkt emporrücken läßt, welcher die Spitze der Pyramide sein soll, bis derselbe unendlich weit entfernt ist, desto mehr nähern sich die Seitenkanten der senkrechten Stellung zur Grundfläche und der unter sich parallelen Lage und Höhe und Kanten werden an Größe gleich. Sind dieselben gleich geworden und legt man durch ihre Endpunkte eine zur Grundfläche parallele Ebene, so geht die $n$seitige, regelmäßige Pyramide in eine $n$seitige, regelmäßige Säule (Prisma) über. Von der abgestumpften Pyramide ist der Obelisk noch verschieden. Denn hat man in zwei parallelen Ebenen zwei Vielecke von gleicher Seitenzahl, deren entsprechende Seiten parallel laufen, so daß beide Vielecke gleichwinklig sind, ohne daß zwei denselben Winkel einschließende Seiten im einen und andern Vieleck dasselbe Verhältniß zu einander haben, so kann durch je zwei entsprechende Seiten eine Ebene gelegt werden, wobei jede derartige Ebene die folgende schneidet, und der auf diese Weise entstehende Körper heißt ein Obelisk. Seine Grenzflächen sind die beiden parallel liegenden Vielecke und soviel Trapeze, als die ursprünglichen

Vielecke Seiten besitzen. Hat jedes der genannten Vielecke nSeiten, so ist der Obelisk ein nseitiger und enthält $n + 2$ Seitenflächen, 3nKanten und 2nEcken. Von dem Prisma unterscheidet sich der Obelisk dadurch, daß seine Seitenflächen nicht Parallelogramme, sondern Trapeze sind, von der abgestumpften Pyramide (welcher er in der äußern Gestalt ähnelt) dadurch, daß die nSeitenflächen sich nicht nothwendig in einem Punkte schneiden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die parallelen vieleckigen Begränzungsebenen nicht ähnlich zu sein brauchen. Dagegen lassen sich umgekehrt Prisma und abgestumpfte Pyramide als spezielle Fälle des Obelisken ansehen und nur für den dreiseitigen Obelisken ist zu bemerken, daß derselbe entweder ein Prisma oder eine abgestumpfte Pyramide sein muß, weil zwei gleichwinklige Dreiecke, wenn nicht kongruent, so doch ähnlich sein müssen, so daß die Seitenpaare, welche dieselben Winkel einschließen, ein und dasselbe Verhältniß bilden, wie 2 : 1, oder n : m. (Siehe Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maßes von Dr. Schlömilch. II. Geom. des Raumes, Eis. Bärecke, 1854. S. 39, 40).

Es ist nun, bevor wir uns zur Ausmessung der Linien, Flächen und des Kubikinhaltes bei der Pyramide wenden, noch räthlich, die Pyramide in ihren Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten mit dem Prisma zu vergleichen, dann noch einige Netze von Pyramiden zu zeichnen.

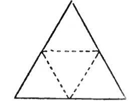
Worin stimmen nun die Pyramiden mit den Säulen überein und worin unterscheiden sie sich von denselben? Zwar haben sowohl die Säulen, als auch die Pyramiden drei Ausdehnungen, zwar sind beide von ebenen, geradlinigen Figuren eingeschlossen, zwar haben beide eine gewisse Größe und können sogar möglicher Weise in derselben übereinstimmen, zwar sind beide durch Bewegung einer ebenen Fläche von unten nach oben, oder durch Drehung einer erzeugenden Fläche entstanden, zwar wird bei beiden weder auf den Stoff, noch auf sonstige Eigenschaften irgend ein Gewicht gelegt und nur die Größe und Gestalt in's Auge gefaßt — aber es stellen sich noch größere und bedeutendere Unterschiede zwischen beiden Körpern heraus. Diese würden sich in bestimmterer Weise herausstellen, wenn man eine regelmäßige senkrechte Säule mit einer

geraden regelmäßigen Pyramide vergliche. Aber auch ohne diese Beschränkung findet man leicht 1) daß die Säule zwei kongruente Flächen, die untere und obere besitzt, welche beide parallel sind, während die Pyramide nur eine nseitige oder neckige Grundfläche besitzt, aber keine obere, derselben parallele und kongruente, weil dieselbe bei der Bewegung nach oben zum Punkte zusammenschrumpft ist und Spitze heißt. 2) Sieht man von den Grundflächen ab und berücksichtigt die Seitenflächen, so sind dieselben bei der Säule stets Parallelogramme, bei der Pyramide Dreiecke. Für den speziellen Fall ließe sich auch die Art der Parallelogramme und Dreiecke bestimmen. 3) Bei der Pyramide können die Flächenwinkel, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, nie alle recht sein, wie bei einer senkrechten Säule. 4) Bei einer Säule müssen alle Seitenkanten gleich sein, nicht so bei einer Pyramide. 5) Durch Legung von Diagonalebenen zerfällt die Säule zuletzt in 2 oder mehrere dreiseitige Säulen, die Pyramide in 2 oder mehrere dreiseitige Pyramiden. Durch Betrachtung spezieller Fälle von Säulen und Pyramiden gestalten sich noch andere Unterschiede.

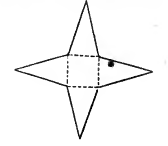


Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide wird gefunden, wenn man die Schwerpunkte zweier Dreiecke sucht, welche die Pyramide begrenzen und diese Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbindet. Der Durchschnittspunkt dieser Linien, welcher von der Spitze 3 mal soweit entfernt ist, als von der Grundfläche, ist der Schwerpunkt.

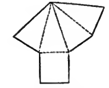
Netz einer Pyramide, welche von 4 kongruenten gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen ist oder des Tetraeders.



Netz einer geraden quadratischen Pyramide.



Netz derselben quadratischen Pyramide in anderer Weise.

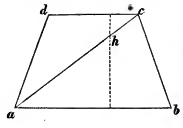


In ähnlicher Weise ließen sich noch die Netze von vielen andern Pyramiden konstruiren, wenn nicht die analoge Verfahrungsweise sich von selbst darböte.

Die **Linienmessung** und was mit derselben zusammenhängt, läßt sich leicht ausführen, je nachdem die Grundfläche eine regelmäßige Figur ist und die Seitenflächen kongruente Dreiecke sind mit gleichen Kanten oder nicht. Setzt man nun die Kante der Grundfläche = a″, die Seitenkante = b″, die Seitenzahl = n, so ist der Umfang der Grundfläche = n.a″; es sind aber auch n Seitenkanten mit dem Umfange n.b″ vorhanden. Alle Kanten zusammen = na″ + nb″ = n (a + b)″. Das wäre der einfachste Fall, welcher sich aber freilich sehr vielfach anders gestalten könnte, je nachdem alle Kanten der Grundfläche verschieden und auch je nachdem die Seitenkanten groß wären. **Im Allgemeinen muß man die Kanten ausmessen und zusammenzählen, wenn man den Umfang finden will.** Um die **Höhe** einer Pyramide zu finden, können verschiedene Fälle möglich sein. Wäre die Pyramide klein, so ließe sich dieselbe zwischen 2 parallele Flächen z. B. die eines Schraubstocks bringen und dann die senkrechte Entfernung beider Flächen ausmessen. Unter Umständen könnte man die Höhe auch durch Rechnung finden. Denn stände die Höhe senkrecht auf der Grundfläche und wüßte man ihren Fußpunkt, vielleicht den nach den Ecken centrischen Punkt, so könnte man **die Entfernung nach einer Ecke der Grundfläche und die betreffende Kante** messen, welche als Hypotenuse mit dieser Linie und der Höhe ein rechtwinkliges Dreieck bildet. Ist die eine Kathete a″, die Höhe h″, die Hypotenuse b″, so wäre $h = \sqrt{b.b\Box'' - a.a\Box''}$. Die Höhe einer höheren, z. B. ägyptischen Pyramide müßte man aus ihrem Schatten berechnen im Vergleich zur Schattenlänge, welche

ein bestimmter Stab von einer gewissen Größe wirft. Fände man z. B., daß der Schatten eines 40 Fuß hohen Stabes in dem Schatten der Pyramide 10 mal enthalten wäre, so müßte dieselbe 400 Fuß hoch sein.

Soll weiter die Oberfläche einer Pyramide gefunden werden, so muß man den Flächeninhalt der Grundfläche und jeder einzelnen Seitenfläche bestimmen, wobei man die Seiten der Grundfläche am zweckmäßigsten als Grundlinien der Seitendreiecke betrachten kann. Am einfachsten gestaltet sich der Fall, wenn die Pyramide gerade ist. Denn dann sind die einzelnen Seitenflächen einander gleich und man findet die Summe der Flächeninhalte aller Seitenflächen, wenn man den Umfang der Grundfläche mit der Hälfte der Senkrechten multiplicirt, welche man von der Spitze der Pyramide auf die Grundlinie eines der Seitendreiecke fällen kann. Die Oberfläche der abgestumpften Pyramide besteht aus der Grundfläche, aus der oberen Fläche, welche als an Größe verschieden, beide einzeln berechnet werden müssen, und aus den n Paralleltrapezen, welche die Seitenflächen bilden. Der Flächeninhalt eines Paralleltrapezes, als eines Vierecks, läßt sich zwar schon nach dem Früheren finden; man kann aber noch leichter zum Ziele kommen. Denn wäre abcd eines der Seitentrapeze, welches in die beiden Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Höhe h zerfiele, wenn man einmal ab, dann dc als Grundlinie betrachtet, so wäre Trapez abcd



$= ab \cdot \frac{h}{2} + dc \cdot \frac{h}{2} = (ab + dc) \cdot \frac{h}{2}$. Nennt man nun G die untere, g die obere Grundfläche, S, s, S′, s′ 2c. die parallelen Seiten der untern und obern Grundfläche h, h′ 2c. die entsprechenden Höhen, so hat man für O = Oberfläche:

$$O = G + g + (S + s) \cdot \frac{h}{2} + (S' + s') \cdot \frac{h'}{2} + \ldots$$

Ist die Pyramide gerade, so wird $S = s = S' = s'$ 2c. $h = h'$ 2c. und

$$O = G + g + \frac{nh}{2}(S + s).$$

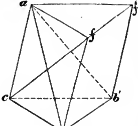
Man braucht auch nicht immer beide Grundflächen auszurechnen; denn versteht man unter A und a die entsprechenden Kanten der unteren und oberen Grundfläche, welche einander ähnlich sind, da der Schnitt parallel zur Grundfläche geführt worden ist und die obere Grundfläche der untern ähnlich ist, so hat man

$G : g = A^2 : a^2$ oder wie $m^2 : n^2$, wenn $m : n$ das Verhältniß von $A : a$ ausdrückt. Kennt man G, so wird $g = \frac{n^2 . G}{m^2}$.

Wenn von einer geraden Pyramide nur die untere Grundfläche G, zwei parallele Seiten S und s der beiden Grundflächen und die dazwischenliegende Seitenkante m gegeben wäre, so ist $h^2 = m^2 - \left(\frac{S-s}{2}\right)^2 = \frac{4m^2 - (S-s)^2}{4}$ und $h = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 - (S-s)^2}$ und weil nach dem Vorigen $g : G = s^2 : S^2$, also $g = G \cdot \frac{s^2}{S^2}$, so wird

$$O = G\left(1 + \frac{s^2}{S^2}\right) + \frac{n}{4}(S + s) . \sqrt{4m^2 - (S-s)^2}.$$

Um den Kubikinhalt einer ganzen Pyramide zunächst zu finden, wäre der einfachste Weg 1) zu zeigen, daß 2 dreiseitige Pyramiden, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, an Kubikinhalt einander gleich sind. Man könnte dieß anschaulich dadurch entwickeln, daß das von den beiden Pyramiden aus einem mit Wasser vollständig angefüllten Gefäße verdrängte Wasser an Inhalt oder Volumen gleich ist. 2) Müßte man sich ein dreiseitiges Prisma machen und so zusammensetzen lassen, daß man dasselbe in 3 an Grundfläche und Höhe gleiche Pyramiden zerfallen ließe, so daß die erste mit der zweiten, die zweite mit der dritten Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe, also nach dem Vorigen unter Nr. 1. gleichen Kubikinhalt hätte. Man könnte auch die drei Pyramiden, in welche sich das dreiseitige Prisma zerlegen ließe, einzeln vorher in ein mit Wasser gefülltes Gefäß werfen und sich aus der verdrängten Wassermenge überzeugen, daß die 3 Pyramiden gleichen Inhalt haben. Man käme dann 3) zu dem Satze: Eine jede Pyramide ist der dritte Theil eines entsprechenden dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe. Aber der Kubikinhalt des dreiseitigen Prisma ist = Grundfläche mal Höhe, also der Kubikinhalt der dreiseitigen Pyramide = Grundfläche mal Höhe getheilt durch $3 = \frac{G . H}{3}$.

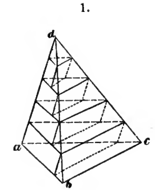


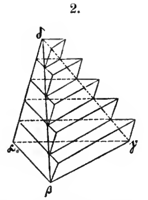
4) Ist die Pyramide aber mehr als dreiseitig, z. B. 4, 5, . . . nseitig, so läßt sich dieselbe durch die durch die Diagonalen der Grundfläche und der Spitze zu legenden Ebenen in 2, 3, . . . (n—2). Pyramiden- von gleicher Höhe zerlegen. Sind dann die Grundflächen g_1, g_2, g_3 . . . ꝛc., welche zusammen die ganze Grundfläche G bilden und ist H die gemeinschaftliche Höhe, so ist der Kubikinhalt der einzelnen dreiseitigen Pyramiden $= g_1 \cdot \frac{H}{3}$, $g_2 \cdot \frac{H}{3}$, $g_3 \cdot \frac{H}{3}$ ꝛc. Also der Kubikinhalt $K = g_1 \cdot \frac{H}{3} + g_2 \cdot \frac{H}{3} + g_3 \cdot \frac{H}{3} + \ldots$ ꝛc. $K = \frac{H}{3} \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$ ꝛc.$) = \frac{H}{3} \cdot G = \frac{G.H}{3}$; weil alle die dreieckigen Theilgrundflächen zusammengenommen die neckige ganze Grundfläche ausmachen.

Man könnte aber auch, wenn man nicht auf obige, anschauliche Weise den Kubikinhalt einer Pyramide finden will, zu einer andern Gedankenfolge greifen. Wie sich dadurch, daß eine Gerade, mit ihrer früheren Lage parallel, in der Größe gleichbleibend, auf einer zur Grundlinie senkrechten Linie sich wiederholt bis zu derselben Höhe oder zu derselben unter einem bestimmten Winkel geneigten Linie aufwärts bewegt, kongruente Parallelogramme bilden; wie Dreiecke durch Drehung einer veränderlichen Geraden oder durch eine parallele Fortbewegung einer veränderlichen Geraden, bis dieselbe zu Null wird, also nach ganz demselben Bildungsgesetze entstanden kongruent sind; wie aber nach früherer Andeutung ähnliche Figuren entstehen, wenn bei einem ähnlichen Gesetze der Entstehung $\frac{1}{n}$ der Geraden sich bewegt; wie ferner Parallelogramme, recht- und schiefwinklige Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und Höhe haben, flächengleich sind; so könnte man von der dreiseitigen Pyramide ausgehend in dem nach den Ecken oder Seiten centrischen Punkte oder in irgend einem andern eine Senkrechte errichten und die Grundfläche der dreiseitigen Pyramide, das Dreieck sich an dieser Senkrechten emporbewegen lassen bis zu einer gewissen Höhe und dabei Seiten und Fläche des Dreieckes nach einem bestimmten Gesetze abnehmen lassen, bis dasselbe zu

Null wird oder zu einem Punkte zusammenschrumpft. Solche Pyramiden sind kongruent. Man könnte sich aber auch zwei Pyramiden dadurch entstanden denken, daß eine zur ursprünglichen Grundfläche ähnliche Grundfläche, deren Seiten von den ursprünglichen z. B. $^2/_3$ betragen, sich nach einem ähnlichen Gesetze bis zu $^2/_3$ der Höhe emporbewegt, so daß dabei alle Flächen- und Linienwinkel und Anordnung der entsprechenden Bestandtheile dieselbe bliebe; dann hätte man ähnliche Pyramiden. Denkt man sich endlich zur Grundfläche eine Ebene parallel gelegt und in derselben irgend einen Punkt, nach welchem hin sich die drei- oder mehrseitige Grundfläche bewegt, um in diesem Punkte nach einem durchlaufenen Gesetze der Stetigkeit zu Null zu werden, so entständen allemal Pyramiden, welche gleichen Kubikinhalt hätten. Man fände dadurch den Satz 1) Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind an Kubikinhalt gleich. Man lernte daraus überhaupt, daß der Kubikinhalt der Pyramiden von Grundfläche und Höhe abhängt oder von drei Dimensionen, weil die Grundfläche 2 darstellt. Zugleich, daß die Pyramide nicht = Grundfläche mal Höhe sein kann, weil das der Inhalt des Prisma von derselben Grundfläche und Höhe wäre, welches offenbar größer ist, weil die Grundfläche des Prisma sich von unten nach oben bewegend stets dieselbe Größe beibehält, nicht zum Punkte zusammenschrumpft, also einen größern Raum durchläuft. Daran würde sich reihen 2) daß Pyramiden von gleicher Höhe und verschiedenen Grundflächen sich wie ihre Grundflächen verhalten, und 3) daß Pramiden von gleicher Grundfläche, aber verschiedenen Höhen, sich wie ihre Höhen verhalten, 4) daß Pyramiden von verschiedenen Grundflächen und Höhen sich verhalten, wie die Produkte aus den Maßzahlen ihrer Grundflächen und Höhen. Es läßt sich dann endlich 5) zeigen, daß jedes drei- oder mehrseitige Prisma sich in 3 Pyramiden zerlegen läßt, welche gleiche Grundfläche und Höhe haben, also auch gleichen Körperinhalt. Daher dann 6) Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von derselben Grundfläche und Höhe $= \frac{G.H}{3}$ Kubikeinheiten.

1. 2.





In ähnlicher Weise wie die in und um den Kreis beschriebenen, regelmäßigen Vielecke bezüglich ihres Umfangs der Kreisperipherie und bezüglich ihrer Fläche der Kreisfläche als der letzten Grenze zustreben, so kann man sich die Pyramide abcd oder $\alpha\beta\gamma\delta$ als den Grenzwerth vorstellen, welcher zwei Prismensummen zustreben; welche wie in Fig. $\alpha\beta\gamma\delta$ zum Theil innerhalb und außerhalb oder wie in Fig. abc nur innerhalb liegen. In dem vorliegenden Beispiele, wo die beiden Pyramiden gleiche Grundfläche und Höhe haben sollen, ist die Höhe und sind damit auch die Seiten in 5. gleiche Theile getheilt. Nennt man die gleichen Höhen der Prismen $\frac{h}{n}$, weil die Höhe der Pyramide h in n gleiche Theile getheilt sein soll und die Grundflächen der Prismen in Fig. 1. g, g_1, g_2 ꝛc., in Fig. 2. γ, γ_1, γ_2 ꝛc., so ist die erste Pyramide

$$P_1 < g \cdot \frac{h}{n} + g_1 \cdot \frac{h}{n} + g_2 \cdot \frac{h}{n} + \ldots g_{n-1} \cdot \frac{h}{n}$$

$$> \frac{h}{n} \cdot (g + g_1 + g_2 + \ldots g_{n-1}).$$ Andererseits, wie sich aus Fig. 2. ergiebt, ist

$$P_2 < \frac{h}{n} (g + g_1 + g_2 + \ldots g_n).$$

In Fig. 1. ist das erste Prisma = dem zweiten in Fig. 2.; von der Grundfläche an gerechnet das zweite dem dritten; das dritte dem vierten; das vierte dem fünften; Also ist die Prismensumme rechts um das unterste Prisma größer. Je kleiner man die Höhen nimmt oder in je mehr gleiche Theile man die Höhe getheilt denkt, desto geringer wird der Unterschied; desto mehr nähert sich jede Prismensumme der Pyramide und desto mehr

nähern sich beide Prismensummen einander selbst. Daraus folgt, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich sind an Kubikinhalt. Es läßt sich aber ein dreiseitiges Prisma in drei Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe zerlegen; also muß eine jede Pyramide $\frac{1}{3}$ eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe $= \frac{1}{3}.g.h$ sein. Die mehrseitige Pyramide läßt sich aber in mehrere dreiseitige von derselben Höhe zerlegen, wenn auch die Grundfläche verschieden sein kann. Ist die ganze Grundfläche $G = g + g_1 + g_2 +$ ꝛc. und die Höhe H, so ist $\frac{G.H}{3} = g.\frac{H}{3} + g_1.\frac{H}{3} +$ ꝛc.

Anm. Hätte man die Bekanntschaft einiger arithmetischen Sätze voraussetzen können, so konnte man (Schlömilch, Grundzüge ꝛc. II, S. 63 u. 64) auch direkt beweisen, daß Pyr. $= \frac{1}{3}.G.H$ ist. Denn

$P_2 < (g + g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1}).\frac{h}{n}$ und

$P_1 > (g_1 + g_2 + \ldots + g_{n-1}).\frac{h}{n}$. Weil sich aber die Flächen g, g, ꝛc. wie die Quadrate der Abstände von der Spitze verhalten, (denn, wenn ac eine Kante der Pyr., cf und ce die Höhen sind, af und de ähnlich liegende Linien in den beiden parallelen und ähnlichen Grundflächen, so ist, wenn dieselben G und g heißen, $G : g = af^2 : de^2 = ac^2 : dc^2 = cf^2 : ce^2$ ꝛc.,) so ist, wenn k irgend einen Schnitt bedeutet $g_k : g = (h - k.\frac{h}{n})^2 : h^2$ und $g_k = \left(\frac{n-k}{n}\right)^2.g$. Setzt man für k die Zahlen 1, 2, 3, ... (n—1), so erhält man

$$3.1^2 = 1 + 1^2 + 1^3$$
$$3\,(1^2 + 2^2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$$
$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2) = 1 + 2 + 3 + 3^2 + 3^3$$
$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 1 + 2 + 3 + 4 + 4^2 + 4^3 \text{ ꝛc.}$$

Oder: Die dreifache Summe der Quadratzahlen von 1 an ist gleich der Summe von ebenso viel natürlichen Zahlen, vermehrt um das Quadrat und den Kubus der letzten. Durch Induktion lernt man die Wahrheit als allgemein kennen; man kann nachweisen, daß bei

vorausgesetzter Gültigkeit des Satzes von 1 bis n, derselbe auch noch wahr bleibt für die Zahlen von 1 bis n + 1.

$$\begin{array}{r} (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ 3 \\ \hline 3n^2 + 2n + 3n + n + 1 + 1 + 1. \end{array}$$

Denn ist $3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + n^2 + n^3$ und addirt man $3 (n + 1)^2 = (n + 1) + 2n + 3n^2 + 1 + 3n + 1$ so ist $3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2] = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) + (n + 1)^2 + (n + 1)^3$, weil $(n + 1) + 2n + 3n^2 + 1 + 3n + 1 + n^2 + n^3$ sich zu $(n + 1) + (n + 1)^2 + (n + 1)^3$ anordnen lassen.

Es ist aber

$$\begin{aligned} 3 (1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n + n^2 + n^3 \\ &= (1 + n) . \tfrac{n}{2} + n^2 + n^3 \\ &= \tfrac{n}{2} + \tfrac{n^2}{2} + n^2 + n^3 \\ &= \tfrac{n}{2} + \tfrac{3n^2}{2} + n^3 \end{aligned}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

$$\frac{n (n + 1) . (2n + 1)}{1 . 2 . 3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{1 . 2 . 3}$$

denn $(n + 1) . (2n + 1) . n = 2n^3 + 3n^2 + n$.

Also: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n . (n + 1) . (2n + 1)}{1 . 2 . 3}$.

Man denkt sich die Höhe der Pyramide in n gleiche Theile getheilt und durch die einzelnen Theilpunkte Ebenen gelegt, welche der Grundfläche parallel laufen. Über und unter dieser Schnittfläche, wie auch über der Grundfläche der Pyramide kann man sich Prismen errichtet vorstellen und es fällt sogleich in die Augen, daß die Summe der Prismen über den einzelnen Flächen mehr beträgt, als die Pyramide, dagegen die Summe der einzelnen Prismen unter den Schnittflächen weniger beträgt, als die Pyramide. Vermöge des Satzes, daß die parallelen Schnittflächen einer Pyramide sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze, bilden nun die einzelnen Schnittflächen nebst der Grundfläche von oben an gezählt folgende Reihe: $\frac{1}{n^2} . g + \frac{4}{n^2} . g + \frac{9}{n^2} . g + \frac{16}{n_2} . g + \ldots \frac{(n-1)^2}{n^2} . \frac{n^2}{n^2} . g$. Die

Summe der Prismen über jeder Fläche und von derselben Höhe $\frac{1}{n}.h$ beträgt:

$$\frac{1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + (n-1)^2 + n^2}{n^2}.g.\frac{1}{n}.h = \frac{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}{n^3}.g.h$$

oder Prisma anstatt $g.h = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$. Prisma mit der Grundfläche g und Höhe h.

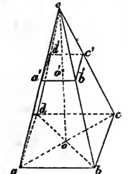
Also Pyr. $< \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$ mal Prisma.

Aber die Summe der Prismen unter jeder Schnittfläche, die Grundfläche ausgenommen und von derselben Höhe $\frac{1}{n}$ h ist $= \frac{(1 + 4 + 16 + \ldots + (n-1)^2}{n^2}.g.\frac{1}{n}.h$ oder $\frac{\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - 1\frac{1}{6}n}{n^3}.g.h$; also Pyramide $> \frac{\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - 1\frac{1}{6}n}{n^3}.g.h. > \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1\frac{1}{6}}{n^2}\right).g.h.$

Aber wenn n wächst, so ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 1/3$ und auch $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1\frac{1}{6}}{n^2} = 1/3$, so daß wenigstens kein merklicher Unterschied angegeben werden kann. Daher Pyramide = ⅓ Prisma von derselben Grundfläche und Höhe.

$$P_2 < \frac{n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2}{n^2}.g.h \text{ und}$$
$$P_1 > \frac{(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \ldots + 1^2}{n^2}.g.h.$$

Der Unterschied der Ausdrücke $\frac{1}{n}.g.h$ oder $= 0$, wenn n unendlich groß wird. Also nähert sich die Pyramide in stetiger Weise dem Grenzwerthe $\frac{n^2 + (n-1)^2 \ldots + 2^2 + 1^2}{n^2}.g.h$ oder $\frac{1}{3}.g.h$, weil $\frac{n^2 + (n-1)^2 \ldots + 2^2\ 1^2}{n^2} = \frac{1}{3}$ ist.



Soll man den **Kubikinhalt einer abgestumpften Pyramide** bestimmen; ist abcd = G und die parallele und ähnliche Fläche a′ b′ c′ d′ = g; ist oo′ = h und os = oo′ + o′s = h + x = H, so hat man

$$x^2 : (h + x)^2 = g : G$$
$$x : h + x = \sqrt{g} : \sqrt{G}$$
$$x\sqrt{G} = h\sqrt{g} + x\sqrt{g}$$
$$x\sqrt{G} - x\sqrt{g} = h\sqrt{g}$$
$$x = \frac{h.\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Nun ist der ganze Körper $= \frac{1}{3}(h + x) . G = \frac{1}{3} . G . h + \frac{1}{3} G . x$
der obere abgeschnittene $= \frac{1}{3} g . x$
daher die abgestumpfte P. $= \frac{1}{3} . G . h + \frac{1}{3} . (G - g) . x$ oder

$$= \frac{1}{3} . G . h + \frac{1}{3} . (G - g) . \frac{h . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$= \frac{1}{3} h \left(G + \frac{G - g}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} . \sqrt{g}\right)$$

Aber der Ausdruck
$\frac{(G - g) . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \frac{(G - g) . \sqrt{g} . (\sqrt{G} + \sqrt{g})}{G - g} = \sqrt{G_g} + \sqrt{g^2} = g + \sqrt{G_g}$.

Daher abgest. Pyr. $= \frac{1}{3} h (G + \sqrt{G_g} + g.)$

Also: Multiplicire den dritten Theil der Höhe der abgestumpften Pyramide mit der Summe aus der oberen und unteren Grundfläche und aus der mittleren Proportionale zwischen beiden.

Der weniger geübte Schüler, welcher nicht selbst zur Entwickelung des gefundenen Ausdrucks vorgebildet ist, möge zunächst sich die Höhe $x = \frac{h . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$ suchen; dann aus G und $(h + x) = H$ die ganze Pyramide berechnen; ebenso aus g und $x = \frac{h . \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$ die Ergänzungspyramide und die eine von der andern abziehen. In ähnlicher Weise hätte man zu verfahren, wenn man entweder die ganze Pyramide oder eine abgestumpfte in einem gewissen Verhältnisse in 2 oder mehrere Theile zu theilen hätte.

Anstatt beider Grundflächen kann man auch nur eine und das Verhältniß der entsprechenden Kanten voraussetzen z. B. $A : a = m : n$; aber auch $G : x = A^2 : a^2 = m^2 : n^2$, daher $x = G . \frac{n^2}{m^2}$ ꝛc.

Ist $P \backsim P_1$, so ist 1) $U : u = A : a$, 2) $O : o = A^2 : a^2$ und 3) $K : k = A^3 : a^3$, welche drei Gesetze bezüglich der Umfänge, Oberflächen und Kubikinhalte aller bisher betrachteten Körper sich als gültig gezeigt haben. Denn bleiben die Flächen- und andern Winkel dieselben und in derselben Ordnung, werden aber alle entsprechenden Dimensionen 2, 3, ... n mal so groß, oder so klein, so werden die Umfänge in demselben; die Oberflächen 4, q, . . . n^2 mal; die Kubikinhalte 8,27, ... n^3 mal so groß oder so klein.

Aufgaben.

I. Die Oberfläche der ganzen Pyramide.

1) Eine regelmäßige vierseitige Pyramide hat eine Grundflächenseite von 3'; die Höhe eines Seitendreiecks ist 9'; gesucht die ganze Oberfläche.

2) Die Seite der Grundfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Pyramide ist 9"; die Höhe eines Seitendreiecks beträgt 30"; gesucht die Oberfläche.

3) Wie groß ist die Gesammtoberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Seite des Grundflächenquadrats 5' 4" d und die Höhe eines Seitendreiecks = 10' 6" 4‴, 8 beträgt? oder wenn die Seite des Grundflächenquadrats 3' 4", die Höhe des Seitendreiecks 7' 5" beträgt?

4) Die Seitenfläche oder der Mantel einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide soll angestrichen werden; der Quadratfuß kostet 1 sgr. 3 pf.; die Seite der Grundfläche beträgt 6'; die Höhe eines Seitendreiecks 25'; was kostet der Anstrich?

5) Die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 500 □'; die Seite der Grundfläche = 8'; wie groß ist die Höhe eines Seitendreiecks?

6) Welche Oberfläche hat eine Pyramide, welche nur von regelmäßigen, kongruenten Dreiecken eingeschlossen ist, deren Seite = 5" ist?

7) Die Diagonale einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 2'; die Höhe eines Seitendreiecks ist 5 mal so groß als die Diagonale; gesucht die Oberfläche.

8) An einer regelmäßigen, dreiseitigen Pyramide ist die Kante 4' lang; gesucht die Oberfläche.

9) Die Seite der Grundfläche einer vierseitigen, regelmäßigen Pyramide ist 5'; eine Seitenkante 10'; gesucht die Oberfläche.

10) Der Halbmesser des um die Grundfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beschriebenen Kreises beträgt 3'; die Seitenkante 9'; gesucht die Oberfläche.

11) Gesucht die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn die Höhe 10' und eine Seite der Grundfläche = 5' ist.

12) Gesucht die Oberfläche einer regelmäßigen sechsseitigen P.; Höhe = 10′; Seite der Grundfläche = 4′.

13) Aus der Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen P. von 100 □′, bei einer Länge der Grundflächenseite von 2′, wird die Höhe eines Seitendreiecks und der P. gesucht.

14) Oberfläche 40 □′; Seite der regelm. vierseitigen P. = $1\frac{1}{2}$′; gesucht die Seite der Grundfläche.

15) Oberfläche 300 □′; die Seite der Grundfläche ist $\frac{1}{4}$ von der Länge der Höhe; wie groß sind dieselben? die P. ist regelmäßig und vierseitig.

16) P. regelmäßig und vierseitig. Die Oberfläche 150 □′; Seitenkante und Basisseite stehen in dem Verhältnisse von 5 : 24; wie groß sind beide?

17) Die Oberfläche irgend einer Pyramide beträgt 9 □′; wie vielmal so groß oder klein wird die Oberfläche einer andern ähnlichen, in welcher die entsprechenden Dimensionen 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4 . . . n mal so groß oder so klein werden?

18) Nach einem Kirchthurmdache in regelmäßiger sechsseitiger Pyramidengestalt will man ein ähnliches verjüngtes bilden, dessen Oberfläche $\frac{1}{1000000}$ von der wirklichen bildet; der wievielte Theil der entsprechenden Dimensionen muß genommen werden?

19) In zwei ähnlichen Pyramiden verhalten sich die entsprechenden Kanten wie 5 : 7; die Oberfläche der ersten ist 55□′, wie groß die der zweiten?

II. Kubikinhalt der ganzen Pyramide.

1) Grundfläche 10□′ 66□″; Höhe 9′ 3″; gesucht der Kubikinhalt K.

2) Die Seite einer regelmäßigen 3; 4; 5; sechsseitigen Pyramide beträgt 2′ 3″; 3′ 4″; 4′; 5′ und die einzelnen Höhen sind 8′; 7′; 6′; 11′; gesucht der K.

3) P. ist regelmäßig und vierseitig; Grundflächenseite 5′; Seitenkante 10′; gesucht K.

4) P. ist regelm. und dreiseitig; Umfang der Grundfläche 18′; die Seitenkante beträgt 10′; gesucht K.

5) An einer dreiseitigen Pyramide ist jede Kante 3′; gesucht K.

6) K = 41 k′ 231 k″ dd; die Grundfläche ist ein Parallelo-

gramm, dessen Grundlinie 3′ 7″ und dessen Höhe 2′ 5″ dd ist; gesucht die Höhe der Pyramide?

7) K = 100 k′; Grundfläche = 5 □′; wie groß ist die Höhe einer Säule, welche mit der P. gleichen Inhalt und gleiche Grundfläche hat?

8) Die Oberfläche einer vierseitigen regelmäßigen P. ist 1000 □′; die Höhe 15′; gesucht K.

9) Kubikinhalt = 576 k′; Grundfläche = 36 □′; gesucht die Höhe der P.

10) K = 538 k″; Höhe = 10″; P. ist vierseitig und regelmäßig; gesucht die Seite der Grundfläche.

11) K = 333 k′; Höhe = 3′ 5″; gesucht die Grundflächenseite der regelm. dreiseitigen P.

12) Die P. ist regelm. sechsseitig; K = 100 k′; die Kante ist 3 mal so groß, als die Seite der Grundfläche; gesucht Grundflächenseite und Kante.

13) Eine P. ist 10′ hoch; dieselbe soll durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt in 2 gleiche Theile getheilt werden, in welcher Höhe muß der Schnitt geführt werden?

14) Zwei ähnliche Pyramiden sind so beschaffen, daß die betreffenden Dimensionen der zweiten 2, 3, 4, 5 . . . n mal so groß oder so klein werden; wie werden die Kubikinhalte?

15) Eine P. hat 100 k″ Inhalt, welchen Kubikinhalt hat eine andere ähnliche P., deren entsprechende Dimension 4 mal so groß ist?

16) Ein Tetraeder aus Marmor wiegt 500 Pfd. (1 Pfd. = ½ Kilogr.); 54 Pfd. bei $14\frac{2}{5}^0$ R = k′ Wasser; wie groß ist der Kubikinhalt und die Kante? das spec. Gewicht des Marmors = 2,837.

Antw. Das Volumen ist

$$\frac{500}{54 \cdot 2{,}837} = x\ k'.$$

Daher $\frac{1}{12}{}^3 . \sqrt{2}$; wenn x die Kante desselben ist.

17) Eine P., welche die Höhe von 4′ 8″ hat, soll durch zwei mit der Grundfläche parallele Ebenen in 3 gleiche Theile zerlegt werden; wie groß ist die Höhe eines jeden Theiles?

$$P : \tfrac{1}{3} P = h^3 : x^3$$
$$1 : \tfrac{1}{3} \quad = h^3 : x^3$$
$$x = h . \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Der zweite Schnitt von oben muß in einer Höhe $y = h . \sqrt{2/3}$ geführt werden.

Die Höhen sind $= 3'\ 3''\ 2''', 81$
$= 0'\ 8''\ 6''', 51$
$= 0'\ 6''\ 0''', 68.$

18) Die Höhe einer durch eine zur Grundfläche parallelen Ebene abgeschnittenen P. ist der dritte Theil der Höhe der ganzen P.; wie oft ist der Kubikinhalt derselben im ganzen Kubikinhalte enthalten?

19) Die P. des Cheops ist quadratisch; die Grundflächenseite ist 716′ par.; die Höhe beträgt 468′ par.; wie groß ist der Kubikinhalt und das Gewicht derselben, wenn das specif. Gewicht ihrer Masse 2,7 ist?

20) Ein Grabstein von Granit ist eine regelmäßige, vierseitige P. Die Seite der Grundfläche = 4′; die Seitenkante = 10′; das spec. Gew. des Granits = 2,7.

21) Eine P., regelmäßig und quadratisch, wiegt 200 Pfd.; das specif. Gew. = 2,7; gesucht die Höhe.

22) Eine regelm. dreiseitige P. wiegt 300 Pfd.; die Höhe ist 30″; das specif. Gew. 2,8; gesucht wird die Grundflächenseite.

III. Abgekürzte Pyramide.

1) Die Grundfläche einer P. ist 25 □″ groß; eine Seite ist 3″ lang, eine Seite der parallel durch dieselbe gelegten ähnlichen Schnittfläche 2″; wie groß ist der Inhalt derselben?

2) Eine regelmäßige, vierseitige P. ist 10′ hoch; die Grundfläche hat eine Seite von 3′; parallel zur Grundfläche soll eine Schnittfläche gelegt werden, deren Seite 1′ 5″ d ist; in welcher Höhe muß dieser Schnitt geführt werden?

3) Bei einer P. wurde in einer Höhe von 7′ parallel zur Grundfläche eine Ebene gelegt, so daß sich eine entsprechende Seite derselben zu der entsprechenden Seite der Grundfläche wie 4 : 7 verhält; wie groß ist die ganze Höhe der P.?

4) Höhe der P. 15′; Seite der Grundfläche, welche ein regelmäßiges Dr. ist = 5′; in einer Höhe von 7′ wird ein paralleler Schnitt gelegt; wie groß ist der Inhalt der parallelen Fläche?

5) Die P. ist regelmäßig, vierseitig und abgekürzt. Seite des untern Quadrats 6′ 5″ d, des oberen 3′ 7″; die Höhe 5′; gesucht die Oberfläche und der Kubikinhalt.

6) P. ist regelmäßig, sechsseitig; die Seiten der Grundflächen sind 3′ 8′ und 2′ 4″; Höhe einer Seitenfläche 8′ 5″; gesucht die Oberfläche.

7) P. ist regelmäßig, vierseitig; Seite der Grundfläche 8′; der oberen 5′; Höhe einer Seitenfläche 15′; gesucht die Oberfläche.

8) P. regelmäßig, vierseitig; Höhe der abgekürzten P. 5′; Grundflächenseiten 6′ und 4′; gesucht die Oberfläche.

9) Oberfläche der abgekürzten, regelmäßigen, quadratischen P. 150□′; Grundflächenseite 6′ und 4′; gesucht die Höhe.

10) P. regelmäßig, sechsseitig, abgekürzt; Seite der unteren, oberen Fläche und Höhe stehen in dem Verhältnisse von 2 : 1 : 7; wie groß sind dieselben, wenn die Oberfläche 200□′ ist?

11) P. abgekürzt, regelmäßig, quadratisch; Höhe 15; Höhe der Ergänzungsp. 6′; Seite der Grundfläche 4′; gesucht der Kubikinhalt.

12) Die beiden Grundflächen sind 9□′ und 16□′; die Höhe 5′; gesucht der Kubikinhalt; desgleichen 20□′, 30□′; 8′; gesucht K.

13) Ein pyramidenförmiger Baumstamm mit oblongischer Grundfläche ist 25′ lang; die Seiten der Grundflächen sind 3′ und 2′; $1\frac{1}{2}$′ und 1′; gesucht der Kubikinhalt.

14) P. abgekürzt, regelmäßig, vierseitig; die Seiten der Grundflächen sind 8″ und 4″, die Höhe 12″; gesucht der Kubikinhalt.

15) Bei einer Eisenbahn soll ein Damm mit oblongischer Grundfläche aufgeführt werden; Länge und Breite der Grundfläche 300° und 3°; der oberen 275° und 1°; die Höhe soll 12′ werden. Wieviel Quadratruthen Areal müssen zur Aufschüttung angekauft werden, wenn die Erde nur 5′ tief ausgegraben werden kann?

16) Ein Gefäß hat die Gestalt einer abgekürzten, regelmäßigen, quadratischen P.; Höhe 2′; die Diagonalen der Quadrate sind 5′ und 7′; wieviel preußische Quart faßt dasselbe, wenn 1 preuß. Quart = 64 k″ ist?

17) Die beiden Grundflächen sind 35□′ und 47□′; der Kubikinhalt 400 k′; gesucht die Höhe; ebenso, wenn die betreffenden Größen sind 21,546 k′, die Grundflächenseiten 2,7′ und 1,8′; gesucht die Höhe.

18) Eine abgekürzte P., deren Grundflächen Quadrate von

3′ und 2′ Seitenlänge sind und welche eine Höhe von 1′ 5″ hat, soll halbirt werden; in welchem Punkte der Höhe muß der parallele Schnitt geführt werden?

19) Eine abgestumpfte Pyramide ist 2′ 4″ hoch; die Grundflächen sind Quadrate von 2′ 6″ und 1′ 8″ Seitenlänge; man soll dieselbe durch eine zu den Grundflächen parallele Ebene so theilen, daß sich die Theile wie 3 : 5 verhalten.

20) Ein pyramidenförmiger Balken, dessen Grundflächen Quadrate sind von 1′ und 5″ Seitenlänge, ist 10′ lang; gesucht der Kubikinhalt.

21) In welcher Weise wächst die Oberfläche und der Kubikinhalt einer abgestumpften, ähnlichen P., wenn die bezüglichen Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder so klein werden?

22) Ein eisernes Gewicht in der Form einer abgestumpften P. (regelmäßig, sechsseitig) hat 8″ größere, 6″ kleinere Basisseite und 5″ Höhe; sp. Gew. = 7,2; gesucht das Gewicht.

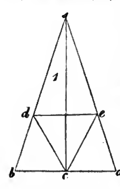
23) P. abgekürzt, regelmäßig, sechsseitig; Seite der untern Grundfläche 1′; der obern 8″; eine schiefe Seitenkante 2′; wie groß ist das Gewicht, wenn das specif. Gew. 7,2 ist?

24) P. abgekürzt, regelmäßig, vierseitig; Gewicht 170 Pfd.; Seite der kleineren Grundfläche = 5″; Höhe der P. 13″; sp. Gew. 7,5; gesucht die Seite der größeren Grundfläche.

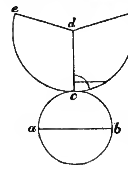
V. Der Kegel.

Wie man von der regelmäßigen senkrechten Säule zum Cylinder kömmt, dadurch daß man die Seitenzahl der Grundfläche in das Unendliche wachsen läßt, so daß der Cylinder dann als die letzte, nie erreichbare Grenze anzusehen ist, nach welcher alle Säulen mit wachsender Anzahl der Seiten der Grundfläche in stetiger Weise hinstreben, also gelangt man von der geraden Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche zum geraden Kegel, wenn man die Seitenzahl der Grundfläche in's Unendliche wachsen läßt. Daher erklärt man auch nicht selten den Cylinder als eine Säule, deren Grundfläche unendlich viele Seiten habe, ebenso den Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Unendlicheck sei — welche Erklärung nicht genau ist, sondern nur andeuten will, wie man mit wachsender Seitenzahl der Grundfläche einer gewissen Grenze sich zubewege. Ein solcher Kegel, wie sich derselbe in der Natur häufig findet, z. B. als Thurmdach, Trichter, als Aufsatz von Blech auf einem Schlote, Baumstamm, Meiler, kegelförmiger Berg 2c. und wie derselbe vom Drechsler bearbeitet vor uns steht, stimmt mit allen bisher besprochenen Körpern in den 3 Ausdehnungen, in seiner Entstehungsweise durch Fortbewegung einer Ebene, in seiner Begrenzung durch Flächen, sowie darin überein, daß derselbe Gestalt und Größe hat. Waren die den Körper einschließenden Flächen ebene und geradlinig begrenzte, so brauchte man wenigstens 4 (Dreiecke) zur vollständigen Begrenzung eines Körpers, wie bei der dreiseitigen Pyramide; der Cylinder war schon durch 3 Flächen vollständig begrenzt, von denen zwei zwar eben, aber krummlinig begrenzt waren, die dritte eine einseitig gekrümmte Fläche war; bei dem Kegel haben wir nur zwei Begrenzungsflächen. Die eine derselben, die Grund-

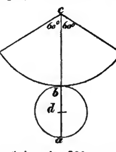
fläche, ist eine ebene, krummlinig begrenzte, eine Kreisfläche; die andere, der Mantel, ist eine einseitig gekrümmte. In derselben kann man nur von der Spitze nach irgend einem Punkte des Umfangs der Grundfläche eine Gerade ziehen, also in der Richtung von oben nach unten. Fällt man von der Spitze eine Senkrechte auf die Grundfläche, so heißt dieselbe die Höhe des Kegels z. B. sc; trifft dieselbe gerade den Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels, so heißt derselbe ein senkrechter oder gerader Kegel, wie wir denselben stets voraussetzen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird. Eine Gerade, welche die Spitze des Kegels mit irgend einem Punkte des Umfangs verbindet, heißt Seite des Kegels z. B. as, bs, welcher immer größer sein muß, als die Höhe, weil die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks immer größer ist, als eine Kathete.



Denkt man sich den Kegel von Pappe, inwendig hohl, schneidet die Pappe einer Geraden von der Spitze zu einem Punkte des Umfangs entlang durch und löst auch die Grundfläche ab, indem man dem Umfange entlang durchschneidet, so daß die Grundfläche nur noch in einem Punkte an dem Mantel hängt, so erhält man das Netz eines Kegels. Der Mantel gestaltet sich dann zu einem Kreisausschnitt, welcher zu dem Kreise gehört, der mit der Seite des Kegels als Halbmesser geschlagen werden kann und dessen Bogen so groß ist, als der Umfang der Grundfläche des Kegels. Nehmen wir nun an, daß der Halbmesser der Grundfläche 3 Zoll oder Längeneinheiten habe, die Höhe 4, so würde die Seite deren 5 haben, weil Halbmesser, Höhe und Seite beim geraden Kegel ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Dann würde sich das Netz folgendermaßen gestalten. Da der Durchmesser der Grundfläche 6 Längeneinheiten hat = ab, da die Seite des Kegels = 5 Längeneinheiten ist, also der Durchmesser des mit dc zu schlagen-



den Kreises = 10 Längeneinheiten, so beträgt der Umfang der Grundfläche 6 mal $3\frac{1}{7}$ Längeneinheiten, der Umfang des andern Kreises 10 mal $3\frac{1}{7}$ Längeneinheiten. Da nun zu $10 . 3\frac{1}{7}$ Längeneinheiten 360° gehören, also zu 1 Längeneinheit $\frac{360}{10 . 3\frac{1}{7}}$, so gehören zu 6 mal $3\frac{1}{7}$ Längeneinheiten $\frac{360 . 6 . 3\frac{1}{7}^{0}}{10 . 3\frac{1}{7}} = 216^{0}$. Man hat also Winkel edc = 108° und Winkel fdc = 108° zu machen. Um aber ein besseres Verhältniß heraus zu bringen, mußte man die Seite des Kegels größer annehmen, damit der Umfang der Grundfläche von dem Umfange des mit der Seite des Kegels zu beschreibenden Kreises weniger Grade beträgt. Sei also der Halbmesser der Grundfläche = 3 Längeneinheiten, die Seite des Kegels = 9 Längeneinheiten, so ist der Umfang der Grundfläche so groß, als 120° des mit der Seite zu beschreibenden Kreises.



Denn der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser ab = 6, und der Umfang des Kreises mit dem Halbmesser cb = 9 und dem Durchmesser 18 Längeneinheiten, ist bezüglich 6 mal $3\frac{1}{7}$ und 18 mal $3\frac{1}{7}$. Zu 18 mal $3\frac{1}{7}$ Längeneinheiten gehören 360°, also zu 6 mal $3\frac{1}{7}$ nur $\frac{1}{3}$ von 360 oder 120°. Man hat also zu beiden Seiten der cb bei c je 60° anzutragen. Hätte man den Halbmesser der Grundfläche 3″, die Seite des Kegels 12″ angenommen, so hätte man von dem Umfange des mit der Seite des Kegels beschriebenen Kreises den vierten Theil oder 90° hinwegnehmen müssen, um eine gleiche Länge, wie den Umfang der Grundfläche zu erhalten.

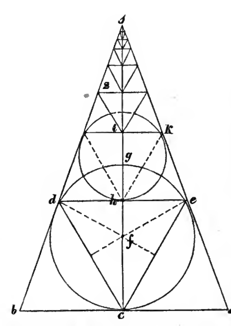
Einen Kegel kann man sich in verschiedener Weise entstehen denken, nicht nur in der schon oben angedeuteten, nach welcher derselbe eine Pyramide mit einem Unendlicheck als Grundfläche war. Man kann sich auch vorstellen, daß sich eine Kreisfläche entweder senkrecht oder schief nach oben bewegt, so daß jede neue Lage derselben zur ursprünglichen parallel bleibt und dabei die sich bewegende Kreisfläche ihre Größe nach irgend einem Gesetze der Abnahme in stetiger Weise, d. h. ohne Sprünge, verändert, bis dieselbe zu Null geworden ist oder zu einer Spitze, zu einem Punkte zusammengeschrumpft. Man sieht dabei leicht

ein, daß eine und dieselbe Grundfläche, welche sich senkrecht oder schief zu ihrer ursprünglichen Lage fortbewegt, unendlich viele an Größe und Gestalt verschiedene Kegel bilden kann. Das Bildungsgesetz für die senkrechten oder geraden Kegel ist weniger mannigfaltig; Gestalt und Größe können nur noch von der Höhe abhängen, welche die Grundfläche durchläuft. Bewegt sich aber die Grundfläche in einer zur Grundfläche schiefen Linie im Raume weiter, so lassen sich ebenso viele verschiedene Fälle denken, als wie vielfach die Linie, durch welche sich die Grundfläche bewegt, mit derselben verschiedene schiefe Winkel bilden kann. Dabei kann dieselbe ebenso rechts als links, nach vorn oder hinten oder nach jeder möglichen Zwischenrichtung geneigt sein. Bewegt sich aber die Grundfläche einmal in einer gewissen Richtung, so hängen Gestalt und Größe wieder von der Höhe ab, bis zu welcher sich die Grundfläche schief emporbewegt. Man kann sich aber die Entstehung des Kegelmantels und des Kegels selbst auch in anderer Weise vorstellen. „Wenn eine in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung gedachte Gerade sich in der Weise bewegt, daß sie die Peripherie eines Kreises durchläuft und gleichzeitig durch einen festen, außerhalb des Kreises liegenden Punkt geht, so beschreibt sie eine sogenannte Kreiskegelfläche; der gegebene Kreis heißt die Leitlinie (Direktrix), der feste Punkt der Mittelpunkt der Fläche (letztere Benennung hat darin ihren Grund, daß die Fläche aus zwei kongruenten einander entgegengesetzt liegenden Theilen besteht, die Nichts weiter als jenen Punkt mit einander gemein haben), die Gerade endlich, welche das Centrum der Leitlinie mit dem Mittelpunkte der Fläche verbindet, wird die Achse der Fläche genannt. Wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, setzt man gewöhnlich voraus, daß die Achse senkrecht zur Ebene der Leitlinie sei; die Fläche heißt dann eine gerade Kreiskegelfläche oder Kegelfläche schlechthin. Dieselbe entsteht auch, wenn ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete und Hypotenuse unendlich verlängert sind, um die verlängerte Kathete gedreht wird, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kömmt; die festgehaltene Kathete ist dann die Achse, der Endpunkt der nicht verlängerten Kathete beschreibt die Direktrix und die Hypotenuse erzeugt die Kegelfläche. Die ebene und die Cylinderfläche können übrigens als die äußersten Fälle der Kegelfläche

betrachtet werden; fällt nämlich der Mittelpunkt der Kegelfläche d. h. die Spitze des Kegels) mit dem Centrum der Leitlinie zusammen (d. h. wird die Höhe oder Achse zu Null), so geht die Kegelfläche in eine Ebene (die der Leitlinie oder in die Grundfläche) über; rückt dagegen der Mittelpunkt der Fläche (die Spitze) unendlich weit von der Fläche, welche die Leitlinie begrenzt, hinweg, so geht die Kegelfläche in die Cylinderfläche über.

Die Ebene der Leitlinie und der von der Leitlinie bis zum Mittelpunkt sich erstreckende Theil der Kegelfläche begrenzen zusammen einen allseitig geschlossenen Raum, welcher ein Kegelvolumen oder kurz ein Kegel heißt; die Fläche der Leitlinie wird die Grundfläche (Basis) desselben genannt, der Mittelpunkt erhält den Namen der Spitze des Kegels, die Entfernung der Spitze von der Basis heißt die Höhe und die Entfernung der Spitze von irgend einem Punkte des Umfangs der Basis die Seite des Kegels. Die krumme Oberfläche des Kegels pflegt man seinen Mantel zu nennen. (Grundzüge einer wissenschaftl. Darstellung der Geometrie des Maßes, von Dr. Schlömilch. II, S. 99, 100.)

Betrachtet man zuerst die Lage eines Punktes zum geraden Kegel und setzt voraus, daß derselbe nicht außerhalb liege, so giebt es unendlich viele verschiedene Lagen, welche derselbe einnehmen kann, z. B. in der Mantelfläche, in der Grundfläche, im eigentlichen Körper 2c. Die wichtigsten Lagen sind 1) in der Spitze, 2) im Umfange der Grundfläche. Die Spitze ist von allen Punkten des Umfangs, jeder Punkt des Umfangs von der Spitze gleichweit entfernt. Denn legt man durch die Achse und irgend einen Punkt des Umfangs eine Ebene, so erhält man lauter gleichschenklige, unter sich kongruente Dreiecke, daher as = bs = cs = ds 2c., 3) in dem Mittelpunkte der Grundfläche Er steht dann vom Umfange gleichweit ab und ist der Fußpunkt der Achse oder Höhe. Läßt man denselben auf der Höhe emporrücken nach der Spitze zu bis f, so daß cf = $\frac{1}{4}$ cs wird, so hat man den Schwerpunkt des Kegels. Durch den Punkt f läßt sich eine Kugel in den Kegel einbeschreiben, welche die Grundfläche im Mittelpunkte und den Kegelmantel in unendlich vielen Punkten berührt, welche alle in einem Kreise liegen, der



um fd = fe = fc vom Punkte f absteht. Läßt man den Punkt noch weiter emporrücken, so kann derselbe der Mittelpunkt von vielen Kugeln werden, welche zwar nicht mehr die Grundfläche berühren, aber mit dem Kegelmantel je einen Kreis gemein haben.

Setzt man eine Gerade in Beziehung zum Kegel, so kann dieselbe Halbmesser oder Durchmesser, Achse oder Seite sein; dieselbe kann die Achse unter rechten Winkeln schneiden und durch den Mittelpunkt der Grundfläche gehen, dann hat dieselbe mit dem Umfange und mit dem Kegelmantel zwei Punkte. Trifft sie die Achse unter rechten Winkeln ohne durch den Mittelpunkt zu gehen, so hat sie mit dem Kegelmantel 2 Punkte gemein; schneidet sie die Achse unter schiefen Winkeln, so hat dieselbe entweder mit der Kegelfläche 2 oder mit dem Mantel einen Punkt gemein und einen andern mit der Grundfläche. Liegt die Gerade zur Grundfläche parallel und geht zugleich durch die Spitze, so hat die Gerade mit der Kegelfläche nur einen Punkt gemein; verbindet dieselbe die Spitze mit einem Punkte des Umfangs, so fällt sie in den Kegelmantel hinein und wird ganz oder theilweise zur Seite des Kegels.

Eine Gerade kann aber auch so liegen, daß dieselbe nur einen Punkt mit dem Kegelmantel gemein hat und zur Tangente (Berührungslinie) wird.

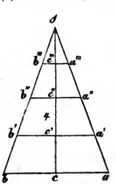
Schneidet eine Ebene der Achse entlang, so theilt dieselbe den Kegel in zwei kongruente Theile. Jeder hat die halbe Grundfläche zu seiner Grundfläche, den halben Mantel als zweite und

das gleichschenklige Dreieck, welches die Durchschnittsebene bildet, zur dritten Begrenzungsfläche. Die Ebene kann ferner mit der Grundfläche zusammenfallen oder doch derselben parallel liegen, dann schneidet sie den Kegelmantel in einem Kreise. Diese Durchschnittskreise werden immer kleiner, je weiter die Schneidebene nach der Spitze zu liegt; geht diese, der Grundfläche parallel, durch die Spitze, so hat dieselbe mit dem Kegel nur einen Punkt gemein. Die schneidende Ebene kann aber nicht nur senkrecht oder so gelegt werden, daß dieselbe der Grundfläche parallel läuft und die Achse auf derselben senkrecht steht und also der Durchschnitt eine Kreislinie wird, sondern so, daß dieselbe die Achse unter schiefen Winkeln schneidet. Dann wird der Durchschnitt zwar auch eine in sich geschlossene, gekrümmte Linie, aber nicht eine Kreislinie, sondern eine länglich runde Linie oder Ellipse; wird der Schnitt parallel zur Achse durch irgend einen Punkt des Kegelmantels gelegt, so heißt derselbe eine Hyperbel; läuft endlich der Schnitt parallel zu einer Seite, so erhält man eine krumme Linie, welche Parabel genannt wird. Wie der Kreis, so haben auch Ellipse, Hyperbel und Parabel ihre bestimmten specifischen Eigenthümlichkeiten und Gesetze.

Man kann leicht noch einige sonstige Eigenschaften des geraden Kegels finden. So müssen die Winkel sac und sbc einander gleich sein, weil jeder Durchschnitt durch die Achse ein kongruentes gleichschenkliges Dreieck ist; ist die Seite dem Durchmesser gleich, so ist jeder Durchschnitt sogar ein gleichseitiges Dreieck und der Winkel asb, sowie der Winkel bas = abs = 60°. Der Winkel asb muß immer kleiner sein als 180°; wird dieser Winkel größer als 180°, so entsteht ein Kegel in umgekehrter Richtung nach oben hin. Alle mit der Grundfläche parallele Durchschnitte sind Kreise, die Halbmesser ca und he und ik 2c. sind einander parallel; es ist dann ik in he oder ca ebenso oft enthalten, als si in sh oder sc, d. h. die Halbmesser oder Durchmesser, also auch die Umfänge dieser Kreise verhalten sich zu einander, wie ihre entsprechenden Abstände von der Spitze des Kegels. Kreise verhalten sich aber bezüglich ihres Flächeninhaltes wie die Quadrate ihrer bezüglichen Halb- oder Durchmesser, also müssen sich solche der Grundfläche parallele Durchschnittskreise bezüglich ihrer Flächen auch ebenso verhalten, wie

die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. Also Kreis mit dem Halbm. he verhält sich zum Kreise mit dem Halbm. ik, wie $sh^2 : si^2$. Ebenso muß sich jeder ebene Durchschnitt eines geraden Kegels, parallel der Grundfläche, zur Grundfläche ebenso verhalten, wie das Quadrat seines Abstandes von der Spitze des Kegels zum Quadrate der ganzen Achse. Daraus ergiebt sich weiter, daß bei zwei geraden Kegeln von gleicher Grundfläche und Höhe alle in gleicher Höhe geführten Durchschnittskreise einander gleich sind. Sind bei zwei geraden Kegeln zwar die Höhen gleich, die Grundflächen aber ungleich, so stehen die Grundflächen in demselben Verhältnisse, wie die parallelen Durchschnittsebenen in gleicher Höhe genommen.

Um einen abgestumpften senkrechten Kegel zu erzeugen, darf man die sich senkrecht nach oben bewegende Grundfläche sich nicht bis zur Spitze bewegen lassen, sondern muß die Bewegung vorher schon unterbrechen.



Oder man läßt ein Paralleltrapez acc″ a″ sich um die ac bewegen, bis dieselbe wieder in ihre frühere, ursprüngliche Lage zurückkehrt. Es entsteht auf solche Weise ein Körper, welcher von zwei parallelen Kreisflächen, von einer unteren und einer oberen und von einer einseitig gekrümmten Seitenfläche (Mantel) eingeschlossen ist. Die Senkrechte cc″ zwischen den beiden parallelen Kreisflächen ist nur ein Theil der Achse cs; die Halbmesser ca und c″a″ stehen in demselben Verhältnisse, wie die Achse cs zur Achse c″s, d. h. wie 2 : 1 in dem vorliegenden Beispiele oder $c'' a'' = \frac{1}{2}$ ca. Die Linie c′a′ geht durch die Mitte der cc″ und aa″, welche nicht parallel sind; dieselbe ist = der Hälfte der Summe aus beiden Halbmessern c″ a″ und ac = $\frac{ca + c'' a''}{2}$; weßhalb auch der Kreis, welcher mit c′ a″ beschrieben wird, die Hälfte der beiden Kreisumfänge ist, welche mit c″ a″ und ca beschrieben worden sind. Der Werth von c′ a′ ergiebt sich wie folgt

$c' a' = \frac{3}{4}$ ca (denn $c' a' : ca = 3 : 4 = sc' : sc$)
$c' a' = \frac{3}{2} c'' a''$ (denn $c' a' : c'' a'' = 3 : 2 = sc' : sc''$),

also $2c'a' = \frac{3}{4}\, ca + \frac{3}{2}\, c''a'' = \frac{3ca + 6c''a''}{4}$ und $c'a' = \frac{3ca + 6c''a''}{8}$.

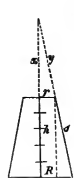
Aber $6c''a'' = 2c''a'' + 4c''a''$ und $2c''a'' = ca$, daher

$$c'a' = \frac{3ca + ca + 4c''a''}{8} = \frac{4ca + 4c''a''}{8}$$

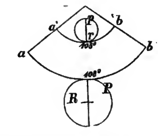
$c'a' = \frac{ca + c''a''}{2}$. Daraus folgt $2.c'a'.\pi = 2.\left(\frac{ca + c''a''}{2}\right).\pi = \frac{1}{2}\,(2ca.\pi + 2.c''a''.\pi)$, wie oben behauptet worden ist.

Sowohl der gerade ganze, als auch der gerade abgestumpfte Kegel entstehen durch Drehung eines Dreieckes oder Paralleltrapezes um eine Kathete oder parallele Seite; es entsteht nach Größe und Gestalt ganz derselbe Körper, ob man die Drehung in der wagerechten Ebene oder sonst im Raume vornimmt. Daher ist deutlich, daß Größe und Gestalt des geraden ganzen und abgestumpften Kegels ganz und gar von dem erzeugenden Dreieck oder Paralleltrapez abhängt. Ist das Dreieck oder Paralleltrapez durch hinreichend viele Bestandtheile gegeben, so kennt man auch den dadurch zu erzeugenden geraden ganzen oder abgestumpften Kegel. Also kann man einen geraden Kegel erzeugen oder man kennt einen geraden Kegel nach Gestalt und Größe, wenn man von demselben kennt 1) die Grundfläche und Höhe. Anstatt der Grundfläche braucht man aber auch nur deren bestimmendes Stück, den Halbmesser oder Durchmesser zu kennen. 2) Halbmesser oder Durchmesser oder Grundfläche und Seite. 3) Die Seite und den einen der beiden spitzen Winkel im erzeugenden Dreieck. Ebenso ist der abgestumpfte gerade Kegel durch seine Höhe oder Seitenhöhe und die Halbmesser oder Durchmesser seiner beiden Grundflächen bestimmt; denn dadurch liegt die Größe und Gestalt z. B. des Paralleltrapezes $abb'a'$ oder $acc'a'$ fest, durch welche der abgestumpfte gerade Kegel erzeugt werden kann.

Kennt man bei einem abgestumpften Kegel die bestimmenden Stücke, so kann man die noch fehlende Höhe und Seite für den ganzen Kegel berechnen. Denn ist R der Halbmesser der Grundfläche, r der oberen, h die Höhe der abgestumpften und s die



Seite des abgestumpften geraden Kegels, so hat man $R:r = h + x:x$; also $Rx = rh + rx$ und $Rx - rx = rh$; $(R-r).x = rh$, also $x = \frac{rh}{R-r}$. Nennt man das fehlende Stück der Seite y, so ist $R:r = s + y:y$, also $Ry - ry = rs$, also $y = \frac{rs}{R-r}$. Ist z. B. $R = 2''$, $r = 1''$, $h = 5''$, so muß $s = \sqrt{25''\square + 1\square''} = \sqrt{26\square''}$ sein $= 5,1$ in runder Zahl. Dann ist $x = \frac{1.5}{2-1} = 5''$ und $y = \frac{1.5,1''}{2-1} = 5,1''$. Um nun das Netz des eben besprochenen abgestumpften Kegels zu zeichnen, muß man 1) die untere Kreisfläche, 2) die obere Kreisfläche, 3) die beiden dazu gehörigen Bogen zeichnen. Setzt man $R = 3''$, $h = 4''$, $r = 1\frac{1}{2}''$, $s = 5''$ und die vollständige Seite des ganzen Kegels also $= 10''$, so ergiebt sich folgendes Netz:

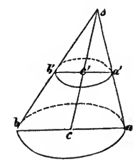


Der Umfang des größeren Kreises $= 6\pi$, der Umfang des Kreises mit der Seite 10, als Radius $= 20\pi$, daher

$$\frac{x^0 \quad 6\pi}{20\pi \quad 360^0}$$
$$x = 108^0.$$

Daher muß der Bogen ab und der koncentrische Bogen a' b' 180° groß gemacht werden.

Wie durch Umdrehung des rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten der gerade Kegel entstand, also entsteht der schiefe Kegel, wenn das schiefwinklige Dreieck sca sich um die schiefe Linie cs so herumdreht, daß as den Kegelmantel und ca die Grundfläche beschreibt. Die Achse bildet mit dem Durchmesser



ab zwei schiefe Winkel, sie steht überhaupt auf der Grundfläche schief; dreht man die ab in der Ebene, so kann dieselbe in eine Lage kommen, so daß sc mit ihr zwei einzelne Rechte bildet — aber nur eine solche Lage kann es geben; denn gäbe es zwei Linien in der Grundfläche, auf denen die sc senkrecht stände, so müßte sie auf der Grundfläche überhaupt senkrecht stehen. Man erhält dann zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, welche in der Achse zusammengestellt, ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Nur ein solches kann es beim schiefen Kegel geben. Wenn nun zwei Seiten bei einem solchen Kegel nur gleich sind, so müssen alle übrigen unter sich ungleich sein und nehmen bis zu einer kleinsten ab und bis zu einer größten zu, so daß in dem Dreieck abs die Linie sb > sc und sc < as ist. Sei einmal as die kleinste, so muß auch acs der kleinste oder sogenannte Abweichungswinkel der Linie sc von der Grundfläche sein. Die beiden Linien ac und sc, welche die verschiedenen immer größer werdenden Winkel einschließen, bleiben dieselben — es muß also die dritte Linie oder die Seite fortwährend wachsen. Ist nun sca der kleinste Winkel, welchen die sc mit einem der Halbmesser bildet, so muß zugleich scb der größte sein, also auch sb die größte Seite. Zerlegt man den Umfang der Grundfläche z. B. in 360 gleiche Theile und verbindet dieselben mit der Spitze des Kegels, so erhält man 360 Dreiecke von verschiedener Höhe, deren Flächen zusammengenommen die Fläche des Kegelmantels ausmachen. Wie bei der schiefen Pyramide fällt die Höhe des schiefen Kegels, d. h. die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche oder ihre Verlängerung entweder auf die Grundfläche, wenn auch nicht in den Mittelpunkt, oder in eine Seite oder auf die zu verlängernde Grundfläche außerhalb des Kegels. Wie die ca bei der Drehung die Grundfläche, so beschreibt die parallele Linie c'a' einen der Grundfläche parallelen Kreis; wachsen oder fallen kann die c'a' an Größe nicht, denn sie steht zu ca immer in dem sich gleichbleibenden Verhältnisse der sc' zu sc, so daß wenn sc' von sc die Hälfte, auch c'a' von ca die Hälfte sein

und bleiben müßte. Zwei Durchschnittskreise, welche zu einander parallel sind, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze; und bei zwei Kegeln mit gleicher Grundfläche und Höhe müssen die in gleicher Höhe gemachten Durchschnittskreise einander gleich sein. Wenn ein senkrechter Kegel gebaut werden sollte, so war die Aufgabe leichter, denn Höhe und Achse fielen zusammen und standen auf der Grundfläche im Mittelpunkte senkrecht; beim schiefen Kegel ist dieß nicht der Fall, weßhalb sich die Sache anders gestaltet. Der günstigste Fall ist, wenn sca der kleinste Winkel ist, welchen sc mit dem sich drehenden Halbmesser ca bildet oder wenn die Ebene abs die Grundfläche senkrecht schneidet. Man braucht, um einen schiefen Kegel zu bauen, so daß er nach Gestalt und Größe festliegt 1) außer dem Halbmesser ca der Grundfläche und außer der Achse sc, auch noch den Abweichungswinkel sca, weil man sonst die Lage der sc nicht kennt. Anstatt des Halbmessers könnte die Grundfläche auch gegeben sein oder der Durchmesser derselben. Man könnte aber auch 2) die Grundfläche oder ihre Bestimmungsstücke und die Achse und Höhe kennen, so daß der Kegel bestimmt wäre. Denn aus Achse und Höhe könnte man das entsprechende rechtwinklige Dreieck bauen und in demselben den Abweichungswinkel sca finden.

Man könnte sich endlich auch noch vorstellen, daß die Linie ca bei ihrer Drehung nach irgend einem Gesetze ab und zunähme, bevor sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrte, dabei aber nicht eine ebene geradlinige, sondern krummlinige Figur beschriebe, so entstände ein dem Kegel analoger Körper, in welchem jeder der Grundfläche parallele Durchschnitt eine der Grundfläche ähnliche krummlinige, verjüngte Figur würde, welche sich zur Grundfläche ebenso verhielte, wie das Quadrat ihrer Höhe zum Quadrate der ganzen Höhe.

Der Schwerpunkt eines Kegels von kreisförmiger Grundfläche liegt in der Geraden, welche von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Grundfläche gezogen werden kann und zwar ist seine Entfernung von dem Mittelpunkte der Grundfläche $1/4$ dieser ganzen Linie.

Linien-, Flächen- und Körperberechnung am Kegel.

Durchmesser oder Halbmesser und Seite des geraden Kegels

lassen sich leicht messen; die Höhe desselben findet man theils durch Rechnung, weil, wenn R den Halbmesser und s die Seite bezeichnet, $h = \sqrt{s^2 - R^2}$ ist. Man könnte aber auch den Kegel zwischen die beiden parallelen Platten eines Schraubstocks bringen und die senkrechte Entfernung derselben messen und also die Höhe in natura finden. Aus dem Halbmesser R und dem Durchmesser $D = 2R$ fände man den Umfang der Grundfläche $= 2R\pi$. Schnitte man den Kegel so, daß die Seite dadurch halbirt, gedrittelt ꝛc. würde und legte eine zur Grundfläche parallele Durchschnittsebene, so fände man daraus den neuen Halbmesser $r = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ ꝛc. des Halbmessers R der Grundfläche und daraus eben den Umfang des Durchschnittskreises $= \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ ꝛc. des Umfangs der Grundfläche.

Da die Grundfläche und alle parallelen Durchschnittsflächen Kreise sind, so ist mit dem Halbmesser R, r, r', ꝛc. die Fläche $R^2\pi$, $r^2\pi$, $r'^2\pi$ ꝛc. gegeben oder die Durchschnittsflächen (Kreise) verhalten sich zur Grundfläche wie die Quadrate der relativen Höhen und Seiten zum Quadrate der ganzen Höhe oder Seite. Man hat also auch hier nichts Neues, sondern bekannte Rechnungen.

Soll aber die ganze Oberfläche eines geraden Kegels oder eines abgestumpften geraden Kegels berechnet werden, so kömmt zur Grundfläche noch der Mantel oder zu den beiden Grundflächen beim abgestumpften geraden Kegel noch die Mantelfläche desselben hinzu. Es kömmt also nun darauf an, die Mantelfläche des geraden ganzen und abgestumpften Kegels zu finden.

Die Mantelfläche eines geraden ganzen Kegels ist nach dem früher gezeichneten Netze derselben ein Kreisausschnitt des Kreises, welcher mit der Seite des Kegels als Radius gemacht werden kann und welcher Kreisausschnitt einen Bogen hat, der so groß ist als der Umfang der Grundfläche. Ist also s die Seite und $2s\pi$ der Umfang des mit s zu beschreibenden Kreises und $\frac{1}{2}s . 2s\pi$ oder $s^2 . \pi$ die entsprechende Kreisfläche, so hat man analog den Bogen p, welcher mit der Grundfläche gleiche Größe oder Länge hat, mit $\frac{1}{2}s$ zu multipliciren. Also Mantel $= \frac{1}{2}s$ mal p. Ist der Radius der Grundfläche 1″, die Seite 5″, so ist der Umfang der Grundfläche $= 2$ mal $3\frac{1}{7}$, daher der Mantel $= \frac{1}{2} . 5 . 2 . 3\frac{1}{7}$

$= 5.3\frac{1}{7}\square'' = 15\frac{5}{7}\square''$. Man konnte auch schließen: Welcher Flächeninhalt kömmt auf einen Kreisausschnitt vom Bogen $2.3\frac{1}{7}''$, wenn auf den ganzen Kreisumfang $2.5.3\frac{1}{7}$ die Fläche $5.5.3\frac{1}{7}$ kömmt? und finden $\frac{5.5.3\frac{1}{7}.2.3\frac{1}{7}}{2.5.3\frac{1}{7}} = 5$ mal $3\frac{1}{7}\square''$. Ist also der Umfang der Grundfläche $= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n}$ von dem Umfange des mit der Seite zu beschreibenden Kreises, so ist auch die Mantelfläche $= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n}$ von der Fläche desselben Kreises. Da aber die Umfänge in demselben Verhältnisse stehen, wie die Halbmesser, so ist der Mantel der ebenso vielte Theil von dem mit der Seite zu beschreibenden Kreise, der wievielte Theil der Halbmesser von der Seite ist. $= s^2.\pi.\frac{r}{s} = s.\pi.r = r.\pi.s = r.s.\pi$. Im obigen Beispiele ist der Halbmesser in der Seite 5 mal enthalten, also hat man von der Fläche $5.5.3\frac{1}{7}\square''$ den fünften Theil $5.3\frac{1}{7}\square''$ zu nehmen. Nennt man die mit der Seite zu beschreibende Kreisfläche K und bedeutet $\frac{1}{n}$ den Quotienten, wie oft der Halbmesser der Grundfläche in der Seite enthalten ist, so ist der Mantel M des ganzen geraden Kegels $= \frac{1}{n}$ K. Um die Gesammtoberfläche zu finden, hat man zu M noch die Grundfläche hinzuzusetzen; $O = R^2.\pi + R.\pi.s = \pi.R\,(R + s) = \pi.R\,(R + \sqrt{r^2 + h^2})$. Für das obige Beispiel hat man $O = 3\frac{1}{7}.1.(1 + 5) = 3\frac{1}{7}.6 = 18\frac{6}{7}\square''$, was man auch findet, wenn man zu den $15\frac{5}{7}\square''$ des Mantels die $3\frac{1}{7}\square''$ der Grundfläche addirt.

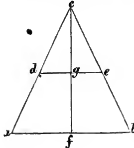
Um den Inhalt des Mantels eines abgestumpften geraden Kegels zu finden, könnte man die Seite des abgestumpften Kegels zur Seite des ganzen Kegels ergänzen und die Mantelfläche des abgestumpften Kegels als Unterschied zwischen der Mantelfläche des ganzen Kegels weniger der Mantelfläche des Ergänzungskegels betrachten. Kennt man aber die beiden Radien und die Seite des abgestumpften Kegels, so läßt sich immer die Seite des ganzen Kegels, also auch die Seite des Ergänzungskegels berechnen, ebenso wie man aus den beiden Radien und der Höhe des abgestumpften Kegels die Höhe des Ergänzungskegels finden kann. Ist beispielsweise der Radius der untern Grundfläche $= 3''$, der oberen $= 1''$, die Seite des abgestumpften Kegels $= 4''$, so hat man

$$R : r = 4 + x : x$$
$$3 : 1 = 4 + x : x$$
$$3x = 4 + x,\ 2x = 4,\ x = 2.$$

Daher Seite des ganzen Kegels $= 6''$. Mantel des ganzen Kegels $\frac{3}{6}.6.6.3\frac{1}{7}\square'' = \frac{1}{2}.6.6.3\frac{1}{7}\square'' = 3.6.3\frac{1}{7}\square'' = 18.3\frac{1}{7}\square'' = 56\frac{4}{7}\square''$. Mantel des Ergänzungskegels $= \frac{1}{2}.2.2.3\frac{1}{7}\square'' = 6\frac{2}{7}\square''$, also Mantel des abgestumpften Kegels $= 56\frac{4}{7}\square'' - 6\frac{2}{7}\square'' = 50\frac{2}{7}\square'$. Um die Sache allgemeiner auszudrücken, so ist nach dem Früheren die Seite des Ergänzungskegels $y = \frac{rs}{R-r}$; die Seite des ganzen Kegels $= s + y = s + \frac{rs}{R-r} = \frac{Rs - rs + rs}{R-r} = \frac{Rs}{R-r}$. Die Mantelfläche des abgestumpften Kegels ist $\pi.R.\frac{Rs}{R-r} - \pi.r.\frac{rs}{R-r} = \frac{\pi.r}{R-r}.(R^2 - r^2)$ oder weil $R^2 - r^2 = (R-r).(R + r) = \pi.s.(R + r)$, wobei s die Seite des abgestumpften Kegels bedeutet. Im obigen Beispiele: $3\frac{1}{7}.4.4 = 3\frac{1}{7}.16 = 50\frac{2}{7}\square''$.

Anstatt $\pi.s.(R + r)$ zu schreiben, kann man auch sagen $s.(R.\pi + r.\pi) = s.\frac{2R\pi + 2r\pi}{2} = 2.\frac{R\pi + r\pi}{2}.s = 2.\frac{R + r}{2}.\pi.s.$ Aber $\frac{R + r}{2}$ bedeutet das arithmetische Mittel zwischen den Radien oder den mittleren Radius, also $2.\frac{R + r}{2}.\pi$ den mittleren Umfang. Daher: *die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels ist der Fläche eines Oblongums gleich, dessen eine Seite der Umfang des mittleren Querschnitts und dessen andere Seite die Seite des abgestumpften Kegels ist.*

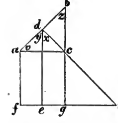
Um die Gesammtoberfläche zu finden, muß man zur Fläche des abgestumpften Kegelmantels noch die beiden Grundflächen hinzufügen, $O = R^2\pi + r^2\pi + \pi s\ (R + r) = \pi\ [R^2 + r^2 + s\ (R + r)]$.



Der Mantel des ganzen Kegels und des Ergänzungskegels lassen sich als ähnliche Dreiecke und ihr Unterschied als ein Paralleltrapez graphisch darstellen. Denn bedeutet ab den Umfang des ganzen Kegels und fc die Seitenhöhe desselben; bedeutet ferner cg die

Seite des Ergänzungskegels, so muß de den Umfang desselben ausdrücken, denn die Umfänge verhalten sich wie cf : cg, aber auch ab : de = cf : cg, also de = Umfang des Ergänzungskegels; daher der Mantel des abgestumpften Kegels = dem Paralleltrapez abed, dessen parallele Seiten die beiden Umfänge und dessen Höhe die Seite des abgestumpften Kegels ist. Denn gf ist als der Unterschied zwischen der Seite fc des ganzen Kegels und der Seite cg des Ergänzungskegels = der Seite des abgestumpften Kegels.

Anm. Da die Entwickelung der Berechnung des Volumens vom Obelisk für jetzt zu umständlich ist, so möge hier einfach auf die Grundzüge rc. von Schlömilch II, S. 67, 199. verwiesen werden. Dort ist der Inhalt = der Summe der Volumina eines Prisma und einer Pyramide, welche beide mit dem Obelisken gleiche Höhe besitzen, von denen aber das Prisma den mittleren Querschnitt und die Pyramide den Ergänzungsschnitt der Obelisken zu Grundflächen haben.



Man kann aber auch von der Entstehung und Berechnung des Kegelmantels des abgestumpften geraden Kegels eine andere Vorstellung entwickeln. Sei ab die Seite desselben, fg die Linie, wie sich die ab senkrecht von oben gesehen in der wagerechten Ebene, in welcher fm liegt gestaltet oder die Projektion von ab, af und bg seien die beiden Halbmesser des abgestumpften Kegels, also de der mittlere Halbmesser, welcher im Halbirungspunkte d der ab parallel zu den beiden Halbmessern gelegt ist und sei dm senkrecht in d errichtet und bis zum Durchschnitt m mit der wagerechten Linie fm verlängert, so entsteht der Kegelmantel, wenn man das ganze Liniensystem um die de sich drehen läßt, wobei die ab den Mantel des abgestumpften Kegels beschreibt.

$de = \frac{1}{2}(af + bg)$ = dem mittleren Halbm. Kegelmantel = $\pi (af + bg) . ab = 2\pi . de . ab$. Die beiden Dreiecke abc und dme sind ähnlich, denn außer dem rechten Winkel acb = dem ist noch W. x = W. v, weil v + y = y + x = R ist. Daher ab : ac = dm : de, oder $de = \frac{ac . dm}{ab} = \frac{dm}{ab} . ac = \frac{dm}{ab} . fg$, weil ac = fg ist, also der Kegelmantel $= 2\pi . de . ab = 2\pi . \frac{dm}{ab} . fg . ab = 2\pi . dm . fg$ = dem Produkte aus dem

mit der Linie dm beschriebenen Kreisumfange und der Projektion von ab oder der fg. Dieser Ausdruck dient später zur Berechnung der Kugeloberfläche.

Um den Kubikinhalt eines Kegels zu finden, braucht man nur den Kegel als eine gerade Pyramide zu betrachten, deren Grundfläche ein Unendlicheck oder ein Kreis ist. Der Kubikinhalt ist dann $= \frac{1}{3}$. Grundfläche mal Höhe auf die entsprechende Flächeneinheit bezogen $= \frac{R^2 . \pi . h}{3}$. Wäre der Radius $= 2''$, die Höhe $6''$, so hätte man $K = \frac{2.2.3\frac{1}{7}.6}{3} = 2.2.3\frac{1}{7}.2\ k'' = 8.3\frac{1}{7}\ k'' = 25\frac{1}{7}\ k''$. Wäre R und s gegeben; so hätte man $h = \sqrt{s^2 - R^2}$ und $K = \frac{1}{3}\ R^2 . \pi \sqrt{s^2 - R^2} = \frac{1}{3}\ R^2 . \pi . \sqrt{(s + R).(s - R)}$. Wäre h und s bekannt, so fände man $R = \sqrt{s^2 - h^2}$; $R^2 = (s + h).(s - h)$, daher $K = \frac{1}{3} . h . \pi . (s + h).(s - h)$. Wüßte man die Höhe h und den Umfang p der Grundfläche, so fände man $R = \frac{p}{2\pi}$, also die Grundfläche $\frac{p^2}{4\pi 2} . \pi = \frac{p^2}{4\pi}$; daher $K = \frac{1}{3} . \frac{p^2}{4\pi} . h = \frac{p^2 . h}{12\pi}$. Kennt man p, den Umfang der Grundfläche und die Seite s, so ist der Halbmesser $R = \frac{p}{2\pi}$; $h = \sqrt{s^2 - \frac{p^2}{4\pi^2}}$ Also $K = \frac{1}{3} . \frac{p^2}{4\pi^2} . \pi . \sqrt{s^2 - \frac{p^2}{4\pi^2}} = \frac{p^2}{12\pi} . \sqrt{s^2 - \frac{p^2}{4\pi^2}}$.

Um den Kubikinhalt eines abgestumpften Kegels zu finden, hat man aus den bestimmenden Elementen des abgestumpften Kegels die Höhe des Ergänzungskegels zu suchen, dessen Grundfläche mit der oberen Fläche des Kegels zusammenfällt. Nach dem Früheren (S. 242.) ist die Höhe des Ergänzungskegels $= \frac{r . h}{R - r}$, wenn $r =$ dem Radius der oberen, R dem Radius der Grundfläche und h den senkrechten Abstand beider bezeichnet. Die ganze Höhe ist also $= h + \frac{r . h}{R - r} = \frac{R . h - r . h + r . h}{R - r} = \frac{R . h}{R - r}$.

$$\text{K des ganzen Kegels} = \tfrac{1}{3} . R^2 . \pi . \frac{R . h}{R - r}$$

$$\text{K des Ergänzungskegels} = \tfrac{1}{3} . r^2 . \pi . \frac{r . h}{R - r}$$

$$\text{K des abgestumpften Kegels} = \tfrac{1}{3} . R^2 . \pi . \frac{R . h}{R - r} - \tfrac{1}{3} . r^2 . \pi . \frac{r . h}{R - r}$$

$= \frac{1}{3} . h . \pi . \left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right) = \frac{1}{3} . h . \pi . (R^2 + R . r + r^2)$. Anstatt der Höhe h könnte aber man auch die Seite s des abgestumpften

Kegels kennen und aus diesen Elementen erst die Höhe desselben berechnen müssen. Denkt man sich den oberen Radius r senkrecht auf den unteren R herunterbewegt, so bilden h, R—r und s ein rechtwinkliges Dreieck und es ist $h = \sqrt{s^2-(R-r)^2}$. Daher $K = \frac{1}{3}.\pi.(R^2 + R.r + r^2).\sqrt{s^2-(R-r)^2}$.

Hat ein gerader und ein schiefer Kegel gleiche Grundfläche und Höhe und mißt man das von beiden verdrängte Wasser, so findet man, daß dieselben gleichen Kubikinhalt haben. Daher ist auch der Kubikinhalt des schiefen Kegels oder des in gleicher Höhe abgestumpften schiefen Kegels = dem Kubikinhalte des ebenso hohen geraden oder abgestumpften geraden Kegels von derselben Grundfläche. Die Höhe des schiefen Kegels ist die Senkrechte, welche von der Spitze auf die Grundfläche oder die erweitert zu denkende Grundfläche gefällt werden kann.

Hat man irgend einen Kegel, in welchem die bestimmenden Dimensionen R, r, s, S, h, H (der Radius der Grundfläche, der Radius der oberen Fläche, die Seite des abgestumpften, die Seite des ganzen, die Höhe des abgestumpften, die Höhe des ganzen Kegels) bedeuten, zu einander ein gewisses Verhältniß haben und läßt in andern Kegeln, welche dieselbe Gestalt haben, die Dimensionen zwar größer oder kleiner werden, so daß aber dasselbe Verhältniß derselben zu einander fortbesteht, so daß dieselben $\frac{1}{n}$ oder n mal so groß werden, so findet man wie bei den früheren Oberflächen- und Kubikinhaltsberechnungen, daß die Oberflächen $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}$, oder n.n mal, die Kubikinhalte aber $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}$ oder n.n.n mal so groß werden. Man könnte dieses Gesetz auch ausdrücken: Zwei oder mehrere ähnliche Kegel verhalten sich wie die Würfel ihrer Höhen, der Radien ihrer Grundflächen, der Seiten &c., überhaupt der Würfel ihrer entsprechenden Dimensionen, die Oberflächen wie die Quadrate derselben. Setzt man z. B. die Kubikinhalte $K : k = \frac{1}{3} . R^2 . \pi . H : \frac{1}{3} . r^2 . \pi . h$ also $K : k = R^2.H : r^2.h$, berücksichtigt ferner, daß $\frac{R}{r} = \frac{H}{h}$ ist, also auch $\frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2}$ und $R^2 = \frac{r^2.H^2}{h^2}$, so hat man $K : k = \frac{r^2.H^2.H}{h^2} : r^2.h = H^3 : h^3$ &c.

Da nach S. 243. der Mantel eines schiefen Kegels als Summe von unendlich vielen Dreiecken von zwar gleicher Grundlinie aber

verschiedenen, nach gewissen Seiten hin stets wachsenden oder abnehmenden Höhen erscheint, so kann der Inhalt desselben mit bisherigen elementaren Hülfsmitteln nicht mehr gefunden werden.

Aufgaben.

I. Aufgaben, welche die Berechnung des Mantels und der gesammten Oberfläche des ganzen und abgestumpften Kegels betreffen.

Mantel = $s.r.\pi$. Quadrateinheiten oder auch $2r.\pi.\frac{s}{2}$, d. h. $\pi = 3\frac{1}{7}$

Umfang mal halbe Seite.

1) Wie groß ist der Mantel eines Kegels, wenn der Halbmesser der Grundfläche = 3′ 7″, die Seite = 7′, sowohl dd, als auch d ist? r = 3′ 7″ und s = 7′.

2) Wie groß ist der Mantel eines Kegels, wenn zusammengehören:

r = 2″; 3′ 6″; 8″ 3‴ } dd?
s = 7″; 5′ 8″ 2′

3) Wie groß ist der Mantel eines Kegels, wenn gegeben sind:

r = 5″; 7′ 3″; 8″ 7‴; } d?
s = 9″; 11′ ; 9″ 7‴;

4) Wie groß ist der Mantel eines Kegels, wenn der Halbmesser = 6′ 5″ und die Höhe = 10′ 5″ ist? d.

5) Der Umfang der Grundfläche = $15\frac{5}{8}$′, die Seite = $12\frac{2}{5}$′; wie groß ist der Flächeninhalt des Mantels? d.

6) Umfang der Grundfläche = 39′, Seite = 15′; wie groß ist der Flächeninhalt des Mantels? dd.

7) Wie wächst der Mantel eines Kegels, wenn man a. den Halbmesser 2, 3, . . . n mal so groß werden läßt, während die Seite unverändert bleibt, b. wenn man bei unverändertem Halbmesser die Seite 2, 3, . . . n mal so groß werden läßt, c. wenn sowohl der Halbmesser, als auch die Seite 2, 3, . . . n mal so groß werden, d. wenn der Halbmesser n mal, die Seite m mal so groß wird?

8) Der Umfang eines Kegels ist 33″, die Seite 12″, wie groß ist die Mantelfläche? d.

9) Der Umfang eines Kegels ist 27″, die Seite 11″, wie groß ist die Mantelfläche? dd.

10) Der Umfang eines Kegels ist 15″, die Höhe 20″; wie groß ist die Mantelfläche? d.

11) Es läßt sich Jemand einen Mantelkragen in Form eines Kegelmantels anfertigen; der Umfang beträgt 5 Ellen, die Länge (Seite) desselben $2\frac{1}{2}$ Elle, was kostet das Tuch, wenn die Elle $\frac{6}{4}$ breit 1 Thlr. 10 sgr. kostet?

12) Was kostet ein kegelförmiger Aufsatz auf eine Feueresse von Schwarzblech, wenn der Durchmesser 3′, die Seite 7′ beträgt und ein Quadratfuß Schwarzblech $7\frac{1}{2}$ sgr. kostet?

13) Es läßt Jemand verschiedene Trichter anfertigen, theils von Weißblech, theils von Schwarzblech, theils von Zinkblech; der Durchmesser derselben beträgt 5″ 3‴, die Seite 11″, wie hoch kömmt einer an Material zu stehen, wenn ein □′ Weißblech $5\frac{1}{2}$ sgr., Schwarz- und Zinkblech 7 sgr. kostet? d.

14) Der Mantel eines Kegels sei 3□′ 16□″, die Seite sei 12″, wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? d.

15) Der Umfang der Grundfläche eines Kegels = 13,2′; Inhalt des Mantels = 99□′, wie groß ist die Seite und die Höhe des Kegels? d.

16) Der Inhalt eines Kegelmantels ist 550□′; die Seite desselben = 20′; gesucht wird der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe. d.

17) Ein Kegel hat 7,5′ Höhe; die Mantelfläche beträgt 106,76□′; gesucht wird die Seite und der Durchmesser der Grundfläche. d.

18) Wie groß ist die Gesammtoberfläche eines Kegels, wenn der Radius der Grundfläche und die Seite sind 3′ 7″ und 7′; 7″ 5‴ u. 1′ 5″; 3″ 4‴ u. 1′ 7″; 3′ u. 9,3′?

19) Wie groß ist die Gesammtoberfläche eines Kegels, wenn der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe des Kegels sind 6′ u. 12′; 10′ u. 18′; 9′ u. 20′; 12′ u. 24′; 15′ u. 30′; 8′ u. 16′?

20) Umfang der Grundfläche 8′ 5″ 3‴, Seite 7′ 3″; gesucht die Oberfläche.

21) Durchmesser $10\frac{1}{2}$′; Seite 18′; gesucht die Oberfläche.

22) Umfang 9′; Höhe 7′; gesucht O.

23) Umfang 15′; Mantel 100□′, gesucht die Seite und Höhe des Kegels.

24) Inhalt des Mantels 300□′ 76□″, Seite 13′, gesucht der Durchmesser und die Höhe.

25) Bei einer Höhe von 12′, soll die Oberfläche 400□′ werden; gesucht der Halbmesser.

26) Man hat einen Kegel; zu demselben werden ähnliche Kegel konstruirt; wie wächst oder nimmt ab die ganze Oberfläche oder auch der Umfang, wenn die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder so klein werden?

27) Wie groß muß man die bestimmenden Dimensionen eines ähnlichen Kegels machen, dessen Oberfläche und Umfang 2, 3, 4, . . n mal so groß oder klein werden sollen?

28) Man konstruire folgende Kegelnetze:
Durchmesser = 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′;
Seite = 9′, 10′, 12′, 18′, 36′, 10′; der entsprechende Centriwinkel ergiebt sich zu 120°, 144°, 75°, 60°, 35°, 144°.

II. Aufgaben, welche den Kubikinhalt betreffen.

1) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kegels, wenn Durchmesser und Höhe desselben sind 3′ u. 12′; 9′ u. 16′; 8′ u. 7′; 6′ u. 12′; 1′ 5″ u. 12′ 5″; 2′ 1″ u. 16′ 4″; 3′ 5″ 7‴ u. 3′ 9′ 2‴?

2) Grundfläche 9□′; Höhe 7′ 5″; gesucht K.

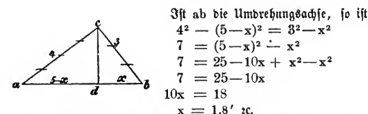
3) Umfang eines Sandhaufens 40′; Höhe 15′; gesucht der K.

4) Durchmesser eines Cylinders 3′, Höhe 5′; wie viel Holz fällt ab, wenn man den möglichst größten Kegel aus demselben bildet?

5) Umfang 6′ 2″ 8‴; Seite 5′ 4″; gesucht K; ebenso Umfang 2,512′ und Seite 2′; 12,56′ u. 7,5′.

6) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kegels, welcher durch Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um die größere Kathete entsteht, wenn die kleinere Kathete 3′, die größere 4′, also die Hypotenuse 5 ist?

7) Wie gestaltet sich der Kubikinhalt des Doppelkegels, welcher entsteht, wenn man das rechtwinklige Dreieck in Nr. 6. um seine Hypotenuse als Achse sich drehen läßt, wobei die Katheten die Seiten der beiden Kegel werden? Die gemeinschaftliche Grundfläche hat die Höhe aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse zum Radius.



Ist ab die Umdrehungsachse, so ist

$$4^2 - (5-x)^2 = 3^2 - x^2$$
$$7 = (5-x)^2 - x^2$$
$$7 = 25 - 10x + x^2 - x^2$$
$$7 = 25 - 10x$$
$$10x = 18$$
$$x = 1{,}8' \text{ ꝛc.}$$

8) Der Mantel eines Kegels bildet einen Kreisausschnitt von 100° bei 2′ Halbmesser; gesucht K.

9) Kubikinhalt 400 k′; Höhe 15′; gesucht der Halbmesser.

10) Durchmesser 8′; Kubikinhalt 360 k′ 663 k″; gesucht die Höhe.

11) Ein trichterförmiges Gefäß soll 300 preuß. Quart fassen (1 Q. = 64 Kubikzoll) und ist 2′ tief; die Ausdehnungen des Netzes werden gesucht.

12) Durchmesser 3′; Oberfläche 200 □′ 25 □″; gesucht K.

13) Aus einem Stücke Blech, welches einen Winkel von 120° bildet bei einem Halbmesser von 2′ soll ein Trichter verfertigt werden; wieviel Quart wird derselbe fassen?

14) Ein Kegel hat 6″ Radius und 9″ Seite, wie groß ist seine Höhe; in welcher Höhe von der Grundfläche muß die Durchschnittsebene gelegt werden, wenn der oben abgeschnittene Kegel $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ des ganzen Kegels werden soll?

15) Ein blecherner Trichter faßt 100 preuß. Quart und ist bis zur Hälfte der Höhe gefüllt; wieviel Flüssigkeit ist in demselben?

16) Wie verändert sich der Kubikinhalt eines Kegels, wenn die bestimmenden Dimensionen 2, 3, 4, ... n mal so groß oder klein werden?

17) Wie kann man zu einem vorhandenen Kegel einen andern ähnlichen konstruiren, welcher 2, 3, 4, ... n mal so groß oder klein ist?

18) Ein Kegel hat 33 k″ 8 k‴ Inhalt; die Seite, Höhe oder der Radius eines ähnlichen Kegels ist 2, 3, 4 mal so lang, wie groß ist der Kubikinhalt?

19) Ein Kegel hat 100 k′ Inhalt; sein Halbmesser ist 2′ 5″; der Halbmesser eines andern ähnlichen beträgt 1′; wie groß ist sein Kubikinhalt?

20) Halbm. 1′; Seite 2′, 6″; spec. Gew. 3,5; 1 k″ W. = 1,072 Lth. oder wenn 1 k′ rheinl. Wasser = 61,74 Pfd. wiegt.

21) Ein Kegel von Eisen soll 200 Pfd. schwer werden, bei einem spec. Gew. von 7,2; die Seite wird gesucht.

22) Durchmesser eines schiefen Kegels 4′; größte Seite 12′, kürzeste 10′; gesucht K.

23) Wie groß ist der Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels, dessen Durchm. 3′ ist?

24) Kubikinhalt eines gleichseitigen Kegels 25 k′; gesucht der Durchmesser.

III. Oberfläche des abgestumpften Kegels.

1) Man berechne den Mantel folgender abgestumpften Kegel:

Unterer Durchm.	Oberer.	Seite.
12′	6′	5′
10′	6′	4′
3′ 4″	2′ 8″	6′ 8″
8′ 9″	6′ 3′	2′ 6″

2) Die beiden Umfänge sind 50′ und 100′; die Seite 20′; gesucht der Mantel.

3) Die beiden Durchmesser 5′ und 4′; Seite 8′; gesucht die Oberfläche.

4) Höhe 3′; die Durchmesser der Grundflächen 6′ und 4′; gesucht die Oberfläche.

5) Inhalt 1000□′ beim Mantel; die Umfänge 40′ und 30′; gesucht die Seite des Kegels.

6) Oberfläche 340□′; Durchmesser 6′ und 3′; gesucht die Seite und Höhe des abgestumpften Kegels.

7) Verhältniß der Durchmesser und Höhe wie 2 : 1 : 5; Oberfläche 300□′; gesucht die Durchmesser und Höhe.

8) Die beiden Halbm. eines abgestumpften Kegels sind 0′ 5″ und 1′; die Seite 3′; gesucht die konvexe Oberfläche.

9) Die beiden Radien sind 5′ und 4′; die Höhe 3′; gesucht der Mantel.

10) O = 100□′; die beiden Radien 2′ und 4′; gesucht die Seite.

11) O = 300□′; der eine Radius ist im andern 3 mal und in der Seite 4 mal enthalten; gesucht die Radien und Seite.

12) Zu einem abgestumpften Kegel giebt es ähnliche; die be-

stimmenden Dimensionen werden n mal so groß oder klein; wie gestaltet sich die Oberfläche?

13) Man soll zu einem vorhandenen abgestumpften Kegel einen andern ähnlichen konstruiren, der n mal so groß oder klein ist; wie werden die neuen Dimensionen?

14) Ein abgestumpfter Kegel hat 120□′ Oberfläche bei 5′ Höhe; wie groß wird die Oberfläche bei 7′ Höhe?

IV. Kubikinhalt des abgestumpften Kegels.

1) Berechne den Kubikinhalt folgender abgestumpften Kegel:

Halbm. der unteren Fläche;	der oberen;	Höhe.
6′	4′	10′
10′	8′	12′
15′	10′	18′.

2) Höhe 4′ 7″; D und d = 5′ 3″ und 3′ 8″; gesucht K.

3) Kubikinhalt 135 k′; D = 5′ und d = 7′; gesucht die Höhe.

4) Ein Baumstamm ist 30′ lang; die beiden Durchmesser sind 3′ und 2′ 6″; gesucht K.

5) Ein Baumstamm hat 15′ und 10′ Umfang und eine Länge von 36′; was kostet derselbe, wenn der Kubikfuß 4 sgr. kostet?

6) Ein Kessel in Form eines abgestumpften Kegels hat 3, 5″ und 2′ Durchmesser und 5′ Höhe; wie viel Quart preuß. faßt derselbe, wenn 1 Quart = 64 k″ rheinl.

7) Ein Baumstamm in Form eines abgestumpften Kegels ist in einer Holzauktion von drei Theilnehmern erstanden worden; sie wollen den Baum durch zur Grundfläche parallele Ebenen in drei gleiche Theile theilen. In welchen Punkten muß dieß geschehen, wenn die untere Grundfläche = 4□′, die obere = 1□′ und die Länge = 35′ ist?

8) Ein Gefäß hat die Gestalt eines abgestumpften Kegels; r = 1,5″; R = 2,5″, H = 8″; gesucht K und der Druck des Wassers gegen Grundfläche und Seitenwand.

9) Ein Trinkglas in Form eines abgestumpften Kegels (Seidel) ist 7″ hoch und bis an den Rand mit Flüssigkeit angefüllt; der untere Durchmesser ist 4″, der obere 2″ 5‴; das Glas wird bis zu einer Höhe von 4″ ausgetrunken; wieviel blieb in demselben zurück?

10) Kubikinhalt 40 k'; der eine Radius 1'; die Höhe 6'; gesucht der andere Radius und die Seite.

11) Umfänge 8' und 7'; Seite 5'; gesucht K.

12) Durchm. 8' und 6'; Länge 12'; in der Mitte wird eine parallele Ebene gelegt; gesucht der Kubikinhalt der beiden Theile.

13) Kubikinhalt 1000 k"; D und d = 8" u. 10"; gesucht H.

14) Kubikinhalt 15 k' 922 k"; die Radien und Höhe verhalten sich wie 5 : 3 : 7; wie groß sind diese Dimensionen?

15) Ein Sandstein hat die Form eines abgestumpften Kegels; Höhe 12'; Umfänge der Grundflächen 15' und 10'; spec. Gew. 2,5; wie schwer?

16) Ein gußeisernes Gewicht wiegt 100 Pfd.; die beiden Durchmesser sind 8" und 6"; spec. Gew. 7,2; gesucht die Höhe.



VI. Von den regelmäßigen Körpern
und
den ebenflächigen Körpern oder Polyedern überhaupt.

Hätte man 4 kongruente, gerade, dreiseitige regelmäßige Pyramiden, deren Grundflächen kongruente regelmäßige Dreiecke wären und füllten dieselben um einen Punkt herum im Raume gelegt denselben vollkommen aus, so entstände dadurch ein Körper, welcher von 4 kongruenten gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wäre und auch eine regelmäßige gerade Pyramide wäre, deren Seitenkanten der Kante der Grundfläche gleich wären. Legte man von den oben genannten Pyramiden zwei mit den Spitzen zusammen, so daß sich zwei Seitenflächen deckten und zwei Kanten der Grundflächen in eine zusammenfielen und legte man die dritte Pyramide mit den beiden vorigen in derselben Weise mit gemeinschaftlicher Spitze zusammen; so entstände dadurch ein hohler Raum, in welchen die vierte gerade, dreiseitige kongruente Pyramide so hineinpaßte, daß die Spitzen in einander fielen, ebenso die 3 Kanten der Grundfläche und der Raum dadurch vollständig ausgefüllt würde. Denkt man sich nun die genannten 4 Pyramiden in der bezeichneten, durch Anschauung leicht zu zeigenden Lage, so ergiebt sich von selbst, daß der genannte Punkt, um welchen herum die 4 Pyramiden liegen 1) von den Begrenzungsflächen, welche regelmäßige Dreiecke sind, gleichweit absteht, denn die Pyramiden sind von gleicher Höhe vorausgesetzt, oder der Punkt ist centrisch nach den Seitenflächen, 2) da die Kanten der 3 Pyramiden gleich sind, so ist der Punkt centrisch nach den Ecken und 3) ist der Punkt auch von den Kanten gleichweit entfernt, da die Pyramiden kongruente gleichschenklige Dreiecke zu Seitenflächen

haben, deren Höhen gleich sind. Die 4 Pyramiden, welche mit den Spitzen zusammenliegen, haben im Ganzen 12 Seitenkanten, welche von diesem Punkte auslaufend, zum Theil zusammenfallen, so daß die zweite mit der ersten, die dritte mit der zweiten ebenfalls und die vierte mit den vorhergehenden Seitenkanten zusammenfällt. Dieser Körper ist die dreiseitige, gerade, regelmäßige Pyramide, der Vierflächner oder das Tetraeder. Alle Kanten, alle Flächenwinkel, alle ebenen Winkel sind einander gleich, die Linienflächenwinkel sind schief, spitz und gleich; die ebenen Winkel betragen je 60°, so daß die drei ebenen Winkel, welche eine Ecke bilden, zusammen 3 mal 60 oder 180° bilden. Vier Ecken und 4 Flächen, aber nur 6 Kanten, so daß man zur Anzahl der Kanten noch 2 zählen muß, um die Zahl 8 für Ecken und Seitenflächen zusammen zu erhalten. Alle ebenen Winkel sind 4 mal 2 Rechte oder 4 mal soviel Rechte, als Ecken da sind, weniger zwei. Bedeutet N die Anzahl aller Seitenflächen, E die Anzahl aller Ecken und K die Anzahl aller Kanten, W die Summe aller ebenen Winkel der Begrenzungsflächen, so ist

1) $E + N = K + 2$, d. h. das Tetraeder hat Ecken und Seitenflächen zusammen zwei mehr als Kanten und

2) $W = 4\,R\,(E-2)$, d. h. die Summe aller ebenen Winkel des Tetraeders beträgt 4 mal soviel Rechte, als Ecken da sind, weniger 2.

Vier Raumdreiecke bilden das Tetraeder oder füllen den Raum um den Punkt herum aus; eines muß also den vierten Theil des Raumes ausmachen.

Die Linie vom centrischen Punkte nach einer Ecke heiße der Eckenhalbmesser, die Senkrechte nach einer Seitenfläche der Seitenflächenhalbmesser, nach einer Kante heiße Kantenhalbmesser; alle sind unter einander gleich. Fährt man in der angefangenen Weise fort und setzt in ähnlicher Art 6 kongruente, gerade Pyramiden, deren Grundflächen kongruente Quadrate sind und von denen jede den vierten Theil des Raumes um den Punkt herum einnimmt, zu einem Körper zusammen, so erhält man den Sechsflächner oder Würfel (Kubus), welcher als Ausgangskörper beschrieben worden ist. Derselbe ist von 6 kongruenten Quadraten eingeschlossen; je drei ebene Winkel à 90°

bilden eine Ecke, dieselben betragen also zusammen 270°. Acht Ecken, 12 Kanten, 4 Seitenkanten; wie beim Tetraeder gelten die Gesetze 1 und 2. Die Ecken-, Seitenflächen- und Kantenhalbmesser sind unter sich gleich. Setzt man 8 kongruente Pyramiden in derselben Weise zusammen, von denen jede ein regelmäßiges mit den übrigen kongruentes Dreieck zur Grundfläche hat, und jede mit ihrem Raumvieleck an der Spitze den achten Theil vom ganzen Raume um den Punkt herum einnimmt, so erhält man den Achtflächner oder das Oktaeder, in Bezug auf welches sich dieselben Sätze entwickeln lassen, wie bei den beiden vorhergehenden Körpern. Vier ebene Winkel à 60° bilden einen Körperwinkel oder eine Ecke und betragen zusammen 4 mal 60° oder 240°. Denkt man sich weiter 12 kongruente gerade Pyramiden, deren jede $^1/_8$ des Raumes mit ihrem Körperwinkel an der Spitze einnimmt und ein regelmäßiges, mit den übrigen Grundflächen kongruentes Fünfeck zur Grundfläche hat, so kömmt man wieder zu ähnlichen Betrachtungen. Der Körper ist dann von 12 regelmäßigen Fünfecken eingeschlossen; jede Ecke wird von drei ebenen Winkeln à 108° gebildet, welche zusammen 3 mal 108° oder 324° bilden. Ein solcher Körper heißt Zwölfflächner oder Dodekaeder. Die 12 Fünfecke haben 60 Seiten, jede ist aber doppelt gerechnet, also giebt es beim Dodekaeder 30 Kanten; die 12 Fünfecke haben 60 Winkel, drei gehören zu einer Ecke, also giebt es 20 Ecken. Es läßt sich also, wie früher, das Stattfinden derselben Gesetze nachweisen. Endlich kann man in derselben Weise 20 kongruente, gerade, $^1/_{20}$ des Raumes um den Punkt mit dem Raumvieleck an der Spitze betragende Pyramiden mit regelmäßigen, kongruenten Dreiecken als Grundflächen zusammenstellen und erhält den Zwanzigflächner oder das Ikosaeder, an welchem sich wiederum dieselben Gesetze bestätigt finden. Der Körper ist von 20 gleichseitigen kongruenten Dreiecken eingeschlossen, hat 30 Kanten, 12 Ecken. Fünf ebene Winkel à 60° gehören zu einer Ecke, betragen also 5 mal 60° = 300°. Die 5 genannten, von regelmäßigen, kongruenten Drei-, Vier- und Fünfecken eingeschlossenen Körper heißen regelmäßige — andere kann es nicht mehr geben. Denn nennt man einen regelmäßigen Körper einen solchen, welcher von regelmäßigen Figuren eingeschlossen ist, so können

es 1) Dreiecke sein. Drei ebene Winkel derselben sind wenigstens nothwendig, um eine Ecke zu bilden, sie betragen 180°; man könnte auch 4 zu einer Ecke zusammensetzen und erhielte 240°; ebenso 5 und erhielte 300° — aber nicht 6, denn dieselben würden 360° betragen oder eine Ebene. Die Ecke würde also zu einer Ebene werden. Daher giebt es nur das Tetraeder, Hexaeder, und Ikosaeder, welche von regelmäßigen Dreiecken eingeschlossen sein können. 2) Wären die Begrenzungsflächen Quadrate, so gehören wenigstens 3 ebene Winkel à 90° zur Bildung einer Ecke; 4 solcher Winkel bildeten schon 360° oder eine Ebene. Es kann also nur einen regelmäßigen Körper geben, welcher von Quadraten eingeschlossen ist, den Würfel. Nimmt man 3) einen von regelmäßigen kongruenten Fünfecken eingeschlossenen regelmäßigen Körper an, so beträgt jeder Winkel des Fünfecks 108°; drei sind nothwendig zur Bildung einer Ecke und machen zusammen 324°; 4 solcher Winkel würden 432° betragen — d. h. nicht eine Ecke, auch nicht eine Ebene, sondern eine Vertiefung in umgekehrter Richtung, als in welcher die Ecke eine Erhabenheit bildet. Es kann nur diese 5 regelmäßigen Körper geben. Denn regelmäßige Drei-, Vier- und Fünfecke lassen sich in anderer Anzahl mit ihren Winkeln nicht zusammensetzen, um eine Ecke zu bilden. Noch viel weniger kann aber ein regelmäßiger Körper von kongruenten Sechs-, Sieben- oder noch mehrseitigen Vielecken eingeschlossen sein, weil schon drei ebene Winkel, welche doch zur Bildung einer Ecke nothwendig sind, mehr als 360° betragen, also eine Vertiefung oder eine Ecke in umgekehrtem Sinne bilden müßten.

Zur Erzeugung des Tetraeders, sowie der übrigen regelmäßigen Körper setzte man in einem Punkte im Raume eine bestimmte Anzahl, wenigstens 4, kongruente, den Raum ausfüllende Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche zusammen. Man könnte eine solche Pyramide einen körperlichen Strahl nennen, welcher von einem Punkte ausläuft und den Raum zum Theil ausfüllt. Wie man die regelmäßigen ebenen Figuren dadurch erzeugte, daß man von einem Punkte in der Ebene 3, 4, 5 ꝛc. gleich große Strahlen (Linien) unter gleichen Winkeln ausstrahlen ließ oder 3, 4, 5 ꝛc. kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Grundlinien die ebene Figur bildeten; wie aber jede andere nicht

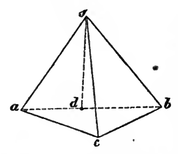
regelmäßige Figur entsteht, wenn man die Strahlen oder Strahlenwinkel oder beides zugleich als ungleich voraussetzt und die Endpunkte derselben durch gerade Linien verbindet, so kann man auch von einem Punkte im Raume verschiedene körperliche Strahlen (drei-, vier-, fünfseitige Pyramiden) ausstrahlen lassen, welche zusammen den Raum ausfüllen und von allen Seiten durch ebene, unter sich zusammenstoßende Durchschnitte (die Grundflächen der körperlichen Strahlen) abgegrenzt werden. Einen solchen von ebenen Flächen eingeschlossenen Körper nennt man einen ebenflächigen oder ein Polyeder und es ist immer möglich, daß alle Arten von Körpern, die von ebenen Flächen eingeschlossen sind, auf diese Art entstanden gedacht werden (die Prismen, Pyramiden &c.). So ist die Pyramide selbst ein dreieckiger oder neckiger körperlicher Strahl und jedes Polyeder wird durch so viele körperliche Strahlen zusammengesetzt, als dasselbe ebene Begrenzungsflächen hat.

Ist diese die eine Entstehungsweise der Polyeder, so giebt es noch eine weitere, indem man eine ebene veränderliche oder unveränderliche Figur um eine seiner Seiten als feste Achse herumdreht. Wenn das Vieleck, welches um eine seiner Seiten als feste Achse herumgedreht wird, seine Größe nach irgend einem Gesetze während der Drehung verändert, so können ebensowohl eben-, als krummflächige Körper erzeugt werden. Damit der ebenflächige Körper oder das Polyeder entstehe, „so müssen die von einem bestimmten Punkte (Strahlenpunkte) der Drehungsachse nach den Ecken der erzeugenden Figur gehenden Strahlenlinien sich in solcher Weise verändern, daß dadurch eine Gruppe von Raumecken mit einem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte, (welcher natürlich mit jenem Strahlenpunkte zusammenfällt) gebildet wird — während die ebenfalls veränderlichen Seiten der erzeugenden Figur ebene Flächen beschreiben. Übrigens beschränkt sich hierbei die Veränderlichkeit der Strahlenlinien nicht bloß auf ihre Größe, sondern auch auf ihre gegenseitige Abweichung, so daß selbst ein Eckstrahl zuweilen sich vervielfältigen und umgekehrt wieder mehrere Eckstrahlen in einen einzigen übergehen können". (S. Weller, ausführl. Lehrbuch &c. S. 350). „Wird ein unveränderliches Vieleck um eine seiner Seiten herumgedreht, so beschreiben die übrigen

Seiten, insofern sie mit der Achse nicht parallel laufen, Kegelflächen; die erzeugende Figur selbst beschreibt einen Körper, welcher sehr verschiedenartig zusammengesetzt sein kann. Sind z. B. die an der Achse liegenden Winkel spitz, während keine der übrigen Seiten der Achse parallel ist, so besteht der erzeugte Körper aus zwei ganzen geraden Kegeln und aus lauter abgestumpften Kegeln." (Weller, S. 350.)*

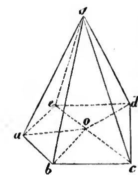
Um nun die allgemeinen Eigenschaften der Polyeder in der Hauptsache kennen zu lernen, muß man die Eigenschaften der körperlichen Strahlen oder des Raumdreiecks ꝛc., des Raumvielecks näher kennen lernen, durch deren Zusammensetzung das Polyeder gebildet wird.

Hat man zunächst einen dreieckigen körperlichen Strahl, ein Raumdreieck oder einen Körperwinkel, welcher durch das Zusammentreffen von drei ebenen Winkeln in einem Punkte gebildet wird, so ist die Summe von je zweien dieser ebenen Winkel (Seiten), welche die dreieckige Körperecke einschließen, stets größer als der dritte Winkel oder die dritte Seite.



Denn ist asb der fragliche ebene Winkel (Seite), welcher einzeln größer ist, als der W. asc oder W. bsc, so kann man den W. bsc von dem W. asb abziehen, so daß W. bsd = W. bsc wird. Macht man sd = sc, legt eine Ebene durch die drei Punkte b, c, d, so ist Dr. bsd $\cong$ Dr. bsc (aus 2 S. S. und dem eingeschl. W.), also bd = bc. Aber ac + bc > ab oder ad + db (2 S. S. eines Dr. sind immer größer, als die dritte), also auch ac > ad, wenn man bc = db abzieht. In den beiden Dr. Dr. asc und asd ist also as = as, sc = sd, aber ac > ad, also auch W. asc > W. asd, daher auch W. asc + W. bsc > W. asd + W. bsd > W. asb.

Hätte man ferner einen Körperwinkel s, der von 5, überhaupt von n ebenen Winkeln gebildet würde, so könnten doch

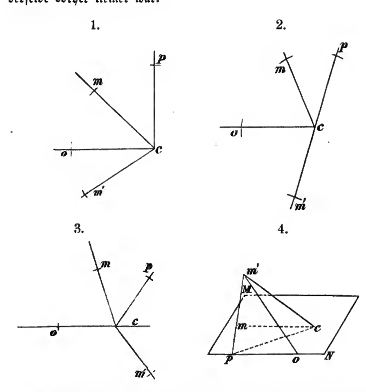


alle ebenen Winkel zusammen, welche den Körperwinkel begrenzen, noch nicht 4 Rechte ausmachen.

Denn schneidet man die Kanten und Seitenflächen der körperlichen Ecke durch eine Ebene abcde, nimmt in derselben den P. o an, verbindet denselben mit den Ecken a, b 2c., so ist die Summe der nDreiecke, welche den Körperwinkel bei s bilden ebenso groß, als die Summe der nDreiecke, welche um den P. o herum in einer Ebene liegen. Die beiden W. W. abo und cbo bilden den W. abc, welcher nach dem Vorigen $<$ ist, als die Summe des W. abs, + W. cbs; ebenso ist W. bcs + W. scd $>$ W. bcd; W. cds + W. eds $>$ W. edc 2c. Also ist in den Dreiecken mit dem Scheitel o die Summe der Winkel an der Grundlinie $<$ als die Summe der Winkel an den Grundlinien mit dem Scheitel s; daher muß umgekehrt die Summe aller Winkel um den P. o $>$ sein, als die Summe aller Winkel, welche die körperliche Ecke bei s einschließen, d. h. alle Winkel, welche die körperliche Ecke begrenzen, sind zusammen kleiner als 4 R. Sind alle W. W. = 4 R, so wird die körperliche Ecke zur Ebene, sind alle W. W. $>$ 4 R aber $<$ 8 R. so bildet sich die körperliche Ecke, welche bisher oberhalb einer Ebene gedacht wurde, unter derselben.

Zu den Wahrheiten, daß in einem Raumdreiecke zwei Seiten (ebene Winkel) immer größer sind, als die dritte und daß die Summe der drei Seiten eines Raumdreiecks größer ist als Null und kleiner als vier Rechte, kann man auch durch bloße Anschauung gelangen. Denn hat man zwei ebene Winkel, legt dieselben mit der Spitze und einem Schenkel zusammen, so kann zunächst die Ebene des einen in die des andern fallen, so daß gar kein Flächenwinkel entsteht oder derselbe = Null ist. Dreht man aber einen der beiden ebenen Winkel oder beide, z. B. den einen rechts, den andern links um den gemeinschaftlichen Schenkel, so entsteht der Flächenwinkel und der ebene Winkel, welcher zur Schließung oder voll-

ständigen Begrenzung des Flächenwinkels nothwendig ist, wird um so größer, je weiter die beiden ebenen Winkel bei der Drehung sich von einander entfernen. Fallen die beiden sich drehenden Winkel zum zweiten Male in eine Ebene, so wird der Flächenwinkel 2 R., der dritte Winkel wächst auch zu 2 R an, während derselbe vorher kleiner war.

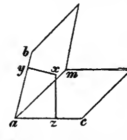


Wäre MN eine unendlich große, wir wollen beispielsweise annehmen, wagerechte Ebene und sind ferner pco und ocm zwei Winkelebenen, von denen die eine unten, die andere oberhalb, beide aber in der Ebene liegen, so kann man die zweite ocm um oc als feste Achse, welche in der Ebene liegen bleibt, in ihrer ursprünglichen Lage so drehen, daß dieselbe mit allen ihren übrigen Theilen außerhalb der wagerechten Ebene fällt. Nennt man die jeweilige, unendlich verschiedene Lage des Endpunktes m

des sich drehenden Schenkels cm immer m' und legt die durch m', c und p mögliche Ebene, so erhält man alle unendlich vielen verschiedenen Raumdreiecke, welche aus den beiden ebenen Winkeln ocp und ocm über der Ebene mn erzeugt werden können. Die Anzahl der Raumdreiecke wird um so größer werden, wenn die Achse oc und die Schenkel cm und cp als in ihrer Größe veränderlich angenommen werden. Denkt man sich die oc, cp in bestimmter Größe, ebenso die cm und die cm so gedreht, daß der Punkt m eine bestimmte Lage m' hat und legt noch durch m', o und p eine Ebene, so erhält man eine dreiseitige Pyramide, als deren Grundfläche om'p betrachtet werden kann, welche zur wagerechten Ebene irgend welche Stellung hat, deren eine Seitenfläche ocp in die Ebene hineinfällt und deren andere Seitenflächen pcm' und ocm' nur mit den Seiten pc und oc in der Ebene, sonst außerhalb liegen.

Sei nun, während sich W. ocm um oc gedreht hat, eine halbe Umdrehung vollendet, während welcher der Winkel pcm' oder die dritte Seitenfläche der körperlichen Ecke an Größe gewachsen ist, liege der Winkel ocm rechts von oc in der Ebene, so hängt die Größe der Summe der beiden Winkel ocp + ocm von ihrer Größe ab, ob beide zusammen < 2 R oder = 2 R oder > 4 R sind. In letzterem Falle müßten entweder beide überstumpf gewesen sein oder doch der eine, so daß beide auch nach der halben Umdrehung sich zum Theil bedeckten. Der dritte entstehende Winkel wird dann entweder kleiner sein, als die Summe des Winkels ocp + W. ocm (oder ocm'), oder sie ist derselben im höchsten Falle gleich; dieß hängt davon ab, ob die beiden Winkel zusammen > 2 R sind (Fig. 3.) oder nicht (wie Fig. 1. und 2.); vor Vollendung der halben Umdrehung ist der dritte Winkel (die dritte Seitenfläche) immer kleiner, als die Summe der beiden Winkel. Ist die Summe der beiden gegebenen Winkel = oder > 2 R, so wird die dritte Seitenfläche (der dritte W.) nach einer halben Umdrehung = 4 R mit jenen zusammen bilden; so macht z. B. der gestreckte W. pcm' in Fig. 2. mit ocm' und ocp zusammen 4 R; sind die beiden Winkel ocp und ocm oder ocm', von denen der eine rechts, der andere links von der oc in der Ebene liegt, > 2 R, aber < 4 R, wie es noch sein kann, da jeder als ein stumpfer > R vorausgesetzt

werden kann, so ergänzt der W. pcm' diese Summe zu 4 R und ist kleiner, als dieselbe. Für den Fall, daß ocm' und ocp spitze Winkel sind, wie Fig. 1. muß die Summe < 2 R sein; der dritte Winkel pcm wird dann dieser Summe gleich und beträgt mit derselben weniger, als 4 R. Nach einer halben Umdrehung ist also die Summe aller 3 Winkel, der beiden gegebenen und des entstehenden, höchstens 4 R; ist also die halbe Umdrehung noch nicht vollendet und kann der dritte Winkel pcm' noch wachsen, so muß die Summe der 3 Winkel < 4 R sein. Also muß in einem Raumdreiecke mit hohlen Winkeln die Summe zweier ebenen Winkel immer größer sein, als der dritte; ebenso muß die Summe der 3 Winkel desselben > 0°, aber < 4 R sein. Ob die vorausgesetzte Drehung der Winkelebene oberhalb oder unterhalb der wagerechten Ebene vor sich geht, macht keinen Unterschied.



Sind zwei Flächen irgendwie zu einander geneigt und bilden einen Flächenwinkel und schneidet die Ebene bac denselben so, daß ab und ac auf am senkrecht stehen, so ist bac das Maß für den Flächenwinkel. Fällt man von einem Punkte x der Ebene bac auf ab die Senkrechte xy und auf ac die Senkrechte xz, so schließen beide Senkrechte den Winkel yxz ein, welchen man den Ergänzungswinkel des Flächenwinkels nennt. Bei einem Raumdreieck giebt es drei Flächenwinkel, also auch drei Ergänzungswinkel; giebt man denselben einen und denselben Scheitel, so bilden sie wiederum ein Raumeck, für unsern Fall Raumdreieck oder Raumeck von gleicher Seitenflächenanzahl. Dieses Raumeck, welches man Ergänzungsraumeck oder Polareck nennen könnte, ist so beschaffen, daß seine Seitenflächen oder ebenen Winkel die Seitenflächen oder ebenen Winkel der gegebenen zu je 2 R ergänzen. Beide könnte man gegenseitig Raumecke oder Polarecke zu einander nennen.

Kehren wir zurück zum Raumdreieck, sind die Winkel desselben x, x_1, x_2, die Ergänzungswinkel des Polardreiecks p, p_1, p_2, so ist

1) $p = 2\,R - x$

2) $p_1 = 2\ R - x_1$

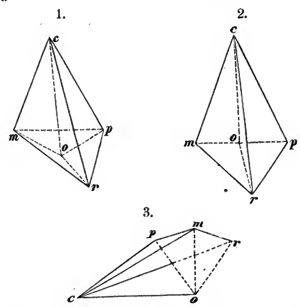
3) $p_2 = 2\ R - x_2$, also Gleichung $2 + = 3\ p^1 + p_2 = 4\ R - (x_1 + x_2)$. Es ist aber $p_1 + p_2 >$ p, daher auch $4\ R - (x^1 + x_2) > p$ oder $> 2\ R - x$, also auch $4\ R - 2\ R > x_1 + x_2 - x$

$x_1 + x_2 - x < 2\ R$ oder: *der Unterschied zwischen der Summe zweier Winkel und dem dritten Winkel eines Raumdreiecks ist immer* < 2 R.

Ferner: $x + p = 2\ R$; $x_1 + p_1 = 2\ R$; $x_2 + p_2 = 2\ R$. Also $(x + x_1 + x_2) + (p + p_1 + p_2) = 6\ R$. Aber $x + x_1 + x_2$ ist > 0 und $< 4\ R$, daher $p + p_1 + p_2 > 2\ R$ und $< 6\ R$, d. h. *die Summe der Winkel eines Raumdreiecks ist größer als zwei Rechte und kleiner als 6 Rechte.*

Kennt man die Lage eines Raumdreiecks, seiner Seitenflächen und Kanten im Raume, so kann man dasselbe mit Bestimmtheit konstruiren, so daß es an Größe und Gestalt festliegt, wenn man seine Seitenflächen und Kanten, sowie die Lage derselben kennt. Aber, wie einige bestimmende Bestandtheile des Dreiecks ausreichen, um die andern fehlenden zu finden, so braucht man auch nur in analoger Weise zu wählende Bestandtheile des Raumdreiecks, um dasselbe zu bauen und zwar 1) 2 Seiten o. Winkel und den von denselben gebildeten Flächenwinkel (eingeschlossenen), 2) alle drei Seiten, 3) eine Seite und die beiden Flächenwinkel, welche die anliegenden Seitenflächen bilden, so daß man ihre Durchschnittslinie finden kann, 4) die 3 Flächenwinkel. Stimmen nun in zwei Raumdreiecken Seiten und Winkel in Lage und derselben Ordnung mit einander überein, so müssen die Raumdreiecke nach demselben Gesetze entstanden oder kongruent sein. Sind zwar in 2 Raumdreiecken alle Bestandtheile dieselben, aber in umgekehrter Ordnung, so heißen dieselben *symmetrisch* oder *gegenbildlich*. Ist das Raumdreieck A zu B gegenbildlich und C zu B, so muß A mit B kongruent sein, denn bei denselben Bestandtheilen, welche B mit A bei entgegengesetzter Anordnung hat, wird für C dieser Gegensatz verneint, also stimmt C sowohl in den Bestandtheilen, als auch in der Lage derselben mit A überein, folglich sind A und C kongruent.

Abweichend von der früheren Entstehungsweise eines Raumdreiecks kann man sich dasselbe auch bilden, wenn man eine veränderliche Winkelebene um einen der Schenkel als Achse mehrmals dreht, wobei der andere bewegliche Schenkel ebene Winkel bildet.



Die Betrachtungen, welche man bezüglich der Centricität eines Dreiecks anstellen kann, können auch in Bezug auf das Raumdreieck erweitert werden. Denn hat man irgend ein Dreieck, ein spitzwinkliges, wie mpr Fig. 1., dessen Eckenmittelpunkt o in die Fläche fällt, oder ein rechtwinkliges mpr, wie Fig. 2., mit dem nach den Ecken centrischen Punkte o in der Seite mp, oder ein stumpfwinkliges pmr, dessen Eckenmittelpunkt außerhalb der Fläche in die zu erweiternde Fläche fällt, sind also om = op = or, steht ferner die oc im Punkte o der Dreiecksebene mpr oder ihrer Verlängerung senkrecht, so heißt co die Mittellinie. Legt man durch irgend einen Punkt derselben eine Ebene parallel zur Grundfläche, so steht derselbe von den Kanten immer gleichweit ab. Die Dreiecke cor, cop, com werden kongruent, die Kanten cm, cr, cp werden gleich. Ein solches Raumdreieck

ist also centrisch nach den Kanten. Man kann aber auch irgend ein Raumdreieck annehmen, seine Kanten gleich machen, durch die 3 Endpunkte der Kanten eine Ebene legen, auf dieselbe die Senkrechte co fällen, so erhält man kongruente Dreiecke (aus R, der Senkrechten und der Kante), folglich ist ein jedes Raumdreieck, dem man noch nicht beliebige Kanten, sondern gleiche gegeben hat, centrisch nach den Kanten. Zur Einsicht dieser Wahrheit wäre man auch gekommen, wenn man die veränderliche Winkelebene ocp um die im nach den Ecken centrischen Punkte o errichtete Senkrechte oc gedreht hätte, so daß dabei die ebenen Winkel des Raumdreiecks erzeugt werden. Da om = op = or, die Senkrechte oc gemein ist, so müssen die Kanten gleich werden. Im ersten Falle (Fig. 1.) muß eine dreimalige, im zweiten (Fig. 2.) eine zweimalige Drehung vorgenommen werden. Die Winkel um den Punkt o betragen im ersten Falle 4 R, im zweiten 2 R; in Fig. 3. betragen die Winkel um den P. o weniger als 2 R, es entsteht ein Raumviereck; das Raumdreieck (c) prm ist centrisch nach den Kanten. Jeder Punkt der Mittellinie in einem Raumdreieck steht aber auch von den Seitenflächen gleichweit ab oder jedes Raumdreieck ist centrisch nach den Seitenflächen. Die vollständige Beweisführung ist für unsern Zweck etwas zu umständlich; denkt man sich aber von irgend einem Punkte der Mittellinie auf jede Seitenfläche eine Senkrechte gefällt, so trifft diese zugleich die Halbirungslinie eines jeden der 3 das Raumdreieck bildenden Winkel; es entstehen 3 Dreiecke, welche rechtwinklig und kongruent sind, so daß die 3 Senkrechten auf die Seitenflächen gleich sein müssen. Die Sache ließe sich noch so veranschaulichen, daß ein jedes Raumdreieck sich bilden läßt, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Achse, welche zur Hypotenuse würde, in drei verschiedene Lagen brächte, so daß die beiden spitzen Winkel an der Hypotenuse lägen und wenn man dann durch das Ende der einen Kathete eine zu derselben senkrechte Ebene legte. Es muß immer möglich sein, dem Dreiecke zur Achse eine solche Lage zu geben, daß ein bestimmtes Raumdreieck dadurch erzeugt wird. Es muß sich also auch in ein jedes Raumdreieck eine Kugel beschreiben lassen, welche die Seitenflächen desselben in 3 Punkten berührt.

Setzte man die Betrachtungen, wie dieselben in ein ausführliches Lehrbuch der Stereometrie oder körperlichen Geometrie gehören, fort, so käme man zu den früher bereits theils durch Induktion gefundenen, theils bewiesenen Sätzen über die Polyeder, a. daß jedes Polyeder Ecken und Seitenflächen zusammen zwei mehr hat, als Kanten, b. daß die Summe aller ebenen Winkel eines Polyeders viermal mehr Rechte als Ecken hat, weniger acht Rechte oder = ist dem Produkte aus 4 R mal Eckenzahl weniger 2.

Wendet man sich noch einmal zu den regelmäßigen Polyedern zurück, so hat sich schon aus der Entstehung und Konstruktion derselben gezeigt, daß dieselben einen Punkt haben, welcher a. von den Ecken gleichweit absteht. Die gleichen Entfernungen von den Ecken heißen Eckenhalbmesser; jener P. heißt Eckenmittelpunkt; b. einen Punkt, welcher von dem centrischen Punkte der Seitenflächen oder Seiten um gleiche senkrechte Abstände absteht. Diese Senkrechten heißen Seitenhalbmesser; jener P. heißt Seitenmittelpunkt; c. die Senkrechten vom Mittelpunkte des regelmäßigen Polyeders, welche die Kanten halbiren, sind ebenfalls gleich; der P. könnte also auch der Kantenmittelpunkt heißen und seine Abstände von den Kanten könnte man Kantenhalbmesser nennen.

Das regelmäßige Polyeder ist also centrisch nach den Seiten, Ecken und Kanten, so daß der Eckenmittelpunkt mit dem Kanten- und Seitenmittelpunkt zusammenfällt.

Es läßt sich leicht einsehen, daß man den allgemein centrischen Punkt eines regelmäßigen Polyeders als Mittelpunkt von drei Kugeln betrachten kann. Die eine Kugel geht durch sämmtliche Ecken; dieselbe kann umschrieben genannt werden, der regelmäßige Körper eingeschrieben; die zweite Kugel, welche durch die centrischen Punkte der Seitenflächen geht und jede Seitenfläche berührt, kann eingeschrieben, der regelmäßige Körper, welcher die Kugeloberfläche mit seinen Seitenflächen berührt, umschrieben genannt werden; die dritte hätte den Kantenhalbmesser zum Radius; es fände ein gegenseitiges Durchdringen Statt, so daß die Ecken ganz und die Seitenflächen des regelmäßigen Körpers zum Theil außerhalb zum andern Theile innerhalb des Kugelraumes lägen.

Um die Oberfläche irgend eines Polyeders, in Bezug auf welches keine spezielle Voraussetzung gemacht wird, zu finden, hat man im Allgemeinen die Flächeninhalte der einzelnen Flächen zu bestimmen und alle zu einer Totalsumme zu addiren. Die einzelnen Flächen sind aber entweder Dreiecke, Vierecke, Fünfecke 2c., deren Berechnung früher angedeutet worden ist. Anders gestaltet sich die Aufgabe, die Oberfläche der 5 regelmäßigen Körper zu finden. Da bei denselben die einzelnen Seitenflächen einander gleich sind, so hat man den Flächeninhalt einer einzelnen so oftmal zu nehmen, als wieviel einzelne Seitenflächen da sind. Also beim Tetraeder 4 mal, beim Oktaeder 8 mal 2c. Es kommen bei den regelmäßigen Körpern nur gleichseitige Dreiecke, Quadrate, Fünfecke vor und es ist immer möglich, aus der gegebenen Kante die Oberfläche einer einzelnen Figur zu finden und ihren Flächeninhalt im Werthe des Quadrats der Seite auszudrücken.

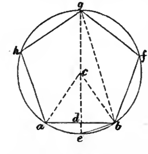
Die Oberfläche des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders wird gefunden, wenn man eines der gleichseitigen Dreiecke berechnet und 4, 8 oder 20 mal nimmt. Ist nun die Kante eines dieser 3 Körper = a, so ist in dem einzelnen gleichseitigen Dreiecke die Höhe $= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$. Multiplicirt man diese Höhe mit der halben Grundlinie, so ergiebt sich als Fläche $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Daher für das Tetraeder die Oberfläche $O = a^2 \sqrt{3}$; für das Oktaeder $2a^2 \sqrt{3}$; für das Ikosaeder $5a^2 \sqrt{3}$. Setzt man nun $\sqrt{3} = 2{,}236068$, wobei die letzte Ziffer um keine ganze Einheit zu groß genommen ist, so ergiebt sich

für das Tetraeder $O = 1{,}73205$ mal a^2;
für das Oktaeder $O = 3{,}4641$ mal a^2;
für das Ikosaeder $O = 8{,}66025$ mal a^2.

Hätte man die Fläche irgend eines regelmäßigen Dreiecks berechnet = I, und wäre die Seite desselben a, die des andern b, c, d 2c., so würde $I', I'', I''' = I.\frac{b^2}{a^2}, I.\frac{c^2}{a^2}, I.\frac{d^2}{a^2}$ 2c. Man könnte aber auch aus der Seite des regelmäßigen Dreiecks den Radius des ein- oder umschriebenen Kreises berechnen und die Fläche im Werthe des Quadrats desselben ausdrücken, was aber unter Umständen zu weitläufig wäre, wenn man nicht eine dazu im Voraus berechnete Tafel benutzen könnte. Die Oberfläche des Hexaeders bei der Kante a ist = $6a^2$. Die Oberfläche des

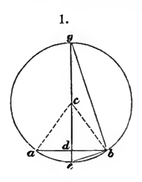
Dodekaeders könnte man finden, wenn eines der 12 Fünfecke berechnet und seine Fläche 12 mal genommen würde; man hätte die Seite a zu messen und den Seitenhalbmesser, d. h. die Senkrechte von dem Punkte auf die Seite, wo sich die Halbirungslinien zweier benachbarten Winkel schneiden und $\frac{5a}{2}$ oder den halben Umfang mit dem Seitenhalbmesser zu multipliciren.

Um auf andere Weise zum Ziele zu gelangen, muß man die gegenseitige Abhängigkeit der Seite des um das regelmäßige Fünfeck zu beschreibenden Kreises und des Radius dieses Kreises wissen.

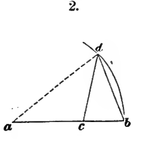


Denn bilden halbe Fünfeckseite, Höhe des einzelnen gleichschenkligen Dreiecks und Radius ein rechtwinkliges Dreieck (wie db, dc und bc), so kömmt es darauf an, die halbe Fünfeckseite mit dc zu multipliciren, um die Fläche des Dr. abc = $\frac{1}{5}$ des Fünfecks zu finden, zugleich aber die Linie dc im Werthe der Fünfeckseite ab auszudrücken.

1.



2.



Ist ab (Fig. 2.) der Radius eines Kreises und theilt man denselben durch den goldenen Schnitt oder im mittleren und äußeren Verhältnisse, d. h. so daß für ab = r und ac = x und bc = r — x die Proportion Statt findet

$$r : x = x : r - x$$
$$r^2 - rx = x^2$$
$$r^2 = x^2 + rx$$

$$x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$x + \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} = \tfrac{1}{2}r.\sqrt{5}$$

$$x = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}.\sqrt{5} = \frac{r}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

$= r.0{,}618034 =$ Zehneckseite, so hat man den Werth der Zehneckseite im Werthe des Radius ausgedrückt.

Kennt man aber die Seite a des Zehnecks und den Radius des Kreises, so kann man die Seite des Fünfecks finden, denn es ist in Fig. 1. $eb^2 = de.eg$ und wenn s_{10} die Zehneckseite bedeutet und r den Radius, also $eg = 2r$, so ist

$$dc = \frac{s^2_{10}}{2r}.$$

Aber db^2 oder $\frac{s^2_5}{4} = s^2_{10} - \frac{s^4_{10}}{4r^2}$.

$$\frac{s^2_5}{4} = \frac{4r^2.s^2_{10} - s^4_{10}}{4r^2}$$

$$s^2_5 = \frac{s^2_{10}(4r^2 - s^2_{10})}{r^2}$$

$$s_5 = \frac{s_{10}}{r}.\sqrt{4r^2 - s^2_{10}}$$

$$= \frac{s_{10}}{r}.\sqrt{(2r + s_{10}).(2r - s_{10})}.$$

Setzt man nun für die Zehneckseite ihren im Werthe des Radius ausgedrückten Werth $= \frac{r}{2}.(-1 + \sqrt{5}) = 0{,}618034.r$, so ist

$$s^2_{10} = \frac{r^2}{4}(-1 + \sqrt{5})^2 = \frac{r^2}{4}(1 - 2\sqrt{5} + 5).$$

$s^2_{10} = \frac{r^2}{4}.(6 - 2\sqrt{5})$. Es ist aber

$$s_5 = \frac{s_{10}}{r}\sqrt{4r^2 - s^2_{10}} = \frac{\sqrt{s^2_{10}.(4r^2 - s^2_{10})}}{r}.$$

Setzt man den Werth von s^2_{10} ein, so wird

$$r.s_5 = \sqrt{\left\{\frac{r^2}{4}.(6 - 2\sqrt{5}).\left[4r^2 - \frac{r^2}{4}.(6 - 2\sqrt{5})\right]\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{r^2}{4}.(6 - 2\sqrt{5}).\frac{r^2}{4}.[16 - (6 - 2\sqrt{5})]\right\}}$$

$$= \frac{r^2}{4}.\sqrt{(6 - 2\sqrt{5}).(10 + 2\sqrt{5})}.$$

$= \frac{r^2}{4}.\sqrt{(40 - 8\sqrt{5})}$; denn

$$(6 - 2\sqrt{5}).(10 + 2\sqrt{5}) = 40 - 8\sqrt{5}.$$

Also

$$r \cdot f_5 = \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{4 \cdot (10 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2r^2}{4} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}, \text{ demnach}$$

$f_5 = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ oder auch $f_5 = 1{,}17557 \cdot r$; oder wenn a, wie früher, die Seite der regelmäßigen Figur bedeutet $a = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ oder $a = 1{,}17557 \cdot r$. Umgekehrt ist auch $\frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = r$. Die Fläche des Dreiecks abc oder $1/5$ der Fünfecksfläche $= \frac{ab}{2} \cdot cd$; die ganze Fläche $\frac{5a}{2} \cdot cd$. Es muß also noch cd im Werthe von a ausgedrückt werden. Aber $cd^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}$ oder $= \frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}$.

$$cd^2 = \frac{16a^2 - 10a^2 + 2a^2\sqrt{5}}{4(10 - 2\sqrt{5})}$$

$$cd = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\frac{5a}{2} \cdot cd = \frac{5a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}}. \text{ Aber dieser Ausdruck}$$

$$\frac{5a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} \text{ ist auch } = \tfrac{1}{4}\, a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})}$$

oder

$$5 \cdot \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})} \text{ oder}$$

$$\sqrt{25 \cdot \frac{6 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})}.$$

$$\frac{150 + 50\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} = 25 + 10\sqrt{5}.$$

$$\frac{30 + 10\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} = 5 + 2\sqrt{5}.$$

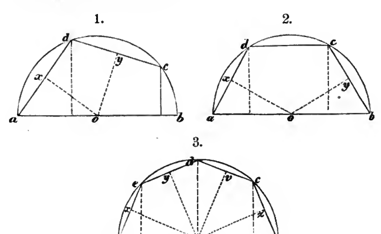
$$30 + 10\sqrt{5} = (10 - 2\sqrt{5}) \cdot (5 + 2\sqrt{5}).$$

$$\begin{array}{r} 5 + 2\sqrt{5} \\ 10 - 2\sqrt{5} \\ \hline 50 + 20\sqrt{5} \\ -10\sqrt{5} - 20 \\ \hline 30 + 10\sqrt{5}. \end{array}$$

Da nun aber die Fläche eines der 12 regelmäßigen Fünfecke $= \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})}$, so ist die Oberfläche des Dodekaeders $= 3a^2 \cdot \sqrt{5 \cdot (5 + 2\sqrt{5})} = 3a^2 \cdot 6{,}88 = 20{,}64a^2$.

Es möge nun noch die Oberfläche eines Polyeders bestimmt

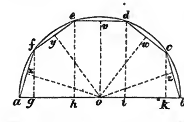
werden, welches durch Umdrehung eines *unveränderlichen* Vielecks um seine Achse entsteht. Wir wollen dabei voraussetzen, daß das erzeugende Vieleck ein regelmäßiges sei von gerader oder ungerader Seitenzahl und seien von den Eckpunkten desselben Perpendikel auf die Achse gefällt, so beschreiben diese bei der Umdrehung um die Achse Kreislinien und Kreisebenen, während die Seiten der Figur krumme Flächen beschreiben. Die Seiten, welche mit der Achse zusammentreffen, bilden Kreisebenen oder Mäntel von ganzen geraden Kegeln, wenn die Achse senkrecht zu einer Seite steht, während die anderen Seiten Mäntel abgestumpfter Kegel beschreiben und die der Achse parallele Seite einen Cylindermantel erzeugt.



Dreht man in Fig. 1. das halbe regelmäßige Fünfeck abcd um die Achse ab, so beschreibt ad den Mantel eines ganzen geraden Kegels, dc den Mantel eines abgestumpften Kegels und bc, die Hälfte der Fünfeckseite eine Kreisfläche. In Fig. 2. beschreibt ad den Mantel eines ganzen geraden Kegels, ebenso bc, während dc einen Cylindermantel erzeugt; in Fig. 3. bildet ae den Mantel eines ganzen geraden Kegels, ebenso bc, die ed und dc erzeugen abgestumpfte Kegelmäntel.

Sei also die nebenstehende Figur eine solche regelmäßige, daß bei der Umdrehung um die Achse ab, welche zugleich Durch-

messer ist, theils Mäntel von ganzen, geraden Kegeln, theils Mäntel von abgestumpften Kegeln, theils ein Cylindermantel entstehen, so läßt sich die Oberfläche des Polyeders, welches durch Umdrehung dieses regelmäßigen Vielecks entsteht, in einfacher Weise berechnen und also ein Weg finden, wie man die Kugeloberfläche berechnen kann.



Durch Drehung der af entsteht ein Kegelmantel, dessen Inhalt $= 2ag.\pi.ox$ ist; denn sieht man in der senkrechten Ebene die af von oben, so projicirt sich dieselbe als ag (siehe S. 248.); durch Umdrehung der fe entsteht der Mantel eines abgestumpften Kegels $= 2gh.\pi.oy$; die ed beschreibt bei ihrer Umdrehung einen Cylindermantel $= 2ed.\pi.ov$ 2c. Man hat dann $O = 2ag.\pi.ox + 2gh.\pi.oy + 2hi.\pi.ov + 2ik.\pi.ow + 2kb.\pi.oz$; aber die Seitenhalbmesser $ox = oy = ov = ow = oz = r$, wenn $ao = ob = R$ ist; daher $O = 2r\pi.(ag + gh + hi + ik + kb)$.
$= 2r\pi.2\ R.$

Verdoppelt man nun die Seitenzahl und läßt dieselbe bis in's Unendliche wachsen, so geht die Oberfläche des Polyeders nach und nach in die letzte Grenze, die Kugeloberfläche über, der Seitenhalbmesser r wird zum Eckenhalbmesser R und $O = 2\ R\pi.2\ R = 4\ R^2\pi$, welcher Ausdruck die Kugeloberfläche im Werthe des Quadrats des Radius ausdrückt.

Anstatt das ganze Vieleck, kann man auch nur einen Theil desselben. z. B. den Theil um die Achse drehen, welcher zwischen den Perpendikeln ho und kc liegt, dann ist der Ausdruck $O = 2hi.\pi.ov + 2.ik.\pi.ow = 2r\pi\ (hi + ik) = 2r\pi.hk$.

Bei einem regelmäßigen Vieleck stehen aber Seite, Ecken- und Seitenhalbmesser in einer bestimmten Beziehung, so daß man die Seite im Werthe von R ausdrücken kann; halbe Seite, R und r bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem R die Hypotenuse ist, daher läßt sich auch für den Eckenhalbmesser R der Werth von r im Werthe von R ausdrücken. Beim regelmäßigen Viereck, Achteck 2c. wird $r = \frac{R}{2}.\sqrt{2}; \frac{R}{2}.\sqrt{3};$

$\frac{R}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}; \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ ꝛc. Daher wird der Ausdruck $4 r\pi . R$ oder $4\, R . \pi . r = 2\, R^2 \pi . \sqrt{2}$; $2\, R^2 . \pi . \sqrt{3}$; $2\, R^2 . \pi . \sqrt{2 + 2\sqrt{}}$; $2\, R^2 . \pi . \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$; $2\, R^2 . \pi . \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, welche Ausdrücke die Oberfläche des Polyeders bezeichnen, welches durch Umdrehung des regelmäßigen Vier-, Acht-, Sechzehn-, Zweiunddreißig-, Vierundsechzigecks entsteht. Ebenso ließen sich die Oberflächen derjenigen Polyeder berechnen, welche durch Umdrehung irgend eines andern regelmäßigen Vielecks entstehen.

Um den Kubikinhalt der regelmäßigen Polyeder zu finden, muß man sich an ihre Entstehungsweise durch Zusammensetzung von Pyramiden erinnern, welche eine regelmäßige Grundfläche haben, kongruent sind, mit den Spitzen um einen Punkt herum liegen, so daß sie gerade den Raum ausfüllen um den Punkt herum. Es kömmt dabei darauf an, 1) die Seite a der Grundfläche, 2) den Seitenhalbmesser ϱ der in das Polyeder und den Eckenhalbmesser R der um das Polyeder zu beschreibenden Kugel, 3) den Radius r des Kreises, welcher um das regelmäßige Vieleck beschrieben werden kann, zu bestimmen. Wäre die Grundfläche einer der Pyramiden bekannt und der Seitenhalbmesser (2) ϱ, so wäre der Kubikinhalt einer Pyramide = Grundfläche mal $\frac{\varrho}{3}$; soviel Grundflächen oder Pyramiden vorhanden wären, sovielmal hätte man Grundfläche mal $\frac{\varrho}{3}$; anstatt dessen könnte man die ganze Oberfläche mit $\frac{\varrho}{3}$ multipliciren. Daher

Kubikinhalt = K des regelmäßigen Polyeders = O mal $\frac{\varrho}{3}$. Die Oberfläche läßt sich aber immer, wie früher gezeigt, im Werthe des Quadrats der Seite ausdrücken; findet man noch den Werth von ϱ im Werthe der Seite, so läßt sich der Kubikinhalt im Werthe des Würfels von a oder im Werthe von a^3 ausdrücken.

So gestaltet sich der Kubinhalt des **Würfels** mit der Kante $a = a^3$, wie früher beim Würfel gezeigt wurde. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man O mit $\frac{\varrho}{3}$ multiplicirt. O ist aber $= 6a^2$, wenn a die Seite eines der 6 Quadrate bezeichnet, welche den Würfel einschließen. Denn zieht man in einem Seitenflächenquadrate eine Diagonale und verbindet einen Endpunkt derselben mit der gegenüberliegenden Ecke, so erhält

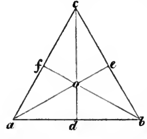
man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Diagonale des Würfels oder der Durchmesser der um dasselbe zu beschreibenden Kugel ist $= 2\,R$ und dessen beide Katheten die Diagonale des Quadrats und die Kante des Würfels sind. Also $4\,R^2 = 2a^2 + a^2$; $R = \frac{a}{2} . \sqrt{3}$. Aber R, die gesuchte Höhe x oder ϱ und die halbe Diagonale des Quadrats $= \frac{a}{2} . \sqrt{2}$ bilden wieder ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem R die Hypotenuse ist. Daher $x^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} . 2 = \frac{a^2}{4} . 3 - \frac{a^2}{4} . 2 = \frac{a^2}{4}$ und $x = \frac{a}{2}$. Also $\varrho = \frac{a}{2}$. Aber $O = 6a^2$, $\frac{1}{3}\,\varrho = \frac{a}{6}$, daher $K = 6a^2 . \frac{1}{6}\,a = a^3$, wie früher.

Beim Hexaeder ist die Diagonale des Quadrats $d = a\sqrt{2}$ und $R^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$; also $R = \frac{a}{2} . \sqrt{3}$.

Das Tetraeder hat den Kubikinhalt einer Pyramide, deren Grundfläche eines der regelmäßigen Dreiecke und deren Höhe die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche ist. Ist die Kante a, so ist der Flächeninhalt eines der Dreiecke $= \frac{a^2}{4} . \sqrt{3}$; die Höhe bildet mit dem Radius des Kreises um das gleichseitige Dreieck und mit der Kante ein rechtwinkliges Dreieck. Es findet aber zwischen dem Quadrate der Seite des regelmäßigen Dreiecks und dem Quadrate des Radius um dasselbe die Beziehung Statt, daß $a^2 = 3r^2$ ist — denn r ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{a}{2}$ und x das Apostema ist. Es ist aber die Fläche des Dreiecks $\frac{a^2}{4} . \sqrt{3}$; aber auch $3 . \frac{a}{2} . x$, daher $\frac{a^2}{4} . \sqrt{3} = \frac{3a}{2} . x$, also $x = \frac{a^2}{4} . \frac{2}{3a} . \sqrt{3} = \frac{a}{6} . \sqrt{3}$. Es ist nun $r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{36} . 3 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} = \frac{3a^2}{12} + \frac{a^2}{12} = \frac{4a^2}{12} = \frac{a^2}{3}$, also $3r^2 = a^2$ und $r = a . \sqrt{\frac{1}{3}}$. Der Radius r, die Kante a und die Höhe y der Pyramide bilden aber wiederum ein rechtwinkliges Dreieck und es ist $a^2 - r^2 = y^2$ oder $a^2 - a^2 . \frac{1}{3} = y^2$ oder $\frac{2a^2}{3} = y^2$ und $y = a . \sqrt{\frac{2}{3}}$. Aber Grundfläche mal Höhe getheilt durch 3 giebt den Kubikinhalt; also $K = \frac{1}{3} . \frac{a^2}{4} . \sqrt{3} : a . \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} . \frac{a^2}{4} . \sqrt{3} . \frac{2}{3} = \frac{a^3}{12} . \sqrt{2}$.

Das Tetraeder läßt sich aber auch, wie bei dessen Entstehung gezeigt wurde, in 4 kongruente Pyramiden zerlegen, welche eines der gleichseitigen Dreiecke zur Grundfläche und den

Seitenhalbmesser ϱ der einzuschreibenden Kugel zur Höhe haben. Eine solche Pyramide ist $= \frac{\varrho}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \varrho \cdot \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3}$. Es kömmt nun darauf an, ϱ im Werthe der Kante a zu bestimmen, um den Kubikinhalt des Tetraeders im Werthe des Würfels der Kante zu erfahren. Ist die Seite eines gleichseitigen Dreiecks $= a$, so ist nach dem Früheren die Höhe h desselben $= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, der Seitenhalbmesser $= \frac{1}{3}\, h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ und der Eckenhalbmesser $= \frac{2}{3}\, h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = a \sqrt{\frac{1}{3}}$, weil derselbe 2 mal so groß ist, als der Seitenhalbmesser. In beistehender Figur ist ab $= a$, ad $= \frac{1}{2}\, a$; o ist der sogenannte Schwerpunkt, so daß do $= \frac{1}{2}$ oc $= \frac{1}{3}$ dc ist, wie sich leicht aus dem doppelten Werthe für den Inhalt ergiebt. Denn Dreieck abc $= 3 \frac{ab}{2} \cdot do = \frac{ab}{2} \cdot dc$, daher $3do = dc$ oder $do = \frac{1}{3}\, dc$. Die Senkrechte, welche man im Tetraeder von der Spitze auf eine Fläche fällen kann, besteht 1) aus R, dem Radius der zu umschreibenden und 2) aus r, dem Radius der einzuschreibenden Kugel. Aber R + r und der Eckenhalbmesser $\frac{2}{3}$ h sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a ist. Daher



$$(R + r)^2 + (\tfrac{2}{3}\, h)^2 = a^2 \text{ und } R^2 - r^2 = (\tfrac{2}{3}\, h)^2.$$

Daraus ergiebt sich

$$(R + r)^2 + (a \sqrt{\tfrac{1}{3}})^2 = a^2$$

$$(R + r)^2 + \tfrac{1}{3}\, a^2 \quad = a^2$$

$$R + r = a \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ und } R^2 - r^2 = \tfrac{1}{3}\, a^2.$$

$$\frac{(R + r) \cdot (R + r)}{(R + r) \cdot (R - r)} = \frac{R + r}{R - r} = \frac{\frac{2}{3}\, a^2}{\frac{1}{3}\, a^2} = 2, \text{ oder auch}$$

$$R - r = \tfrac{1}{2}\, (R + r) = \tfrac{1}{2}\, a \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Da man nun Summe und Unterschied von R + r und R — r kennt, so ist halbe Summe + halber Unterschied oder hier halbe Summe + $\frac{1}{4}$ Summe = R; $R = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\, a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, was sich auch umformen läßt zu $\frac{1}{4}\, a \sqrt{6}$ oder $\frac{1}{2}\, a \sqrt{\frac{3}{2}}$ und halbe Summe weniger halbem Unterschied oder weniger $\frac{1}{4}$ Summe giebt den Werth für r, also r =

$\frac{a}{2} . \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{a}{4} . \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}\, a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}\, a \sqrt{6} = \frac{1}{2}\, a \sqrt{\frac{1}{6}}$. Der Eckenhalbmesser R des Tetraeders ist demnach dreimal so groß, als der Seitenhalbmesser r. Der Kubikinhalt einer Pyramide ist = Grundfläche mal $\frac{1}{3}$ Höhe $= \frac{a^2}{4} . \sqrt{3}$ mal $\frac{1}{12}\, a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{48} . \sqrt{2}$; daher der Kubikinhalt des Tetraeders $= 4 . \frac{a^3}{48} . \sqrt{2} = \frac{a^3}{12} . \sqrt{2}$ oder $\frac{a^3}{6} . \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Das *Oktaeder* kann in zwei kongruente vierseitige Pyramiden zerlegt werden, welche a^2 zur Grundfläche haben und deren Höhe die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Hypoteuuse a und dessen andere Kathete der Radius des um das Quadrat der Grundfläche zu beschreibenden Kreises ist. Bedeutet h die Höhe, so ist $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$. Denn der Radius des um das Quadrat der Grundfläche zu beschreibenden Kreises $= \frac{d}{2} = \frac{a}{2} . \sqrt{2}$. Also $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} . 2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$, also $h = a . \sqrt{\frac{1}{2}}$. Kubikinhalt einer Pyramide $= a^2 . \frac{a}{3} . \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a^3}{3} . \sqrt{\frac{1}{2}}$; *Kubikinhalt des Oktaeders* $= \frac{2a^3}{3} . \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a^3}{3} \sqrt{2}$. Nennt man r oder ϱ den Radius der in das Oktaeder zu beschreibenden Kugel oder den Seitenhalbmesser des Oktaeders, so ist $\frac{8\varrho}{3} . \frac{a^2}{4} . \sqrt{3} = \frac{a^3}{3} . \sqrt{2}$ oder, wenn man ϱ bestimmt, $\varrho = \frac{a}{6} . \sqrt{6}$. Multiplicirt mau die ganze Oberfläche des Oktaeders (S. 272.) mit $\frac{\varrho}{3}$, so hat man den Kubikinhalt $\frac{a^3}{3} . \sqrt{2}$. Man kann aber auch R und r (die Radien der um und in das Oktaeder zu beschreibenden Kugel) direkt finden. Denn jede Kante schließt mit den beiden zu ihren Endpunkten gehenden Eckenhalbmessern ein rechtwinkliges Dreieck ein, bei welchem die Kante die Hypotenuse ist; daher $2\, R^2 = a^2$, $R^2 = \frac{a^2}{2}$, $R = a \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $\frac{1}{2}\, a \sqrt{2}$. Es ist aber $r^2 + (\frac{2}{3}\, h)^2 = R^2$, wobei h die Höhe eines der 3 Dreiecke bedeutet, welche eine Seitenfläche bilden, wobei also $h = \frac{a}{2} . \sqrt{3}$ ist; daher $r^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4}{9} . \frac{3}{4}\, a^2 = \frac{1}{6} . a^2$; $r = \frac{1}{6}\, a \sqrt{6}$.

Beim *Ikosaeder* findet man $R = \frac{a}{2} . \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ und $r = \frac{a}{4} . \frac{(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{3}}$.

Denn die Linie, welche zwei entgegengesetzte Eckpunkte verbindet, ist immer $= 2\,R$; verbindet man diese Punkte mit irgend einem dritten Eckpunkte, so entsteht allemal ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Linie $= 2\,R$ die Hypotenuse bildet; die Senkrechte ϱ von jenem dritten Eckpunkte auf die Hypotenuse ist auch der Eckenhalbmesser eines regelmäßigen ebenen Fünfecks mit der Seite a.

Ist der kürzere Abschnitt der Hypotenuse $= m$, so ist $m^2 = a^2 - \varrho^2$ und $m = \sqrt{a^2 - \varrho^2}$; $2\,R . m = a^2$ (S. 273.). Also $R = \frac{a^2}{2m}$. Aber $\varrho = a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$, folglich $m =$

$$\sqrt{a^2 - a^2\,\frac{(5 + \sqrt{5})}{10}} = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \text{ und}$$

$$R = \frac{\frac{a^2}{2a}}{\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}} = \frac{\frac{a}{2}.\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.\sqrt{5 + \sqrt{5}}} =$$

$$\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{(5 + \sqrt{5})}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2}.\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Ebenso $r^2 = R^2 - (\tfrac{2}{3}\,h)^2 = \frac{a^2}{4}\,\frac{(5 + \sqrt{5})}{2} - \tfrac{1}{3}\,a^2 = a^2\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3}\right) = \frac{a^2}{4}\,\frac{(7 + 3\sqrt{5})}{6}$.

$r = \frac{a}{2}.\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$. Ist $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, so ist $7 + 3\sqrt{5} = x + 2\sqrt{xy} + y$; setzt man $x + y = 7$ und $2\sqrt{xy} = 3\sqrt{5}$, so ist $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 = 4$ und $x - y = 2$. Es ist also $x = \frac{9}{2}$ und $y = \frac{5}{2}$, also $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; daher wenn dieser Werth in die Gleichung für r gebracht wird

$r = \frac{\frac{a}{2}.\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{6}} = \frac{a}{2}.\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{a}{4}.\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$. Multiplicirt man nun die Oberfläche des Ikosaeders $5a^2\sqrt{3}$ mit dem dritten Theile von r, so ist

$$K = \tfrac{1}{3}.\tfrac{a}{4}.5a^2.\sqrt{3}.\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \tfrac{5}{12}\,a^3\,(3 + \sqrt{5}).$$

Beim Dodekaeder ergiebt sich $R = \frac{a}{4}.\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{5})$ und $r = \frac{a}{4}.\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$, denn der Eckenhalbmesser ϱ des

regelmäßigen Fünfecks des Dodekaeders ist $= a . \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$; jede Diagonale d dieser Fünfecke $= \frac{a}{2} (1 + \sqrt{5})$. Durch den Mittelpunkt des Dodekaeders und die Halbirungspunkte zweier zusammenstoßenden Kanten geht eine Ebene, welche ein regelmäßiges Zehneck ist mit einer Seite $= \frac{1}{2}$ der Diagonale der regelmäßigen Fünfecke und dessen Eckenhalbmesser $\varrho' = \frac{a}{4}.(1 + \sqrt{5})$ ist. Dieser Halbmesser ϱ' halbirt die Kante a und steht auf derselben senkrecht. Daher $\varrho'^2 + \frac{a^2}{4} = R^2$ und $R = \sqrt{\varrho'^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} . \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}$, umgewandelt $= \frac{a}{4} . \sqrt{3 + \sqrt{15}} = \frac{a}{4} . \sqrt{3} . (1 + \sqrt{5})$. Es ist aber $r^2 = R^2 - \varrho^2$; daraus $r = \frac{a}{4} . \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$.

$$K = \frac{a}{12} . \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}} . 3a^2 . \sqrt{5 . (5 + 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{a^3}{4} . \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}} . \sqrt{5 . (5 + 2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{a^3}{4} . \sqrt{470 + 210\sqrt{5}}.$$

Zur bequemeren Formulirung sei

$\sqrt{470 + 210\sqrt{5}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, so ist

$470 + 210\sqrt{5} = (x + y) + 2\sqrt{xy}$.

$x + y = 470,\ 2\sqrt{xy} = 210\sqrt{5}$

$x^2 + 2xy + y^2 = 470^2 = 220900$ und $4xy = 210^2 . 5 = 220500$; daher ist $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 220900 - 220500 = 400$ und $x - y = 20$. Aus $x + y$ und $x - y$ ergiebt sich $x = \frac{490}{2} = 245$ und $y = \frac{450}{2} = 225$. Demnach $\sqrt{x} = 7\sqrt{5}$ und $\sqrt{y} = 15$, daher

$\sqrt{470 + 210\sqrt{5}} = 15 + 7\sqrt{5}$ und

$K = \frac{1}{4} a^3 (15 + 7\sqrt{5})$.

Alle regelmäßigen Körper von gleicher Seitenflächenzahl sind ähnlich; die Kanten, Ecken- und Seitenhalbmesser stehen zu einander in demselben Verhältnisse. Daher verhalten sich die Oberflächen zweier ähnlichen regelmäßigen Körper, wie die Quadrate, die Kubikinhalte wie die Würfel der Kanten, Ecken- oder Seitenhalbmesser zu einander. Dasselbe findet überhaupt bei allen ähnlichen Polyedern Statt, daß die Oberflächen im Verhältniß der Quadrate der Kanten und die Kubikinhalte im Verhältniß der Würfel der Kanten stehen.

Zur Berechnung des Kubikinhaltes der unendlich verschieden gestalteten unregelmäßigen Polyeder muß man sich nicht selten eines anderen Verfahrens bedienen, als des rein geometrischen. So könnte man den Körper in ein mit Wasser ganz angefülltes Gefäß vollständig eintauchen und das durch denselben verdrängte Wasser auffangen und messen. Hätte man zu diesem Zwecke ein Hohlmaß, z. B. ein Nösel von irgendvielen Kubikzollen $= mk''$, und füllte die verdrängte Wassermasse dasselbe n mal, so betrüge der Kubikinhalt $n.mk''$. Da aber bei dieser Weise ein Theil des verdrängten Wassers verloren gehen könnte, so wäre es zweckmäßig den bekannten physikalischen Satz anzuwenden „daß ein jeder Körper, der unter Wasser getaucht ist, an seinem Gewichte soviel verliert, als eine Wassermenge von gleichem Rauminhalte schwer ist". Verliert also bespielsweise der Körper im Wasser $1\frac{1}{2}$ Pfd. an seinem Gewichte, was man leicht mit einer dazu eingerichteten Wage prüfen kann, an deren einem Arme der Körper hängt, während an dem andern Arme die tarirte Wagschale sich befindet, so wiegt eine ebenso große Wassermasse 48 Loth; aber $1\frac{2}{9}$ Loth lassen auf einen Kubikzoll schließen, also 48 Loth auf so viele Kubikzolle, als $1\frac{2}{9}$ in 48 enthalten ist, also $39\frac{3}{11}\,k''$. Beträgt der Gewichtsverlust des Körpers p Loth, so ist der Kubikinhalt $\frac{p}{1\frac{2}{9}}\,k''$, oder bei p Pfd. $K = \frac{p}{66}\,k'$. Einen hohlen Raum füllt man leicht mit Wasser oder Sand aus und mißt die Füllung mit dem nach dem Kubikinhalte bestimmten Hohlmaße. Bezeichnet V den Inhalt des Hohlmaßes, V′ die Füllungsmasse, so ist $\frac{V'}{V}$ der Kubikinhalt. Der Schwerpunkt der regelmäßigen Körper liegt in ihrem centrischen Punkte.

Ist $D = 2\,R$ der Durchmesser der um die 5 regelmäßigen Körper zu beschreibenden Kugel, so hat man für die Oberflächen und Kubikinhalte

I. Tetraeder.

$$O = \tfrac{2}{3}\,D^2.\sqrt{3} = 1{,}15470053..D^2.$$
$$K = \tfrac{1}{27}\,D^3.\sqrt{3} = 0{,}06415001..D^3.$$

II. Oktaeder.

$$O = D^2.\sqrt{3} = 1{,}732050807..D^2.$$
$$K = \tfrac{1}{6}.D^3 = 0{,}166666666..D^3.$$

III. Hexaeder.

$$O = 2\ D^2 = 2{,}00000000\,..\,D^2.$$
$$K = \tfrac{1}{9}\ D^3.\sqrt{3} = 0{,}1924501\ ..\,D^3.$$

IV. Dodekaeder.

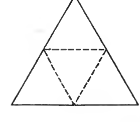
$$O = D^2.\sqrt{(\tfrac{25}{2} - \tfrac{5}{2}\sqrt{5})} = 2{,}628652\ ..\,D^2.$$
$$K = \tfrac{D^3}{36}.\sqrt{(90 + 30\sqrt{5})} = 0{,}3481455\,..\,D^3.$$

V. Ikosaeder.

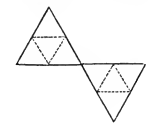
$$O = 20\ D^2.\sqrt{(\tfrac{9}{160} - \tfrac{3}{160}.\sqrt{5})} = 2{,}385288\ ..\,D^2.$$
$$K = \tfrac{D^3}{12}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 0{,}317018838\,..\,D^3.$$

Netze der 5 regelmäßigen Polyeder.

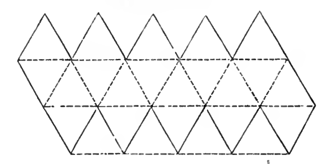
1. Das Netz des Tetraeders.



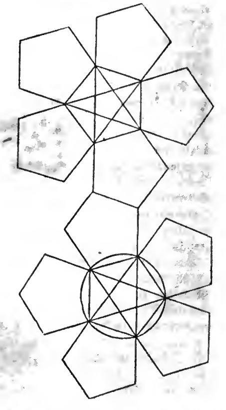
2. Das Netz des Oktaeders.



3. Netz des Ikosaeders.



4. Das Netz des Dodekaeders.



5. Das Netz des Hexaeders ist früher schon konstruirt worden.

VII. Die Kugel.

Dreht sich ein Halbkreis einmal ganz um seinen Durchmesser oder ein ganzer Kreis einmal halb um seinen Durchmesser, so entsteht ein nach drei Richtungen hin ausgedehnter Körperraum, die Kugel. Legt man dieselbe auf eine ebene Fläche, so hat sie mit der Ebene nur einen Punkt gemein; bewegt sie sich auf dem ebenen Tische nach keiner Richtung hin, so liegt die Tischplatte wagerecht. In keinerlei Richtung kann man auf der Oberfläche der Kugel eine Gerade ziehen; die Oberfläche der Kugel ist also allseitig gekrümmt und hat eine Gerade, auf die Oberfläche der Kugel gelegt, mit derselben nur einen Punkt gemein. Denn hätte dieselbe noch einen Punkt mit der Oberfläche der Kugel gemein, so hätte ja die Gerade zwei oder mehrere Punkte, welche nicht in einer und derselben Richtung lägen, was unmöglich ist. Alle Linien, welche in der Oberfläche der Kugel liegen, müssen also krumme Linien sein. Es kann aber auch eine Kugel noch auf mancherlei andere Weise entstehen. So kann man sich von einem Punkte im Raume unendlich viele gerade Linien oder Strahlen auslaufend vorstellen, alle gleichlang, dann ist die Kugel der durch dieselben durchstrahlte, durch die Endpunkte der Strahlen, welche alle durch eine Fläche eingeschlossen und verbunden zu denken sind, begrenzte Raum; ebenso entsteht die Kugel, wenn sich eine Kreisfläche senkrecht einmal nach oben und nach unten bewegt und dabei nach einem bestimmten Gesetze in lückenloser Folge sich verkleinernd zu einem Punkte verschwindet. Aus der Betrachtung und Berücksichtigung der Entstehungsweise geht schon hervor, daß die Kugeloberfläche eine einzige gekrümmte ist, so daß jeder Punkt derselben vom Mittelpunkte gleichweit absteht. Bei einer ebenen Fläche kann ein Punkt nicht von allen Punkten

derselben gleichweit abstehen. Die Senkrechte von dem Punkte zur ebenen Fläche ist die kürzeste Linie, alle andern, deren jede einen Kreisumfang bilden kann, welcher die Grundfläche eines Kegels begrenzt, sind größer. Die Gerade, um welche ein Punkt der Oberfläche vom Mittelpunkte absteht, heißt Halbmesser oder Radius; die zweimal so große Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und mit ihren Endpunkten in der Oberfläche liegt, heißt Durchmesser oder Diameter. Bei einer und derselben Kugel sind alle Halbmesser und alle Durchmesser gleich. Der Durchmesser oder Halbmesser ist überhaupt das einzig wesentliche Bestimmungsstück der Kugel; Kugeln von gleichem Halbmesser oder Durchmesser sind an Größe und Gestalt gleich, die eine würde den leeren Raum der andern vollkommen ausfüllen; sie sind ganz und gar nach einem und demselben Bildungsgesetze entstanden. Lage und Größe einer Kugel sind bestimmt, wenn man ihren Mittelpunkt und Halbmesser kennt. Den Durchmesser und Halbmesser kann man aber leicht finden, denn man kann die Kugel entweder in einen Schraubstock einklemmen und die Entfernung der beiden parallelen, einklemmenden Flächen messen oder aus dem gemessenen größten Umfange durch Theilung mit $3\frac{1}{7}$ den gesuchten Durchmesser finden. Ein Durchmesser, um welchen die Kugel gedreht wird, so daß nur alle in demselben liegenden Punkte ruhen, ist eine Achse der Kugel. Da es unendlich viele Durchmesser giebt, so giebt es auch unendlich viele Achsen. Die Endpunkte einer Achse heißen Pole; z. B. bei einer magnetischen Kugel, oder wenn die Erde einmal als Kugel vorausgesetzt wird, pflegt man den Durchmesser der Erde, welcher von Norden nach Süden gerichtet ist und um welchen sich die Erde binnen 24 Stunden dreht, die Erdachse zu nennen, ihre Endpunkte Nord- und Südpol. Ein auf der Oberfläche der Kugel gezogener Kreis theilt dieselbe in zwei Theile; die beiden Theile können entweder gleich oder ungleich sein, dann heißt ein solcher Kreis ein größter oder ein kleiner. Legt man durch den Kreis eine Ebene, so wird die Kugel, wenn der Schnitt durch einen größten Kreis geht, halbirt; im Gegentheile in zwei ungleiche Theile getheilt. Die größten Kreise sind alle gleich, aber die kleinen Kreise können an Größe verschieden sein. Die beiden Kugelstücke, in welche eine Kugel durch eine Ebene zerfällt, welche durch einen

kleinen Kreis gelegt wird, heißen Kugelkappen, Kugelabschnitte, Kugelsegmente, Kalotten; das Stück einer Kugel, welches zwischen zwei Kreisebenen liegt, die durch zwei parallele Kreise gelegt sind, heißt Kugelschicht oder Kugelzone, Kugelgürtel. Verbindet man alle Punkte des Begrenzungskreises eines Kugelabschnitts durch Radien mit dem Mittelpunkte oder denkt man sich über der Grundfläche eines Kugelabschnitts noch einen Kegel, welcher mit der Spitze im Mittelpunkte liegt, so heißt der Körperraum, welchen der bezeichnete Kugelabschnitt mit seinem entsprechenden Kegel einnimmt, ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor oder auch Kugelkegel, weil seine Grundfläche nicht eine ebene Fläche ist, sondern ein Theil der gekrümmten Kugeloberfläche.

Legt man durch einen kleinen oder größten Kreis eine Ebene, so zerfällt die Kugel in zwei ungleiche oder gleiche Theile. Errichtet man im Mittelpunkte eines größten Kreises eine Senkrechte so groß als der Halbmesser, so heißt der Endpunkt derselben Pol in Bezug auf den größten Kreis. Da es unendlich viele größte Kreise giebt, so giebt es auch unendlich viele Pole. Betrachtet man die Erde als eine magnetische Kugel, so unterscheidet man außer Nord- und Südpol noch die beiden magnetischen Pole, welche zwar in der Nähe der irdischen Pole liegen, aber nicht mit denselben zusammenfallen.

Wenn sich zwei größte Kreise schneiden, so halbiren sich dieselben; das zwischen denselben liegende Stück der Oberfläche der Kugel ist ein Kugelzweieck. Man kann sich aber auch 3, 4, 5 größte Kreise schneiden lassen oder 3, 4, 5 ꝛc. Punkte auf der Oberfläche der Kugel durch Bogen von Kreisen verbunden denken, so erhält man das Kugeldreieck, Kugelviereck, Kugelfünfeck ꝛc.

Im Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder, also in allen regelmäßigen Körpern giebt es einen Punkt, welcher 1) von den Ecken, 2) von den Seitenflächen gleichweit absteht, d. h. um die Senkrechte, welche man vom Mittelpunkte auf die Seitenflächen fällen kann. Es läßt sich also immer eine Kugel legen, in deren Oberfläche die 4, 8 ꝛc. Ecken der regelmäßigen Körper liegen und eine andere, welche so beschaffen ist, daß sie in 4, 6 ꝛc. Punkten, welche die Mittelpunkte der Flächen sind,

die regelmäßigen Körper berührt. Ein- und umschriebene Kugel, ein- und umschriebene Körper. Ein Punkt liegt außerhalb der Kugel, in der Kugeloberfläche, in der Kugel selbst zwischen Oberfläche und Mittelpunkt oder im Mittelpunkte, wenn die Gerade vom Mittelpunkte nach demselben $>$, $=$, $<$ als der Halbmesser oder $= 0$ ist.

Setzt man eine Gerade in Beziehung zur Kugel, so kann dieselbe außerhalb der Kugel liegen, die Kugel in einem Punkte berühren oder durch dieselbe hindurch gehen; im letztern Falle hat dieselbe zwei Punkte mit der Oberfläche gemein. Ein Gerade liegt dann außerhalb der Kugel, wenn die Senkrechte vom Mittelpunkte der Kugel auf dieselbe gefällt, größer ist als der Halbmesser. Eine Linie erkennt man als Berührungslinie oder Tangente daran, daß der nach dem gemeinsamen Punkte gezogene Halbmesser senkrecht auf der fraglichen Linie steht.

Ist endlich die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Gerade kleiner als der Halbmesser, so geht die Linie durch die Kugel hindurch, hat mit der Oberfläche 2, mit der Kugel selbst unendlich viele Punkte gemein. Geht die Gerade oder Kugelsehne durch den Mittelpunkt, so wird sie zum Kugeldurchmesser; liegt ein Theil der Geraden außerhalb, so hat man die Kugelsekante.

Die Senkrechte, welche man vom Kugelmittelpunkte nach einer Tangente fällt, trifft den Tangenzpunkt. Dreht man die Senkrechte mit der Tangente um den Radius, so erhält man eine Tangentialebene, in welcher unendlich viele Tangenten an dem einen Punkt der Kugel liegen. Ebenso kann man von einem Punkte außerhalb der Kugel unendlich viele und gleich große Tangenten an die Kugel legen. Die Tangenzpunkte liegen in einem Kugelkreise, welcher die Grundfläche des geraden Kegels begrenzt, dessen Spitze in dem gegebenen Punkte liegt.

Eine Ebene in Beziehung zur Kugel gesetzt, kann die Kugel berühren oder einen einzigen Punkt mit der Kugeloberfläche gemein haben; hätte sie mehr Punkte mit derselben gemein, so müßte entweder die Ebene eine gekrümmte oder die Kugeloberfläche eine ebene Fläche sein. Zieht man vom Mittelpunkte der Kugel einen Halbmesser nach dem Berührungspunkte der Ebene, so muß derselbe auf der Ebene senkrecht stehen.

Es ergiebt sich ferner, daß alle Geraden einer Berührungs-

ebene, welche durch den Berührungspunkt gehen, selbst Berührungslinien oder Tangenten sind; denn alle Punkte außer dem Berührungspunkte liegen weiter vom Mittelpunkte ab, als der Halbmesser groß ist. Hat man eine Tangente und dreht dieselbe einmal um, so entsteht die Tangenzebene; so oft man die Drehung wiederholt, entsteht eine mit der vorigen in allen Punkten zusammenfallende Berührungsebene. Daher ist an einem Punkt einer Kugel eine einzige Berührungsebene möglich. Daraus folgt weiter, daß eine Ebene, welche mit der Kugel einen Punkt gemein hat, ohne Tangenzebene zu sein, die Kugel durchschneiden muß. Da ferner von einem Punkte außerhalb der Kugel an dieselbe unzählige Berührungslinien möglich sind, so müssen auch von demselben Punkte aus unzählige Berührungsebenen möglich sein.

Liegt eine Gerade außerhalb einer Kugel, so kann man durch dieselbe nur zwei Tangenzebenen an die Kugel legen. Denn legt man durch die Gerade und den Kugelmittelpunkt eine Ebene und dreht diese Ebene rechts oder links, so wird die Senkrechte auf die Ebene vom Mittelpunkte aus zweimal dem Halbmesser gleich und die Ebene zur Tangenzebene. Eine solche zu legen durch eine außerhalb der Kugel befindliche Gerade, muß man vom Mittelpunkte auf dieselbe eine Senkrechte fällen, aus dem Fußpunkte dieser Senkrechten eine Ebene auf der gegebenen Geraden senkrecht errichten, sodann in dieser Ebene mit dem Perpendikel als Hypotenuse und mit dem Halbmesser als der einen Kathete ein rechtwinkliges Dreieck konstruiren und dann durch die andere Kathete und die gegebene Gerade eine Ebene legen. Diese muß die Tangentialebene sein.

Legt man aber eine Ebene durch einen Punkt im Innern der Kugel so, daß ihre Entfernung vom Mittelpunkte oder die Senkrechte vom Mittelpunkte auf dieselbe $<$ als der Halbmesser ist, so schneidet dieselbe die Oberfläche in einem Kreise und theilt den Kubikinhalt in zwei Theile, welche gleich sind, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Die Ebene schneidet dann die Kugeloberfläche in einem größten Kreise. Der Schnitt kann aber auch durch einen andern, als den Mittelpunkt gehen, dann schneidet die Ebene die Kugeloberfläche in einem kleinen Kreise. Der Schnitt ist dann die Grundfläche eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt und dessen

Seitenlinien man erhält, wenn man alle Punkte des Kreises mit dem Mittelpunkte der Kugel durch Gerade verbindet.

Daß jeder ebene Durchschnitt einer Kugel ein Kreis, Kugelkreis ist, ergiebt sich leicht. Denn fällt man auf die nicht durch den Mittelpunkt gehende Durchschnittsebene vom Mittelpunkte eine Senkrechte und zieht man von dem Mittelpunkte nach den Durchschnittspunkten der Ebene und der Kugeloberfläche Gerade, so sind es Radien, welche die Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken werden, welche aus der Hypotenuse, der einen Kathete und dem rechten Winkel kongruent sein müssen — daher sind alle durch den Fußpunkt des Perpendikels gehende Gerade gleich groß und die Durchschnittslinie der Ebene mit der Kugel ist ein Kreis. Das Perpendikel vom Kugelmittelpunkte auf diesen Kreis trifft dessen Mittelpunkt und umgekehrt geht die im Mittelpunkte des Schneidekreises oder Kugelkreises errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt der Kugel und muß die Verbindungslinie des Kugelmittelpunktes mit dem Mittelpunkte des Kugelkreises auf der Ebene des Kugelkreises senkrecht stehen und ist also das Maß des Abstandes des Kugelmittelpunkts von der Ebene des Kugelkreises. Geht eine Schneideebene durch den Kugelmittelpunkt, so ist ihre Entfernung von demselben $= o$; je weiter sich dieselbe vom Mittelpunkte entfernt, desto größer werden die Senkrechten und weil in dem rechtwinkligen Dreieck, welches aus der Senkrechten, als der einen Kathete, aus dem Radius der Kugel als Hypotenuse und aus dem Radius des Kugelkreises als der andern besteht, die Hypotenuse R konstant ist, p das Perpendikel wächst, so muß r oder der Radius des Kugelkreises immer kleiner werden. Denn $r = \sqrt{R^2 - p^2}$; ist $p = o$, so wird $r = R$; ist $p = R$, so wird $r = o$. Werden aber die Radien der Kugelkreise mit ihrer Entfernung vom Mittelpunkte kleiner, nach dem Mittelpunkte hin größer, so müssen auch die Kreise selbst kleiner oder größer werden. Es ergiebt sich weiter aus den schon angestellten Betrachtungen, daß Kugelkreise, welche gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, einander gleich sind und daß gleiche Kugelkreise gleichweit vom Mittelpunkte abstehen; dieselben werden größer, wenn der Abstand vom Mittelpunkte kleiner wird; sie erreichen ihr Maximum und werden größte durch den Kugelmittelpunkt gehende Kreise, wenn die Entfernung $= o$ wird; sie erreichen

ihr Minimum oder verschwinden, wenn die Entfernung dem Radius gleich wird.

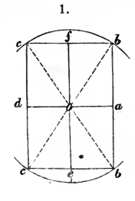
Größte Kreise giebt es in einer Kugel unzählig viele; alle gehen durch den Mittelpunkt der Kugel; es muß also die Durchschnittslinie zweier größten Kreise auch durch den Mittelpunkt gehen, Kugeldurchmesser sein und die größten Kreise halbiren. Alle Kugelkreise, welche auf einem solchen Durchmesser senkrecht stehen, haben den Durchmesser zur gemeinschaftlichen Achse, wie die Meridiane den Durchmesser zwischen Nord- und Südpol. Durch einen größten Kugelkreis ist die Größe und Lage der Kugel bestimmt, denn man kennt dann die Lage des Mittelpunkts derselben und ihren Halbmesser. Aber ein und derselbe kleine Kugelkreis kann unendlich vielen an Größe verschiedenen Kugeln angehören; der geometrische Ort der Mittelpunkte liegt in der Senkrechten, welche im Mittelpunkte der Kreisfläche des kleinen Kugelkreises errichtet werden kann. Ist diese Senkrechte Null, so ist der Mittelpunkt des Kugelkreises zugleich Mittelpunkt der Kugel; das zum kleinen Kugelkreise gehörige Kugelsegment wird zur Halbkugel; der Radius des Kugelkreises wird Radius der Kugel. Wächst das Perpendikel, so wächst auch der Radius der Kugel, zu welcher der Kugelkreis gehören kann.

Größte Kreise müssen sich stets schneiden und halbiren; zwei andere Kreise aber, zwei kleine Kugelkreise oder ein kleiner und ein größter können zu einander parallel sein oder auch sich schneiden. Die parallelen Kreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole; der Durchmesser der Kugel, welcher durch den einen Kugelkreis geht, steht sowohl auf diesem, als auch auf dem andern senkrecht. Umgekehrt sind Kugelkreise mit gemeinschaftlicher Achse zu einander parallel; alle parallelen Kugelkreise setzen eine gemeinschaftliche senkrechte Achse voraus; jeder durch die Achse gelegte Meridiankreis muß auf den parallelen Kreisen senkrecht stehen. Der Meridian halbirt den Äquator, welcher der größte von Osten nach Westen gehende Parallelkreis ist; legt man noch durch den Ost- und Westpunkt einen Meridian, so liegt vom Ost- zum Südpunkte hin ein Viertelkreis. Die Ebenen der beiden Meridiane schneiden sich unter einem rechten Winkel; man kann dieselben aber um ihre gemeinschaftliche Achse so drehen, daß sie sich unter jedem beliebigen Winkel zwischen 0° und 180° schneiden können. Die Meridianbogen zwischen dem Pole und Parallelkreise sind

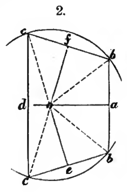
gleich; ebenso die Bogen zwischen 2 Parallelkreisen; der Pol steht vom Äquator um einen Viertelkreis oder Quadranten ab. Ein Kreis, welcher vom Pole aus von den Meridianen ungleiche Bögen abschneidet, kann kein paralleler, zur Achse senkrechter Kreis sein. Ebenso müssen nicht parallele Kugelkreise eine verschiedene Achse haben; die beiden Achsen schneiden sich im Mittelpunkte der Kugel; Kugelkreise, deren Achsen sich schneiden, können nicht parallel sein. Zwei nicht parallele Kugelkreise schneiden sich in 2 Punkten der Kugeloberfläche; in drei Punkten können sich überhaupt zwei Kreise nicht schneiden, ohne ganz in einander. zu fallen. Errichtet man die zu den sich schneidenden Kreisen gehörigen Achsen, so erfährt man den Mittelpunkt der Kugel und den Halbmesser; jeder der beiden Kugelkreise ist durch drei Punkte bestimmt und da zwei gemeinschaftlich sind, so muß die Kugelfläche durch 4 Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, bestimmt sein; mit der Oberfläche aber hängt die Größe des Halbmessers und die Lage des Mittelpunktes zusammen.

Wie die Kugel durch 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte, durch den Halbmesser oder Durchmesser bestimmt ist, so sind einzelne Theile durch entsprechende Stücke bestimmt. So liegt eine Kugelzone nach Inhalt und Oberfläche fest, wenn man die Radien der beiden parallelen, die Kugelzone begrenzenden Kreisflächen und die Höhe derselben kennt. Denn der Mittelpunkt kann entweder innerhalb oder außerhalb der Kugelzone liegen; für den ersten Fall können die beiden parallelen Ebenen gleiche oder ungleiche Radien haben, für den zweiten müssen sie ungleiche Radien haben.

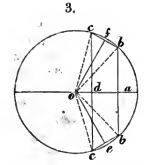
1.



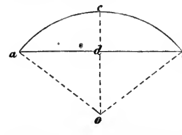
2.



3.



Aus der näheren Betrachtung und Vergleichung der 3 Figuren sieht man, daß die Perpendikel aus den Halbirungspunkten der cb sich im Mittelpunkte o schneiden und oc = ob ist, weil rechtwinklige Dreiecke an Größe und Gestalt gleich sind, wenn sie in den beiden Katheten übereinstimmen. Man kann demnach immer den Radius der Kugel finden, zu welcher die Kugelzone gehört. Eine durch die Radien der beiden parallelen Kreisflächen und durch die Höhe bestimmte Kugelzone kann also nur zu einer Kugel von einem und demselben Halbmesser gehören und solche Kugelzonen in einer und derselben Kugel, welche in den genannten Bestandtheilen übereinstimmen, müssen kongruent sein, weil sie ganz und gar nach demselben Bildungsgesetze erzeugt werden. Man findet den erzeugenden Bogen cb, welcher nach demselben Gesetze gedreht, dieselbe Kugelzonenfläche beschreibt, wie die erzeugende Ebene dcba die Kugelzonenkörper beschreibt.



Wenn von einem Kugelabschnitt der Halbmesser db, also auch die Grundfläche des Kreisabschnitts gegeben ist und die Höhe dc oder die Entfernung des Mittelpunkts der Grundfläche vom Pole, so kann man den Radius der Kugel finden, weil $db\square = cd.(2\,R - cd)$, oder $cd : db = db : 2\,R - cd$ ist; hat man den Radius co gefunden und auf der verlängerten cd abgetragen und den Mittelpunkt o erhalten, so findet man den erzeugenden Bogen acb und das Flächenstück acbd, welche bei der Umdrehung der db um die dc Oberfläche und Inhalt des Kugelabschnitts erzeugen.

Ebenso ist ein Kugelausschnitt bestimmt, wenn man den Kugelhalbmesser $ao = ob$ und den Centriwinkel aob kennt; man findet den erzeugenden Bogen acb; durch Umdrehung dieses

Bogens und des Kreisausschnitts oacb entstehen Oberfläche und Kubikinhalt des Kugelsektors. Der **Kugelkeil**, das **Kugelzweieck** ist bestimmt, wenn man den Kugelhalbmesser und die Größe des fraglichen Flächenwinkels weiß; so oft derselbe in 4 Rechten, ebenso oft ist seine Fläche (konvexe) und sein Kubikinhalt in der Oberfläche und dem Kubikinhalte der Kugel enthalten. Kugelkeile, Kugelzweiecke mit gleichen Flächenwinkeln sind gleich und ungleiche Kugelkeile und Kugelzweiecke, stehen in demselben Verhältnisse, wie ihre Flächenwinkel. Haben sich drei, vier oder mehr größte Kreise auf der Oberfläche der Kugel geschnitten, so daß das Kugelbreieck, Kugelviereck ꝛc. Kugelvieleck entstanden ist und denkt man sich zugleich durch die Seiten des Kugelvielecks die Ebenen seiner größten Kreise gelegt, welche sich alle im Mittelpunkte der Kugel schneiden, so entsteht die 3, 4 ꝛc. vielseitige **Kugelpyramide**. Dieselbe hat einen Theil der Kugeloberfläche zur Grundfläche, den Radius der Kugel zur Höhe und ebenso viele gleichschenklige Dreiecke mit einer größten Kreisbogenlinie zur Grundlinie, als das Kugelvieleck Seiten hat. Die Bogen messen die gegenüberliegenden Winkel und man erhält eine Ecke, welche schon früher nach ihren Bestimmungsstücken erörtert worden ist; nur muß man hier den Kugelhalbmesser als neues, nothwendiges Bestimmungsstück fordern.

Werden zwei Kugeln zu einander in Beziehung gesetzt, so denke man die Mittelpunkte derselben durch eine Gerade verbunden, die **Mittelpunktslinie** oder **Centrale**; bewegt sich die eine Kugel auf dieser Centrale fort, so liegen beide Kugeln nach Inhalt und Oberfläche so lange auseinander, als die Centrale größer ist, als die Summe der beiden Radien; wird die Centrale der Summe der beiden Radien gleich, so berühren sich die Kugeln; wird die Centrale kleiner als die Summe der beiden Radien, so schneiden sich die Kugeln in einem Kreise und haben einen Theil des Inhaltes mit einander gemein. Rückt endlich die eine Kugel mit ihrem Mittelpunkte in den der andern, so werden sie koncentrisch; bei gleich großen Radien decken sie sich dann; bei ungleichen Radien nimmt die kleinere Kugel einen Theil des Volumens der größern hinweg, so daß nur noch eine **Kugelschale** übrig bleibt, wenn man sich den koncentrischen **Kugelkern** herausgenommen denkt.

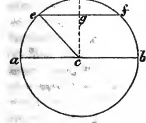
Der Schatten einer Kugel ist so lange kreisrund, als die Lichtstrahlen, welche durch die Kugel aufgehalten werden, bei ihrer Verlängerung zur Schattenfläche senkrecht stehen würden. Träfen aber die zu verlängernden Lichtstrahlen die Schattenfläche schief, so würde der Schatten der Kugel eine elliptische Gestalt annehmen.

Der Kugelform begegnet man im Leben sehr häufig, vom Wassertropfen, Thautropfen, der Thräne, der Kegelkugel, dem Balle und der steinernen bunten Spielkugel der Jugend ꝛc. bis zur Erdkugel, Mondkugel und den Himmelskörpern überhaupt.

Um einen Punkt auf einer Kugel genauer zu bestimmen, muß man denselben den Durchschnitt zweier Kreise werden lassen; denn weiß man zunächst, daß ein bestimmter Punkt in einem gewissen Kreise liegt, so kennt man denselben doch nicht, weil eine Kreislinie unendlich viele Punkte hat. Um dieß näher zu beleuchten, wollen wir uns vorstellen, daß eine Kugel an einem ihrer verlängerten Durchmesser so gerichtet sei, daß der eine Pol nach Norden, der andere nach Süden zeigt. Legt man sich zwischen beiden Polen einen größten, von Westen nach Osten gehenden Kreis, so zerfällt die ganze Kugel in eine nördliche und südliche Hälfte. Diesen Kreis nennt man den Äquator oder Gleicher. Durch Nord- und Südpol gehe ein zweiter größter Kreis, welcher den Äquator in zwei gleiche Theile theilt und ebenso die Kugel in eine östliche und westliche Hälfte zerlegt; ein solcher größter Kreis heißt Meridian oder Mittagskreis. Will man den Äquator in 360 gleiche Theile oder Grade zerlegen, so braucht man dazu 180 Meridiane, welche sich alle im Nord- und Südpole schneiden. Einen Meridian, welcher durch einen beliebigen bestimmten Punkt der Kugel geht, betrachtet man als den ersten; der Nordpol desselben steht vom Äquator um einen Viertelkreis oder 90° ab; durch jeden Grad des Meridianquadranten zwischen Norden und Süden lege man je einen, mit dem Äquator parallelen Kreis, so daß man 90 Parallelkreise erhält. Diese werden immer kleiner, je weiter sie sich dem Nord- oder Südpole nähern oder vom Äquator entfernen. Im Nord- und Südpole verschwinden dieselben oder werden zu Null. Die Grade des Äquators und Meridians müssen immer gleich bleiben, weil beide größte Kreise und alle größten Kreise einer Kugel gleich sind, also auch ihre

Grade oder 360ten Theile. Ein Grad des ersten, zweiten, dritten rc. Parallelkreises kann aber nicht mehr dieselbe Länge haben, weil die ganzen Kreise kleiner werden, also auch ihre gleichvielten Theile. Was nun die Lage eines Punktes auf der also eingetheilten Kugel anlangt, so kann derselbe 1) auf dem Äquator liegen, also weder nach Norden, noch nach Süden; 2) auf dem Nord- oder Südpole, also um einen Viertelkreis oder 90° vom Äquator. Die wirkliche Entfernung hängt von dem Durchmesser der Kugel ab. Wäre der Durchmesser z. B. = 1′ oder 12″, so wäre ein Meridian 1 mal $3\frac{1}{7}$′ lang, der Viertelkreis $^{22}/_{28}$′ = $^{11}/_{14}$′, um welchen die Pole vom Äquator abständen; 3) kann ein Punkt zwischen dem Äquator- und Südpol, also auf der südlichen und zwischen dem Äquator und Nordpol, also auf der nördlichen Halbkugel liegen. Dann kann er auf dem ersten, zweiten oder irgend welchem Parallelkreise liegen. Läge er auf dem 50ten Parallelkreise, so stände er auf der oben bezeichneten Kugel um $^{22}/_{7}$ mal $^{50}/_{360}$′ ab. Auf solche Weise wäre aber immer erst die Lage nach Norden oder Süden, aber noch nicht nach Osten oder Westen bestimmt. In Bezug auf den Meridian und zwar den bestimmten ersten kann ein Punkt liegen 1) in demselben, also weder nach Osten, noch nach Westen. Ein Punkt, der Durchschnitt des Äquators mit dem Meridiane, liegt weder nach Norden, noch nach Süden, weder nach Osten, noch nach Westen; 2) kann ein Punkt auf der östlichen oder westlichen Hälfte der Kugel liegen und zwar a. wieder auf dem Äquator oder b. auf einem Parallelkreise. Steht ein Punkt, welcher auf dem Äquator liegt, um 30° vom ersten Meridian auf der oben mit 1′ Durchmesser vorausgesetzten Kugel nach Osten ab, so ist seine Entfernung $^{22}/_{7}$ mal $^{30}/_{360}$′. Läge aber der Punkt, anstatt auf dem Äquator, auf dem 50ten Parallelkreise, so wäre seine Entfernung vom ersten Meridiane kleiner; denn ein Bogenstück von 30° auf dem 50ten Parallelkreise ist kleiner, als ein Bogenstück von 30° auf dem Äquator. Wie weit also ein Punkt vom ersten Meridian absteht, läßt sich nicht allein aus der Gradzahl des Kreisbogens ermessen, welcher von dem Punkte auf dem bezüglichen Parallelkreise bis zum ersten Meridiane reicht, sondern hängt davon ab, auf dem wievielten Parallelkreise ein Punkt liegt, oder wie groß noch ein Grad des fraglichen Parallelkreises ist.

An einer Kugel giebt es Mancherlei auszumessen und zu berechnen. Das wichtigste und einzige Bestimmungsstück ist der **Durchmesser** oder seine Hälfte, der **Halbmesser**. Um den Durchmesser zu finden, müßte man eine Gerade durch den Mittelpunkt legen und dieselbe messen; in einzelnen Fällen wäre dieß Verfahren wohl möglich. Im Allgemeinen aber könnte man immer eine Kugel zwischen die beiden Platten eines Schraubstocks oder einer Drehbank bringen und die Entfernung der beiden parallelen Flächen messen, indem man die Länge der auf beiden Platten senkrechten Linie messen müßte. Die Hälfte dieser gemessenen Linie wäre der Durchmesser. In andern Fällen müßten andere Weisen zum Ziele führen, indem man aus der Länge eines Grades oder des ganzen Umfangs einen Schluß auf den Durchmesser macht. Um die Länge eines größten Kreises zu finden, hat man den Durchmesser $3\frac{1}{7}$ mal zu nehmen; wollte man die Länge kleiner Kreise, z. B. der Parallelkreise messen, so müßte man erst wieder ihren Durchmesser kennen lernen. Hätte z. B. die Kugel einen Durchmesser von 1′ oder 12″ und sollte man den Durchmesser des 50zigsten Parallelkreises messen und den Umfang desselben, so könnte man sich einen Kreis zeichnen, dessen Durchmesser = 12″ wäre, z. B. den Kreis mit dem Durchmesser ab; errichtet man cd im Mittelpunkte c senkrecht, und legt den Winkel ace an = 50°, so erfährt man die Richtung der ce und den Punkt e, durch welchen man dann die Parallele ef legen müßte, deren Größe der gesuchte Werth des Durchmessers des 50ten Parallelkreises wäre.



Man fände eg = 3,857 = $3\frac{857}{1000}$ Zoll oder ungefähr $3\frac{9}{10}$ Zoll und ef = $7\frac{8}{10}$ Zoll und den Umfang des 50ten Parallelkreises = $7\frac{8}{10}$ mal $3\frac{1}{7}$ Zoll. Wäre aber der Durchmesser ab zu groß, als daß man denselben auf das Papier auftragen könnte, z. B. der Durchmesser der als Kugel vorausgesetzten Erde = 1719 geographische Meilen, oder der Halbmesser = $859\frac{1}{2}$ Meilen, so müßte man eine verjüngte Linie auftragen, z. B. 1719 Linien anstatt der Meilen. Hätte die Erde 1728 Meilen Durchmesser anstatt der 1719, so könnte man 12″ als

Durchmesser auftragen und erhielte dadurch eine 144 mal verjüngte ef und einen 144 mal verjüngten Parallelkreis. Der Halbmesser desselben wäre 552,46 Meilen, der Durchmesser = 1104,92, der Umfang = 3472,6 Meilen, ein Grad = 9,6 Meilen. Auf einer andern Stufe des Unterrichts und bei weiteren Vorkenntnissen stände freilich die ganze Rechnung leichter zu lösen. Auf ähnliche Weise könnte man sich die Durchmesser und Größe aller Parallelkreise und einzelnen Grade berechnen, worüber später eine Tabelle aufgestellt werden wird.

Es kömmt weiter darauf an, die Oberfläche und den Kubikinhalt der Kugel zu finden, oder wenn man den Halbmesser als bekannt und als Maßstab voraussetzt, anzugeben, wievielmal so groß die Oberfläche ist, als das Quadrat des Halbmessers und wievielmal so groß der Kubikinhalt der Kugel ist, als der Würfel, welcher den Halbmesser als Kante hat. Man kann dabei von verschiedenen Betrachtungsweisen ausgehen, welche nun erörtert werden sollen. Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in unendlich viele und unendlich kleine Kreisflächen zerlegt und alle Punkte der einzelnen Kreisumfänge mit dem Mittelpunkte der Kugel durch gerade Linien verbunden, so zerfällt die Kugel in unendlich viele, kleine Elementarkegel, welche zusammen den Kubikinhalt der Kugel bilden. Streng genommen kann man jede krumme Grundfläche nur annähernd als eine gerade betrachten; der Halbmesser ist die Höhe einer der Elementarkegel. Der erste Kegel ist nach dem Früheren = Grundfläche mal $1/3$ Höhe oder = Grundfläche mal $1/3$ Radius, der zweite = Grundfläche mal $1/3$ Radius u. s. w., bis die ganze Oberfläche mit $1/3$ Radius multiplicirt ist. Anstatt aber alle die einzelnen Grundflächen mit $1/3$ Radius zu multipliciren und dann die einzelnen Theilquotienten zu addiren, kann man der Kürze wegen sogleich die ganze Oberfläche der Kugel mit dem dritten Theile des Radius multipliciren, um den Kubikinhalt der Kugel zu finden. Daher: Der Kubikinhalt der Kugel ist = Oberfläche mal $1/3$ Radius. Daraus ist zu ersehen, daß Kubikinhalt und Oberfläche einer Kugel von einander abhängige Dinge sind, d. h. wüßte man die Oberfläche, so brauchte man dieselbe nur mit dem dritten Theile des Radius zu multipliciren, um den Kubikinhalt zu finden; andern Theils, wüßte man den Kubikinhalt, so brauchte man

denselben nur 3 mal zu nehmen und noch durch den Radius zu theilen, so fände man die Oberfläche. Eine von beiden Größen, Kubikinhalt oder Oberfläche muß als ein Vielfaches des Würfels oder Quadrats des Radius unabhängig vom andern bestimmt werden. Kugel, Kegel und Cylinder mögen gleichen Durchmesser und gleiche Höhe, d. h. den Durchmesser zur Höhe haben, so kann man die Kugel und den Kegel in den Cylinder beschreiben, so daß des Kegels Grundfläche mit der des Cylinders und die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkte der oberen parallelen Kreisfläche zusammenfällt; die in den Cylinder beschriebene Kugel würde in zwei Punkten die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen berühren und in noch zwei Punkten den Mantel des Cylinders, welche Punkte die Endpunkte des Durchmessers wären, welcher im Mittelpunkte eines zweiten Durchmessers senkrecht stände, welcher die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen des Cylinders verbände. Legt man durch die Achse des Cylinders und einen Punkt des Kreises, welcher in der Mitte zwischen beiden Kreisflächen zu denselben parallel ist, eine Ebene, so findet man den vierten Berührungspunkt als Endpunkt des Durchmessers, welcher den dritten Berührungspunkt mit dem Mittelpunkte der Kugel verbindet. Vergleicht man die drei beschriebenen Körper, Cylinder, Kegel und Kugel mit einander, und untersucht die Menge des Wassers, welche von jedem einzelnen Körper aus einem vollen Gefäße verdrängt wird, so wird sich als Resultat ergeben, daß der Kubikinhalt des Kegels den dritten Theil des Cylinders, die Kugel aber zwei Drittheile von dem Kubikinhalte des Cylinders ausmacht. Um also den Kubikinhalt der Kugel zu finden, müßte man den Kubikinhalt eines Kegels, welcher denselben Durchmesser und noch den Durchmesser der Kugel zur Höhe hätte, 2 mal nehmen, also: die Grundfläche des Kegels hat den Radius r, ist also r mal r mal $3\frac{1}{7}$, die Höhe = 2r, also der Kubikinhalt des Kegels = r mal r mal 2r mal $3\frac{1}{7}$ mal $\frac{1}{3}$, also Kubikinhalt der Kugel = 2 mal r mal r mal 2r mal $3\frac{1}{7}$ mal $\frac{1}{3}$ oder wenn man besser ordnet $\frac{4}{3}$.r mal r mal r mal $3\frac{1}{7}$, d. h. der Kubikinhalt der Kugel wird gefunden, wenn man zum Würfel des Radius noch seinen dritten Theil setzt und die Summe mit $3\frac{1}{7}$ multiplicirt. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die Kugel mit dem Cylinder vergleicht. Denn die Grundfläche

des Cylinders = r.r.$3\frac{1}{7}$, die Höhe = 2r, also der Kubikinhalt des Cylinders = 2.r.r.r.$3\frac{1}{7}$; davon beträgt der Kubikinhalt der Kugel $\frac{2}{3}$, daher Kubikinhalt der Kugel = $\frac{2}{3}$ mal 2 mal r mal r mal r mal $3\frac{1}{7}$ = $\frac{4}{3}$ mal Würfel des Halbmessers mal $3\frac{1}{7}$, wie oben schon gefunden. Untersucht man überhaupt, wieviel Wasser von einer Kugel verdrängt wird, deren Radius 1, 2, 3 ꝛc. Längeneinheiten ist, so wird man stets finden, daß diese Wassermasse dem Produkte gleich ist, wenn man den Würfel des Halbmessers mit $\frac{4}{3}$ und $3\frac{1}{7}$ multiplicirt. Also Kubikinhalt der Kugel = $\frac{4}{3}$ mal Würfel über dem Halbmesser mal $3\frac{1}{7}$.

Daraus ließe sich nun auch die Oberfläche der Kugel finden. Denn da nach den früheren Betrachtungen der Kubikinhalt = Oberfläche mal $\frac{1}{3}$ Radius ist, so muß auch

$\frac{4}{3}$ mal Würfel des Halbm. mal $3\frac{1}{7}$ = Oberfl. mal $\frac{1}{3}$ Radius sein oder wenn man mit 3 multiplicirt,

4 mal Würfel des Halbm. mal $3\frac{1}{7}$ = Oberfl. mal Radius, oder

4 mal Halbm. mal Halbm. mal Halbm. mal $3\frac{1}{7}$ = Oberfl. mal Halbm.,

oder wenn man durch den Halbm. theilt

4 mal Halbm. mal Halbm. mal $3\frac{1}{7}$ = Oberfl.

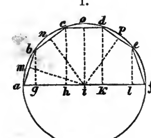
oder

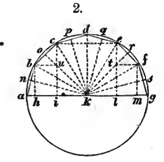
4 mal Quadrat des Halbm. mal $3\frac{1}{7}$ = Oberfl.

Aber das Quadrat des Halbmessers mal $3\frac{1}{7}$ ist eine größte Kreisfläche der Kugel, daher die Regel: Die Oberfläche der Kugel findet man, wenn man die größte Kreisfläche einer Kugel 4 mal nimmt.

Man hätte aber auch eine ganz andere Betrachtungsweise verfolgend zu demselben Resultate kommen müssen. Denn die Kugeloberfläche kann als die Grenze betrachtet werden, welcher die Fläche des eingeschriebenen und umschriebenen Tetraeders, die Fläche des ein- und umschriebenen Würfels, die Fläche des ein- und umschriebenen Oktaeders ꝛc., endlich die Fläche des ein- und umschriebenen Polyeders von sehr vielen oder unendlich vielen Seiten zustrebt. Freilich weicht die Oberfläche des Ikosaeders, welches ein- und umschrieben ist, noch sehr von der Kugeloberfläche ab, oder wenn man die Oberfläche des eingeschriebenen und umschriebenen Ikosaeders, welche beide Viel-

fache des Quadrats der Seite, die im Werthe des Radius berechnet wäre, sein müßten, zusammenzählte und durch 2 theilte, so erhielte man einen noch zu groben Näherungswerth. Ebenso gestaltete es sich mit dem Kubikinhalte, wenn man den Kubikinhalt der Kugel als die Grenze betrachten wollte, welchem der Kubikinhalt des ein- und umschriebenen regelmäßigen Polyeders zustrebt.





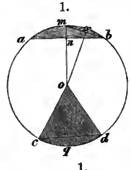
Dreht sich in Fig. 1. das regelmäßige halbe Vieleck (Fünfeck) abcdef um die Linie af als feste Achse, so beschreibt die Linie ab die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, die bc die Mantelfläche eines abgestumpften, cd die Mantelfläche eines Cylinders, weil cd parallel zu af ist, de die Mantelfläche eines abgestumpften und ef die Mantelfläche eines senkrechten Kegels. In Fig. 2. beschreiben nur die Linien ab und fg, welche mit der Achse ag einen Winkel bilden und an dieselbe anstoßen die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, alle übrigen Seiten, welche erst hinreichend verlängert, die Achse schneiden würden, bilden die Mantelfläche von abgestumpften Kegeln. Denkt man sich nun die Seiten ab, bc ꝛc. sehr klein und die Anzahl derselben sehr groß, die Seitenzahl immer wachsend, die Größe derselben immer abnehmend, so muß sich die Oberfläche des dadurch entstehenden Polyeders immer mehr und mehr der Oberfläche der Kugel nähern und zuletzt ganz mit derselben zusammenfallen. Wendet man nun das Verfahren an, welches bei der Berechnung der Mantelfläche des geraden und abgestumpften Kegels früher aufgestellt worden ist, so wäre die Mantelfläche des durch die Umdrehung der ab entstehenden Kegels $= 2bm . \pi . \frac{ab}{2}$ (Fig. 1.) oder

$2am.ox.\pi$. Denn weil Dr. abg ∽ Dr. aim, so ist bm : am $= ox : \frac{ab}{2}$ oder bm mal $\frac{ab}{2} = am.ox$, also auch $2bm.\frac{ab}{2}.\pi = 2am.ox.\pi$ oder $2am.\pi.r$, wenn r den Seitenhalbmesser bedeutet. Die Mantelfläche des durch die Drehung der bc erzeugten abgestumpften Kegels ist $= 2gh.in.\pi$ oder $2mn.\pi.r$; die Mantelfläche des Cylinders $= 2oi.\pi.cd = 2hk.oi.\pi$ ꝛc. Addirt man, so gestaltet sich die Oberfläche des Polyeders $O = 2r\pi\ (ag + gh + hk + kl + lf)$ oder, wenn der Seitenhalbmesser r allmälig in den Eckenhalbmesser R übergeht, d. h., wenn bei fortwährender stetiger Abnahme der einzelnen Seiten und bei fortwährendem Wachsen der Seitenzahl die Oberfläche des Polyeders in die Oberfläche der Kugel übergeht, so hat man $O = 2\ R\pi.2\ R$, denn die ag + gh ꝛc. bilden ja den Durchmesser oder 2 R. Daher

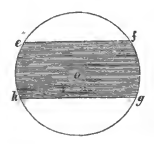
$O = 4\ R^2.\pi = 4\ R\square.\pi$, wie schon gefunden worden ist.

Nachdem die Berechnung der Oberfläche und des Kubikinhaltes der ganzen Kugel entwickelt worden ist, so kömmt es nunmehr darauf an, die Berechnung der Oberfläche und des Kubikinhaltes einzelner Theile der Kugel zu bestimmen, 1) des Kugelabschnitts (oder Kugelsegments oder der Kugelkappe, Kalotte) abm, welche nb zum Radius des Begrenzungskreises, on Abstand der Grundfläche vom Mittelpunkte und nm zur Höhe hat; 2) des Kugelausschnittes ocqd (Kugelsektors) und 3) des Kugelgürtels oder Kugelzone, hgfe oder iklz, welche entweder den Mittelpunkt der

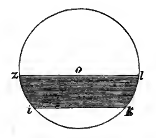
1.



1.

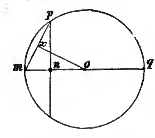


2.

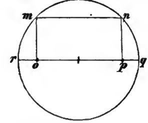


Kugel enthält, wie o in Fig. 1. oder nicht, wie in Fig. 2; dabei wird vorausgesetzt, daß die Begrenzungskreise des Kugelgürtels zu einander parallel sind. Der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrer Mitte.

1) Der Kugelabschnitt oder das Kugelsegment.



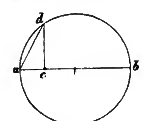
a) die konvexe oder sphärische Oberfläche desselben wird gefunden, wenn man den größten Kugelkreis ($2r\pi$, wenn r = dem Radius der Kugel ist) mit der Höhe h des Kugelabschnitts multiplicirt. Denn dreht sich der Halbkreis mpq um die mq, so beschreibt er die Oberfläche der Kugel; dabei beschreibt mp die gekrümmte Oberfläche oder den Mantel des Kegels und der Bogen mp, welcher die Sehne mp bespannt, die konvexe Oberfläche des Kugelabschnitts. Es ist aber der Kegelmantel $= 2.ox.\pi.mn$, daher die konvexe Oberfläche des Kugelabschnitts $= 2r\pi.mn$, weil die Linie ox in om oder den Kugelradius übergeht. Wächst mn zu mo = r an, so hat man $2r\pi.r = 2r^2\pi$ oder die halbe Oberfläche der Kugel.



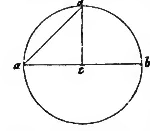
Ebenso beschreibt die mn oder der zu derselben gehörige Bogen einen Cylindermantel oder die konvexe Oberfläche einer Kugelzone, welche durch zwei parallele Kreisflächen begrenzt ist, welche um die Entfernungen or und pq von der Oberfläche abstehen. Auch für diese hat man Mantel $= 2om.\pi.op$ oder wenn om = r und der Cylindermantel in die sphärische Fläche der Kugelzone übergeht, $2r.\pi.op$.

Daraus folgt nun, daß eine Kugelzone, ebenso auch eine Kalotte dem Mantel eines Cylinders gleich ist, welcher den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und die Höhe der Zone oder der Kalotte zur Höhe hat. Zwei Kugelzonen oder zwei Kalotten von derselben Höhe sind einander gleich, wenn sie derselben Kugel angehören.

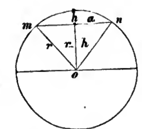
Zu ungleichen Kugeln bei gleicher Höhe gehörig verhalten sie sich wie die Halbmesser der Kugeln; sind die Kugeln und Höhen ungleich, wie die Produkte aus den Halbmessern und Höhen. Eine Zone oder Kalotte verhält sich zur Oberfläche der ganzen Kugel, wie ihre Höhe zum Kugeldurchmesser.



Die konvexe Fläche der Kugelzone ist $= 2r\pi.ac$; aber ad ist die mittlere Proportionale zwischen ac und ab, also $ad^2 = ac.2r = h.2r$, also auch $ad^2.\pi = 2r\pi.h$; aber $ad^2.\pi$ oder wenn man $ad = s =$ der Sehne setzt, so ist die konvexe Oberfläche einer Kalotte oder Kugelzone stets einer Kreisfläche $(s^2.\pi)$ gleich, welche die Sehne des Bogens der Erzeugungsfläche zum Halbmesser hat. Die halbe Oberfläche einer Kugel ist also auch einer Kreisfläche gleich, welche die Sehne des erzeugenden Bogens (eines Quadranten) der Erzeugungsfläche zum Halbmesser hat. Denn die Kalotte $= 2r\pi.ac$ oder $2r\pi.r$ oder $2r^2\pi$. Aber $ad^2 = ac.ab = r.2r = 2r^2$, daher $ad^2.\pi = 2r^2\pi$. Um die ganze Oberfläche einer Kalotte oder Kugelzone zu berechnen, muß man nicht bloß die konvexe Oberfläche bestimmen, sondern auch die eine ebene Grundfläche, welche eine Kreisfläche ist oder beide ebene Grundflächen oder begrenzende Kreisflächen hinzu addiren. Diese Kreisflächen kann man immer bestimmen, wenn man den Radius derselben kennt, oder aus den sonst gegebenen Linien oder ihren Zahlwerthen ableiten kann. Ist also der Radius der Kugel $= r$, so ist die Totaloberfläche der Kalotte (oder der Kugelkappe, des Kugelsegments oder Kugelabschnitts) $= 2r.\pi.h + a^2.\pi = (2r.h + a^2).\pi$ und der Kugelzone $=$

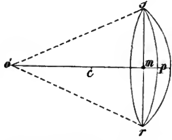


$$2r\pi.[2r-(h + h')] + a^2.\pi + b^2.\pi.$$



Man könnte aber auch noch die Totaloberfläche des Kugelausschnitts oder Kugelsektors berechnen wollen. Derselbe entsteht, wenn das Dreieck mon mit dem zu mn gehörigen Bogen sich um die oh als Achse dreht. Dadurch ist die Totaloberfläche eines Kugelsektors = der konvexen Oberfläche der zugehörigen Kugelkappe = $2r\pi h$ + dem Mantel des Kegels, welcher den Radius r zur Seite und die halbe Sehne mn = $\frac{s}{2}$ = a zum Halbmesser der Grundfläche hat = $2\frac{s}{2}.\pi.r$. Also Tot.O = $2r.\pi.h + 2r.\pi.\frac{s}{2} = 2r\pi\ (h + \frac{s}{2})$.

Es handelt sich weiter um die Bestimmung des Kubikinhaltes eines Kugelausschnittes oder Kugelsektors. Da der Kubikinhalt der ganzen Kugel gefunden wird, wenn man die Oberfläche derselben mit $\frac{r}{3}$ multiplicirt, so muß man auch den Kubikinhalt des Kugelausschnitts finden, wenn man seine konvexe Oberfläche ebenfalls mit $\frac{r}{3}$ multiplicirt. Also Kugelsektor = $2r\pi h.\frac{r}{3} = \frac{2}{3}.r^2.\pi.h$. Der Kugelsektor besteht aber aus dem betreffenden Kugelabschnitte + dem dazu gehörigen Kegel, welcher den Halbmesser der Kugel zur Seite und r—h zur Höhe hat. Zieht man von dem ganzen Kugelausschnitt den Kegel ab, so erhält man den Kugelabschnitt.

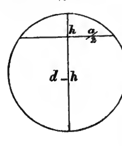


Die Grundfläche des Kegels hat einen Halbmesser sm = r, während R den Halbmesser der Kugel bedeuten soll, welcher die mittlere Proportionale ist zwischen h und $2R—h$, denn $sm^2 = h\ (2R—h)$ oder $r^2 = h\ (2R—h)$. Der Inhalt derselben ist also = $\frac{1}{3}.r^2.\pi.(R—h)$ oder wenn man für r^2 den Werth setzt = $\frac{1}{3}.h.(2R—h).\pi.(R—h)$. Zieht man ab, so ist der Inhalt des Kugelabschnitts J'.

J' = $\frac{2}{3}\ R^2.\pi.h — \frac{1}{3}\ h.\pi\ (2R—h).(R—h)$ oder

$\frac{1}{3}$ h . π . $[2 R^2 - (2 R - h) . (R - h)] = \frac{1}{3} h^2 . \pi . (3 R - h)$.
Addirt man den zweiten Kugelabschnitt mit der Höhe $2 R - h$ hinzu, d. h. setzt man in dem Ausdrucke $\frac{1}{3} h^2 . \pi . (3 R - h)$ für h den Werth $2 R - h$ und zählt den Inhalt des zweiten Kugelabschnitts zum ersten hinzu, so erhält man den Inhalt der ganzen Kugel.

$K = \frac{1}{3} h^2 . \pi (3 R - h) + \frac{1}{3} (2 R - h)^2 . \pi . (3 R - 2 R + h) = \frac{1}{3} h^2 . \pi (3 R - h) + \frac{1}{3} (2 R - h)^2 . \pi . (R + h) = \frac{1}{3} \pi [3 Rh^2 - h^3 + (2 R - h)^2 . (R + h)] = \frac{1}{3} \pi$ mal $4 R^3$ oder $= \frac{4}{3} R^3 . \pi$ d. h. = dem ganzen Kubikinhalte.



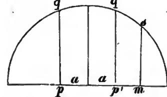
Für den Fall, daß nur die Höhe h des Kugelabschnitts und der Durchmesser a oder Halbmesser $\frac{a}{2}$ der Grundfläche des Kugelabschnitts gegeben wäre, müßte man den Durchmesser oder Halbmesser der Kugel sich erst berechnen. Dazu dient, daß $\frac{a}{2}$ die mittlere Proportionale ist zwischen h und $d - h$; daher $\frac{a^2}{4} =$ $h . (d - h) = dh - h^2$ und daraus $d = \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{h}$. Dadurch wird die $O = 2 r \pi h = \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{h} . h . \pi = \left(\frac{a^2}{4} + h^2\right) . \pi$.

Ebenso ändert sich dann der Ausdruck für den Kubikinhalt $= \frac{1}{3} h^2 . \pi (3 R - h)$ um in einen andern. Denn $d = 2 R = \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{h}$; $R = \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{2h}$, daher $3 R = \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{h} + \frac{\frac{a^2}{4} + h^2}{2h}$ $= \frac{\frac{a^2}{2} + 2h^2 + \frac{a^2}{4} + h^2}{2h} = \frac{\frac{3a^2}{4} + 3h^2}{2h}$.

$$K = \frac{1}{3} h^2 . \pi \left(\frac{3a^2}{8h} + \frac{3h}{2} - h\right)$$
$$= \frac{1}{3} h^2 . \pi \left(\frac{3a^2}{8h} + \frac{h}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3} h^2 . \pi \left(\frac{3a^2}{8h} + \frac{4h^2}{8h}\right)$$
$$= \frac{1}{24} . h . \pi \, (3a^2 + 4h^2).$$

Da aber a der Durchmesser der Grundfläche des Kugelabschnitts ist und man einen Ausdruck im Halbmesser haben will, so setze man $a = 2b$, $a^2 = 4b^2$ und $3a^2 = 12b^2$, dann ist
$K = \frac{1}{24} . h . \pi \, (12b^2 + 4h^2)$
$= \frac{1}{6} . h . \pi \, (3b^2 + h^2)$.

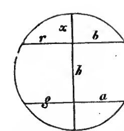
Endlich kömmt man zur Bestimmung des körperlichen Inhalts einer Kugelzone, wenn man den Radius R der Kugel, die Höhe h der Kugelzone und den Abstand a der größern Grundfläche vom Mittelpunkte kennt. Man hat dann den Kubikinhalt der Kugelabschnitte, welche auf einerlei Seite liegen und den beiden Grundflächen zugehören, zu bestimmen und dann den Kubikinhalt des kleineren Kugelabschnittes von dem Kubikinhalte des größeren abzuziehen. Liegt der Mittelpunkt in der Kugel,



so ist die Höhe des Kugelabschnittes $po = R + a$ und $p'o = R$. Darnach wird mo oder die Höhe des kleineren Kugelabschnittes entweder $= R + a - h$, weil $pm = h$ und $po = R + a$ ist oder $R - a - h$, weil $p'o = R - a$, also $mo = R - a - h$, da $p'm = h$ ist. Macht man nun Gebrauch von den früheren Ausdrücken für die Kugelabschnitte, so ergiebt sich als Kubikinhalt $= \frac{1}{3}\pi(R \pm a)^2.(R \mp a) - \frac{1}{3}\pi(R \pm a - h)^2.(2R \mp a + h)$. Reducirt man, was bei diesem Ausdrucke ziemlich umständlich ist, so wird $K = \frac{1}{3}\pi\,[3R^2.h \mp a^3 - (h \mp a)^3]$.
Liegt der Kugelmittelpunkt innerhalb der Kugelschicht oder Kugelzone, so gelten im Ausdrucke die oberen, im Gegentheile die unteren Zeichen.

Für Schüler, denen die Vorbereitung und Gewandtheit in der Entwickelung der Ausdrücke abgeht, muß man natürlich einfacher verfahren, wie im Eingange bemerkt wurde. Wäre $pm = h = 8''$ und $a = 2''$ und $R = 10''$, so wäre $po = 12''$ und $mo = 4''$. Man hätte also zuerst den Kugelabschnitt mit der Höhe 12'' und dann den von der Höhe 4'' ausrechnen und letzteren von ersterem abziehen müssen. Oder sollte die Kugelzone p'q'sm berechnet werden, so mußte man zuerst den Kugelabschnitt mit der Höhe $p'o = 8''$ berechnen, dann den Kegelabschnitt mit der Höhe mo und letzteren von ersterem abziehen.

Es könnten aber auch die Höhe oder Dicke der Kugelzone und die beiden Radien der parallelen Grenzflächen gegeben sein, wie findet man dann den Kubikinhalt der Kugelzone?



Ist also die Höhe der Kugelzone = h, der obere Halbmesser = r, der untere = ϱ, so ist die Kugelzone der Unterschied zwischen dem Kugelabschnitte mit der Höhe h + x und dem Grundflächenhalbmesser ϱ und dem Kugelabschnitte mit der Höhe x und dem Grundflächenhalbmesser r. Wendet man die Kubikinhaltsformel $K = \frac{1}{6} . h . \pi \ (3b^2 + h^2)$ an, so ergiebt sich als Kubikinhalt für den Kugelabschnitt mit der Höhe h + x und dem Radius ϱ, und der Höhe x mit dem Radius r.

$K = \frac{\pi}{6}.(h + x).[3\varrho^2 + (h + x)^2]$ und

$K' = \frac{\pi}{6}.x\ (3r^2 + x^2)$, also

$K - K'$ oder Kugelzone =

$\frac{\pi}{6}.(h + x).[3\varrho^2 + (h + x)^2] - \frac{\pi}{6}.x.(3r^2 + x^2).$

Entwickelt man den ganzen Ausdruck, so ist derselbe, wenn $(h + x)^2 = h^2 + 2hx + x^2$ ist und $(3\varrho^2 + h^2 + 2hx + x^2)$ mit $(h + x)$ multiplicirt wird =

$3\varrho^2 h + h^3 + 2h^2 x + hx^2 + 3\varrho^2 x + h^2 x + 2hx^2 + x^3$ davon ab $3r^2 x$ und x^3, so bleibt

$\frac{\pi}{6}\ (3\varrho^2 h + h^3 + 2h^2 x + hx^2 + 3\varrho^2 x + h^2 x + 2hx^2 - 3r^2 x).$

Es kömmt nun darauf an, den Werth von x im Werthe der bekannten Größen auszudrücken. Es ist aber r die mittlere Proportionale zwischen x und $2R - x$, also

I. $r^2 = x\ (2\ R - x)$ oder

$\frac{r^2}{x} + x = 2\ R$ und ϱ ist die mittlere Proportionale zwischen $h + x$ und $2\ R - (h + x)$, daher

II. $\varrho^2 = (h + x).[2\ R - (h + x)]$ und

$\frac{\varrho^2}{h + x} + (h + x) = 2\ R$; also hat man für 2R einen doppelten Ausdruck gewonnen, den man gleichsetzen kann. Also

$\frac{r^2}{x} + x = \frac{\varrho^2}{h + x} + (h + x)$

$\frac{r^2}{x} + \frac{x^2}{x} = \frac{\varrho^2}{h + x} + \frac{(h + x)^2}{h + x}$

$(r^2 + x^2).(h + x) = [\varrho^2 + (h + x)^2].x$

$$r^2.h + h.x^2 + r^2x + x^3 = [\varrho^2 + h^2 + 2hx + x^2].x$$
$$r^2.h + h.x^2 + r^2x + x^3 = \varrho^2.x + h^2.x + 2hx^2 + x^3$$
$$r^2.h + r^2.x = \varrho^2.x + h^2.x + hx^2$$
$$r^2.h = \varrho^2.x + h^2.x + h.x^2 - r^2.x$$
$$3h.r^2 = 3\varrho^2.x + 3h^2.x + 3h.x^2 - 3r^2.x.$$

Setzt man nun für $3\varrho^2.x$ ꝛc. oder die rechte Seite der Gleichung in dem Ausdrucke $\frac{\pi}{6}(3\varrho^2 h + \ldots)$ den Werth $3h.r^2$ ein, so ist

$$\text{Kugelzone} = \frac{\pi}{6}(3\varrho^2.h + h^3 + 3h.r^2)$$
$$= \frac{\pi.h}{6}(3r^2 + 3\varrho^2 + h^2).$$

Hat ein sphärisches Zweieck einen Winkel von n^0, so ist der Inhalt desselben $= \frac{n}{360}.O = \frac{n}{360}.4\,R^2.\pi = \frac{n}{90}.R^2.\pi$. Setzt man für den Winkel n seinen zugehörigen Bogen arc.n, so ist $arc.n = \frac{2\,R\pi}{360}.n$ und $n = \frac{360}{2\,R\pi}.arc.n = 180.\frac{arc.n}{R\pi}$ und dann wird der Inhalt des Zweiecks $= 180.\frac{arc.n}{\frac{R.\pi}{90}}.R^2.\pi = 2\,R.arc.n.$

Bei der Betrachtung der Eigenschaften des Raum nEcks ergiebt sich die Weise, wie man die Fläche eines Kugel nEcks finden kann. Denn sind a, b und c die 3 Winkel eines Kugeldreiecks, so ist der Inhalt $= \frac{a + b + c - 180}{2}.\frac{O}{360} = \frac{(a + b + c - 180).O}{720}$.

Ebenso ist der Inhalt eines Kugel nEcks mit der Summe seiner Winkel $a + b + c + .. + k = \frac{a + b + c \ldots + k - (n-2).180}{720}.O = \frac{S - (n-2).180}{720}.O$, wenn S die Winkelsumme bedeutet. Die Ausdrücke werden anders und einfacher, wenn anstatt O der Werth $4\,R^2.\pi$ eingesetzt wird. Man hat dann

$$\text{Kugeldreieck} = \left(\frac{a + b + c}{180} - 1\right).R^2\pi \text{ und}$$
$$\text{Kugelvieleck} = \left[\frac{S}{180} - (n - 2)\right].R^2.\pi.$$

Alle Kugeln sind nach einem ähnlichen Gesetze entstanden, dadurch, daß sich eine Kreisfläche um ihren Durchmesser als Achse gedreht hat. Auch bei Kugeln findet man daher dieselben Gesetze, wie überhaupt bei ähnlichen Körpern. Die Umfänge und Linien verhalten sich, wie entsprechende Liniengrößen, z. B. die Umfänge verhalten sich, wie die Halbmesser oder Durchmesser; ebenso

stehen Bögen von n^0 oder Sehnen von n^0 in demselben Verhältnisse, in welchem die Halbmesser stehen. Alle entsprechenden Flächengrößen, also Oberflächen, größte Kreisflächen, entsprechende Kugelabschnitte von entsprechender Höhe stehen in demselben Verhältnisse, wie die Quadrate über den Halbmessern, Durchmessern oder sonstigen ähnlich liegenden Linien. Die Kubikinhalte der Kugeln endlich, sowie analoge Kugeltheile stehen in demselben Verhältnisse, wie die Würfel, welche den Radius, den Durchmesser oder analoge Linien zur Kante haben.

Linien: $U : u = L : l = R : r = D : d$

Flächen: $F : f = O : o = R^2 : r^2 = D^2 : d^2 = L^2 : l^2$

Körperinhalte: $K : k = I : i = L^3 : l^3 = R^3 : r^3 = D^3 : d^3$.

Aufgaben.

I. Linienmessung an der Kugel betreffend.

1) Der Radius einer Kugel beträgt 2′; 3′ 5″; 9″ 5‴; 8‴ dd oder 3′ 5″; 7″ 8‴; 4′ 5″ 6‴ d; wie groß muß ein größter Kreis dieser Kugeln sein?

2) Wenn der Durchmesser der Erde 1719 Meilen beträgt, wie groß der 51te Parallelkreis? Wie groß ist der 66te, der 23te? Wie groß ist ein Grad des 51ten, 66ten und 23ten?

3) Die Durchmesser folgender Planeten unter dem Äquator sind: Merkur 671 Meilen; Venus 1710 „; Erde 1720 „; Mars 892 „; Vesta 60 „; Ceres 60 „; Pallas 150 „; Jupiter 20000 „; Saturn 16300 „; Uranus 7466 „; Neptun 9070 „; wie groß sind ihre Äquatoren?

4) Wie groß sind 23° des 51ten Parallelkreises oder der Abstand, um welchen Eisenach vom ersten Meridian nach Osten entfernt ist?

5) Der Äquator und die Umfänge der entsprechenden gleichvielten Parallelkreise sollen 2, 3, 4 . . . . n mal oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . . $\frac{1}{n}$ mal so groß werden, wie groß muß man den Halbmesser einer Kugel in Bezug auf den Halbmesser 1 einer vorhandenen Kugel machen?

II. Flächen und damit zusammenhängende Linienmessung betreffend.

1) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn der Halbmesser in dd ist:

1′; 7″ 5‴; 1′ 6″; 8″ 7‴; 2′ 5″ 8‴, und
d: 2′ 7″; 3′; 5″ 7‴; 4′ 5″ 7‴.

2) Ein Globus hat einen Durchmesser von 1719‴ dd, wieviel □‴ beträgt a. seine Oberfläche? b. Wieviel Quadratzoll kommen auf alles Land und alles Wasser, wenn sich das erste zum zweiten wie $2\frac{1}{4} : 6\frac{3}{4}$ verhält? c. Wieviel □‴ kommen auf die einzelnen Erdtheile Australia, Europa, Afrika, Amerika und Asia, wenn dieselben sich verhalten wie $1 : 1 : 3\frac{1}{3} : 4 : 5$. d. Wieviel □‴ kommen auf den großen, atlantischen, indischen Ocean, auf das südliche und auf das nördliche Eismeer, wenn sich dieselben verhalten wie $16\frac{1}{2} : 8\frac{1}{7} : 6\frac{9}{10} : 1\frac{3}{4} : 1$. Da der Durchmesser der Erde = 1719 Meilen, so bedeutet eine Quadratlinie auf dem Globus eine Quadratmeile in der Natur.

3) Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn der Durchmesser = 1719 Meilen ist?

4) Was kostet ein kupferner Kessel in Kugelform, wenn der Durchmesser desselben $3\frac{1}{2}$′ dd beträgt und ein Quadratfuß des dazu verwendeten eine Linie dicken Kupferblechs 1 Thlr. 10 gr. kostet?

5) Der Umfang eines Globus beträgt 5400‴, wie groß ist seine Oberfläche?

6) Eine Kugel hat eine Oberfläche von 90 □″; wie wächst dieselbe, wenn man den Durchmesser um $\frac{1}{10}$ wachsen läßt?

7) Eine Kugel soll eine 2, 3, 4 . . . . n mal so große Oberfläche erhalten oder eine $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}$ mal so große Oberfläche, wie findet man die Radien der betreffenden Kugeln, wenn der Radius der vorhandenen Kugel als Einheit angenommen wird?

8) Eine Lichtquelle, z. B. die Sonne, bestrahlt und erleuchtet die Erde mit einer gewissen Helligkeit bei einer Entfernung von 20 Millionen Meilen; wie wird sich die Beleuchtung auf den übrigen Planeten gestalten, wenn Merkur 8, Venus 14, Mars 31, Vesta 48, Juno 55, Ceres 57, Pallas 57, Jupiter 107, Saturn 197, Uranus 396, Neptun 620 Millionen Meilen von der Sonne entfernt ist?

9) Eine Kugel hat 100□′ Oberfläche; eine andere hat einen 3,5 mal so großen Durchmesser, wie groß ist ihre Oberfläche?

10) Senkrecht über einer Kugel in einer Höhe von 6″ dd befindet sich ein leuchtender Punkt; der Halbmesser der Kugel ist 9″ dd, wie groß ist der Radius des auf der Ebene gebildeten Schattenkegels?

11) Um eine Kugel wird ein Cylinder beschrieben; wie verhält sich die Oberfläche der Kugel zur ganzen Oberfläche des Cylinders? (der Halbmesser der Kugel sei = 1).

12) Um eine Kugel ist ein gleichseitiger Kegel beschrieben, wie verhalten sich die Oberflächen der Kugel und des Kegels, wenn der Halbmesser der Kugel = 1 ist?

13) Die Oberfläche einer Kugel beträgt dd 5□′; 15□″; 7□′ 9□″ und d 100□″; 3□′ 36□″; 96□″, wie groß ist der Halbmesser der Kugel?

14) Eine Kugel hat 1′ Halbmesser, eine andere 5″; wie groß muß man den Radius einer dritten nehmen, welche eine ebenso große Oberfläche hat, als die beiden ersten Kugeln?

15) Eine Kugel und ein Würfel haben gleiche Oberfläche; der Halbmesser der Kugel ist 1′, wie groß die Kante des Würfels?

16) Eine Kugel hat einen Durchmesser von 1′ dd, wie groß ist die gesammte Oberfläche einer Halbkugel und wie groß die konvexe Oberfläche der Halbkugel?

17) Eine Kugel hat 5′ 6″ dd Durchmesser, die Höhe eines Kugelgürtels beträgt 1′, wie groß ist die konvexe Oberfläche?

18) Der Kugeldurchmesser beträgt 3′ 5″ dd, die Höhe eines Kugelabschnitts beträgt 2′ dd, wie groß ist die konvexe Oberfläche?

19) Die Höhe eines Kugelabschnitts oder eines Kugelgürtels beträgt 1″ dd; die konvexe Oberfläche 30□″, wie groß ist der Durchmesser der Kugel?

20) Wie groß ist die Höhe einer Kugelhaube, welche bei 7″ dd Kugeldurchmesser, 25□″ konvexe Oberfläche hat?

21) Eine Kugel wird durch eine Ebene geschnitten; der dadurch entstandene Kreis hat 6″ d Halbmesser; der Durchmesser der Kugel beträgt 2′ d; wie groß ist die Fläche der Haube? (Anm. Man berechne zuerst die Höhe der Haube.)

22) Wie groß ist die ganze Oberfläche eines Kugelausschnitts (konvexe sphärische Fläche + dem Kegelmantel, dessen Seite =

dem Kugelhalbmesser ist), wenn der Halbmesser der Kugel 2′ und die Höhe der zugehörigen Haube = 5″ d ist?

23) Der Begrenzungskreis einer Kugelhaube hat einen Durchmesser von 6″ und die Höhe derselben beträgt 2″; wie groß ist die Oberfläche des Kugelausschnitts?

24) Die Oberfläche eines Kugelabschnitts wird gesucht, wenn die Höhe 6″ d, der Halbmesser der Kugel 15″ d ist.

III. Berechnung des Kubikinhalts betreffend.

1) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kugel, wenn der Halbmesser in dd ist: 2′; 3′ 5″; 2′ 7″ 8‴; 1′ 9‴ oder in d: 0,25′; 2,43′; 2′ 5″?

2) Wie groß ist der Kubikinhalt der Erde oder eines Globus, wenn der Durchmesser = 1719 Meilen oder = 1719‴ ist?

3) Der Kubikinhalt einer Kugel beträgt in dd 343 k′; 1728 k‴; 50653 k‴; 456533 k‴; 541343375 k‴, wie groß ist der Radius? oder in d: 13 k′ 824 k″; 274 k″ 625 k‴; 2 k′ 515 k″ 456 k‴; 465 k′ 484 k″ 375 k‴?

4) Der Kubikinhalt einer Kugel ist in dd 3 k′; 5 k′ 7 k″; 17 k′ 376 k″; 368 k″ 99 k‴ oder in d: 63 k′ 673 k″; 99 k′ 99 k‴; 736 k′ 888 k″; gesucht r.

5) Der Kubikinhalt einer Hohlkugel, z. B. von Eisen wird gesucht, wenn der Durchmesser 9″ und die Eisendicke 1″ beträgt.

6) Der Durchmesser eines Kreises beträgt 2′ 5″ d, wie groß ist der Kubikinhalt der durch Umdrehung desselben entstehenden Kugel?

7) Der Umfang des größten Kreises einer Kugel beträgt 3′; 4′; 5″ d, wie groß ist der Kubikinhalt?

8) Die Oberfläche einer Kugel beträgt in d 100 □″; 376 □‴; 7 □′ 66 □″, wie groß ist der Kubikinhalt?

9) Wenn der Flächeninhalt eines größten Kreises einer Kugel in d 100 □″; 7 □′ 88 □″; 3 □′ 36 □″ ist, wie groß der Kubikinhalt?

10) Ein Würfel und eine Kugel haben dieselbe Oberfläche, in welchem Verhältnisse stehen die Kubikinhalte?

11) Ein halbkugelförmiger Kessel hat 3′ im Lichten, wieviel preußische Quart kann derselbe fassen, wenn 64 k″ = 1 preuß. Quart sind?

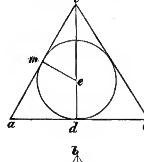
12) Der Halbmesser einer Kugel wird 2, 3, 4, 5 .... n mal oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ .... $\frac{1}{n}$ mal so groß, wie wächst und nimmt der Kubikinhalt ab?

13) Eine Kugel hat einen Kubikinhalt von 9 k"; 3 k' 266 k"; wie groß ist der Kubikinhalt von zwei andern Kugeln, deren Halbmesser bezüglich 2 oder 3 mal so groß wird?

14) Wie nimmt der Kubikinhalt einer Kugel zu, wenn der Durchmesser 1' zu 1,1'; 1,2'; 1,3' ꝛc. wächst?

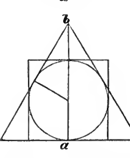
15) Ein Kegel hat eine Seite von 9" und ist gleichseitig; in denselben ist eine Kugel eingeschrieben, welche die Grundfläche und den Mantel des Kegels berührt; um wie viel Kubikzoll ist der Inhalt des Kegels größer, als der Inhalt der Kugel?

16) Ein senkrechter Kegel ist 10" d hoch; eine Kugel, deren Durchmesser 5" d beträgt, ist in den Kegel beschrieben, so daß sie Grundfläche und Mantel berührt; gesucht wird der Kubikinhalt des Kegels und der Kugel.



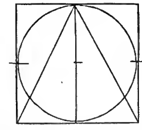
Dr. cme ∾ Dr. adc, ad = $\frac{1}{2}$ ac, me = $\frac{1}{2}$ ce = ed = $\frac{1}{3}$ h, aber $h = \sqrt{81 - \frac{81}{4}} = \frac{9}{2}.\sqrt{3}$.
Daher der Radius de = $\frac{3}{2}.\sqrt{3}$ ꝛc.
de bekannt, cd, auch ce, auch mc, weil $mc = \sqrt{ce^2 - me^2}$.

17) Wird nebenstehende Zeichnung, die Kreisfläche, das Quadrat und das gleichseitige Dreieck um die ab gedreht, so entsteht eine Kugel, ein Cylinder und ein Kegel; wenn nun die Seite des Kegels = 1' = a' beträgt, wie groß sind Höhe des Kegels, Seite des Quadrats und Halbmesser der Kugel und wie verhalten sich dann die Gesammtoberflächen und Kubikinhalte der 3 entsprechenden Körper?



18) In einen senkrechten Cylinder, dessen Durchmesser der Höhe gleich ist, wird eine Kugel einbeschrieben, welche den Mantel in 2 Punkten berührt und die untere und obere Kreisfläche in den Mittelpunkten, ebenso ein Kegel, welcher auf der Grund-

fläche des Cylinders ruhend mit seiner Spitze in dem Mittelpunkte der oberen Kreisfläche ruht; wenn nun der Durchmesser des Cylinders = 2′, der Halbmesser also = 1′ ist, wie verhalten sich die Oberflächen und die Kubikinhalte dieser 3 Körper zu einander?



19) Wenn die Sonne 1415225; Merkur 0,05; Venus 0,99; Mars 0,15; Jupiter 1491; Saturn 772; Uranus 82; Neptun 94 mal so groß, als der Kubikinhalt der Erde ist; wenn ferner der Mond 0,02 des Kubikinhaltes der Erde beträgt, wie groß sind die Durchmesser der genannten Himmelskörper, wenn der Durchmesser der Erde = 1719 geogr. Meilen ist?

20) Ein halbkugelförmiger Kessel soll 1000 preuß. Quart à 64 k″ preuß. fassen; wie groß in rheinl. Maße, der Fuß à 139,13 par. Linien, muß der Durchmesser genommen werden?

21) Eine Kugel und ein Würfel haben 64 k″ Inhalt, wie groß sind ihre Oberflächen?

22) Die Kubikinhalte zweier Kugeln, von denen die erste einen Durchmesser von 2′ 5″ d hat, verhalten sich zu einander, wie 2 : 3; wie groß ist der Durchmesser der zweiten Kugel? Wie verhalten sich die Oberflächen beider Kugeln?

23) Die Oberfläche einer hohlen Kugel beträgt 5□′ 100□″ d; der Inhalt des hohlen Raumes beträgt 512 k″; wie groß ist die Dicke der Eisenwand?

24) Das Gewicht einer eisernen Kugel beträgt 36 Pfd.; wie groß dd ist der Halbmesser? (Spec. Gew. = 7,207); wie groß ist der Halbmesser, wenn die eiserne Kugel 1 Pfd. schwer ist?

25) Wie stark drückt eine 80 Pfd. schwere eiserne Kugel auf den Boden eines mit Wasser angefüllten Gefäßes, wenn das spec. Gew. des Eisens = 7,207 ist und 1 Kubikfuß Wasser = $61\frac{3}{4}$ Pfd. schwer ist?

26) Gußeisen und Kork sollen so verbunden werden, daß eine gußeiserne Kugel im Wasser schwebt; das spec. Gewicht des Korkes ist = 0,24; das des Gußeisens = 7,5; das Gewicht der gußeisernen Kugel ist = 60 Pfd.

27) Eine eiserne Kugel, 1 Pfd. schwer, soll im Wasser schweben. Wie groß muß der äußere Durchmesser und die Dicke der Kugel gemacht werden, wenn das spec. Gew. = 7,113 ist?

28) Eine Kugel aus Messing, 15 Pfd. schwer (1 k″ Messing = 11 Loth) soll zur Hälfte in's Wasser eintauchen, zur andern aus dem Wasser hervorragen. Wie groß muß der äußere Durchmesser der Kugelschale und die Dicke der Kugelwand werden?

29) Wie schwer ist eine Bleikugel von 3″ Durchmesser (spec. Gew. 11,3); einer eisernen Kugel von 4″ Durchm. (sp. 7,5)?

30) Eine kugelförmige Schwefelsäureflasche hat im Ganzen 3′ Durchmesser; die Glasdicke beträgt 4‴; das spec. Gew. ist 2,2; was wiegt dieselbe allein und mit Wasser angefüllt, wenn 1 k″ preuß. = 1,072 Loth wiegt?

31) Wie groß ist der Durchmesser einer 36- oder 48pfündigen Kanonenkugel, wenn das spec. Gewicht = 7,2 ist?

32) Wieviel Kugeln von 3‴ Dicke kann man aus einer Bleimasse von 300 Pfd. gießen, wenn das spec. Gew. des Blei's = 11,5 ist?

33) Aus einem Würfel von Blei, dessen Kante 5″ lang ist, soll man Schrot verfertigen, von welchem 100 Stück auf ein Loth gehen; das spec. Gew. = 11; der Abgang 6%; wieviel Schroten erhält man und wie groß ist der Durchmesser der Schroten?

34) Eine kupferne Hohlkugel soll im Wasser schweben; welche Dicke muß das Kupfer erhalten, wenn der Durchmesser 2 Fuß betragen soll? (sp. Gew. = 8,8).

35) Die Kuppel eines kugelförmigen Thurmes hat 36′ dd Durchmesser und 12′ dd Höhe: wie groß ist der Raum, welchen derselbe einnimmt?

36) Der Kubikinhalt eines Kugelabschnitts ist 30 k″ dd, der Radius der Grundfläche 5″, wie groß ist die Höhe?

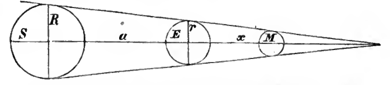
37) Ein Kugelabschnitt hat eine Höhe von 8″ und einen Kubikinhalt von 2 k′ 391 k″ 798 k‴ dd, wie groß ist der Halbmesser seiner Grundfläche?

38) Bei einer Kugelzone sind die Halbmesser der beiden Grundflächen = 2′ dd und 1′ dd, die Höhe = 1′ dd, wie groß ist der Kubikinhalt?

39) Wie groß ist der Kubikinhalt, wenn dieselben Linien 3″, 4″ und 2″ dd sind?

40) Der Kubikinhalt einer Kugelzone, welche 1′ 8″ dd hoch ist, beträgt 15 k′ 296 k″ 420 k‴, der Radius der einen Grundfläche ist 3′ 4″, wie groß ist der Radius der andern?

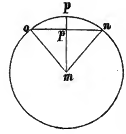
41) Wenn S die Sonne bedeutet, R den Radius derselben,



r den Radius der Erde und x die Höhe des Kegels vom Kernschatten und a die Entfernung der Mittelpunkte von Sonne und Erde, so ist $R : r = a + x : x$, daraus $x = \frac{a.r}{R-r}$. Setzt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne = 12038, des Mondes von der Erde = 30,1 Erddurchmesser; beträgt ferner der Durchmesser der Sonne 112,2 und der des Mondes 0,27 Erddurchmesser, wie weit fällt dann die Spitze des Kernschattens der Erde oder wie groß ist x und wie groß ist der Durchmesser des Kernschattens in der mittleren Entfernung des Mondes im Vergleich zum Monddurchmesser?

42) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kugelhaube, wenn der Halbmesser der Kugel 4′ und die Höhe der Haube 2′ ist?

43) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kugelsektors, wenn der Radius der Kugel 3′ dd und der Begrenzungskreis der Kugelhaube 1′ 6″ dd hat?



Da $mn^2 - pn^2 = pm^2$ oder $36.36 - q.q = pm^2$, so ist $pm = \sqrt{1215\square''} = 34,86''$, daher $pq = 36'' - 34,86'' = 1,14''$. Dann findet man die Oberfläche des Kugelsektors und diese mal ⅓ Radius giebt den Kubikinhalt des Kugelsektors.

44) In einem Abstande von 2′ vom Mittelpunkte wird eine Ebene durch die-

selbe gelegt, der Halbmesser des Begrenzungskreises ist 1', wie groß ist der Kubikinhalt?

45) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 48 □" dd, welchen Kubikinhalt hat ein Kugelausschnitt derselben, wenn die Haube 1' Höhe hat?

46) Inhalt des Kugelsektors = 1000 k" dd, Halbmesser der Kugel 10" dd, gesucht die Höhe der Haube des Kugelausschnitts.

47) Gesucht der Durchmesser einer Kugel; der Kubikinhalt eines Kugelausschnitts = 5 k' dd; Höhe der entsprechenden Haube = 5" dd.

48) Kugelinhalt 100 k" dd; Inhalt des Kugelsektors 33 k"; gesucht der Halbmesser des Begrenzungskreises.

49) Durchmesser der Kugel = 2' 6" dd, Höhe des Abschnitts = 5"; gesucht der Inhalt des Kugelabschnitts (Segments).

50) Kugeldurchmesser 3'; Halbmesser des Durchschnittskreises = 2'; gesucht der Kubikinhalt der beiden Kugelabschnitte.

51) Halbmesser eines Durchschnittskreises der Kugel 5"; Abstand desselben vom Mittelpunkte 6"; gesucht der Kubikinhalt des Kugelabschnitts.

52) Kubikinhalt eines Kugelabschnitts 8 k'; Höhe 2'; gesucht der Halbmesser der Kugel.

53) Inhalt des Kugelsegments 4 k'; Höhe = dem Halbmesser des Begrenzungskreises; wie groß sind Höhe und Halbmesser?

54) Eine Zuckersiederpfanne hat einen Durchmesser von 4' für ihren Begrenzungskreis und eine Höhe oder Tiefe von 25", wieviel Quart hält dieselbe?

Addire das Quadrat der Höhe zum dreifachen Quadrat des Radius der Grundfläche und multiplicire diese Summe mit der Höhe und mit 0,5236, so ist das Produkt der Kubikinhalt.

$$x = 481{,}26 \text{ Quart.}$$

55) Ein Gefäß soll die Form eines Kugelabschnitts haben und 120 Quart preuß. fassen oder 64 mal 120 k" Inhalt haben; die Tiefe soll $\frac{1}{3}$ der Weite werden. Gesucht die Tiefe, Weite und der Kugelhalbmesser.

56) Von einer hölzernen Kugel (sp. Gew. 0,5) sollen 9" d aus dem Wasser herausragen; gesucht der Durchmesser der Kugel.

57) Wie tief sinkt eine hölzerne Kugel von $1\frac{1}{2}$' Durchmesser im Wasser ein, wenn das spec. Gew. des Holzes = 0,5 ist?

58) Kugeldurchmesser 2′; in einer Entfernung von 4″ wird der größten Kreisfläche parallel eine Ebene gelegt; gesucht der Kubikinhalt der zwischen beiden Kreisen liegenden Kugelzone (Kugelgürtel).

59) Durchmesser der Kugel 3′; 5″ und 7″ von der Oberfläche werden 2 parallele Ebenen durch die Kugel gelegt; gesucht der Kubikinhalt der Kugelzone; ebenso, wenn die bezeichneten Zahlwerthe 2,4′ d; 8″ d und 1,8′ d sind.

60) Halbmesser der Kugel 3′ d; nach einer Seite vom Mittelpunkte begrenzen zwei parallele Kreise von 5″ d und 7″ d Radius eine Kugelzone, wie groß ist der körperliche Inhalt derselben?

61) Radien der Begrenzungskreise der Kugelzone = 3′ und 4′, Höhe derselben $1\frac{1}{2}$′; gesucht der Kubikinhalt.

62) Kubikinhalt des Kugelgürtels 8 k′; Halbmesser des einen Begrenzungskreises 2′; Höhe der Zone 1′; gesucht der Radius des andern Begrenzungskreises.

63) Kubikinhalt der Zone 5 k′ 694 k″ d; Radius der Kugel 2′; Höhe oder Dicke der Zone 8″ d; gesucht die Entfernung der größern Grundfläche vom Mittelpunkte der Kugel.

Zusammenstellung

der

wesentlichsten Wahrheiten über die mathematischen Raumgrößen

und ihre Beziehungen zu einander.

Werfen wir am Schlusse noch einen Blick auf den durchlaufenen Weg zurück, so gingen wir von der Betrachtung des physikalischen oder natürlichen Körpers aus, durch dessen Betrachtung wir eine geistige Anschauung des mathematischen Körpers, der mathematischen Fläche und Linie, sowie des Punktes erhielten; durch Bewegung des Punktes, der Linie und Fläche konnte man Linien, Flächen und Körper erzeugen. Wir setzten unsere Betrachtungen, welche am Würfel begonnen hatten, an den senkrechten Säulen, am Cylinder, an der Pyramide, dem Kegel, den regelmäßigen Körpern und der Kugel fort und kamen dadurch zu den wichtigsten Wahrheiten über Linien, Winkel, Flächen und Körper, ihre wesentlichsten Eigenschaften und Beziehungen zu einander. Dieselben mögen hier in kurzen Andeutungen zusammengestellt werden.

I. Der natürliche Körper ist das Sinnbild oder das Anschauungsmittel des mathematischen. Alle Körper haben 3 Ausdehnungen: von vorn nach hinten, von rechts nach links, von oben nach unten oder von West nach Ost, von Süd nach Nord und in der Richtung vom Zenith zum Nadir oder von oben nach unten.

II. Am Körper nimmt man als die Begrenzung desselben die Oberfläche wahr, eine Raumgröße, welche nur nach zwei Richtungen hin, von vorn nach hinten und von rechts nach links, oder von West nach Ost und von Nord nach Süd ausgedehnt ist. Diese Oberfläche ist entweder durch eine einzige allseitig gekrümmte Fläche gebildet, in welcher sich nach keiner Richtung gerade Linien ziehen lassen, wie bei der Kugel oder durch zwei

Flächen, eine ebene und einseitig gekrümmte, in welcher wenigstens nach einer Richtung sich Gerade ziehen lassen, welche ganz in die Fläche hineinfallen, wie bei dem Kegel, oder durch zwei ebene und eine einseitig gekrümmte Fläche, wie beim Cylinder oder durch vier ebene, geradlinig begrenzte, dreiseitige Flächen, wie beim Vierflächner oder der dreiseitigen Pyramide oder durch mehr und mehrseitige geradlinige Figuren.

III. Die Fläche wird von Linien, entweder einer krummen, oder einer krummen und einer Geraden oder von drei und mehr Geraden eingeschlossen. Die Linie hat nur eine Ausdehnung in die Länge.

IV. Die Linie ist durch zwei Punkte, die Endpunkte begrenzt. Der Punkt hat gar keine Ausdehnung.

V. Es giebt also drei Raumgrößen: den Körper mit 3, die Fläche mit zwei Ausdehnungen und die Linie mit einer.

VI. Der Punkt hat keine Ausdehnung, also auch weder Größe, noch Gestalt. Es giebt weder große, noch kleine Punkte; weder runde, noch eckige. Die Größe und Gestalt hängt nur von der Ausdehnung, von der Zahl der Ausdehnungen, oder von der Art und Weise derselben ab.

VII. Alle Raumgrößen entstehen durch Bewegung. Die Bewegung bei der Linie und Fläche kann eine verschiedene sein, eine, welche beim Fortschreiten der früheren Lage parallel bleibt oder eine drehende.

VIII. Der sich nach einem andern Punkte hin bewegende Punkt erzeugt die Linie; die sich nach einem außerhalb derselben und ihrer Richtung bewegende oder drehende Linie, aber nicht um ihre eigne Achse, erzeugt die Fläche; die sich nach einem Punkte außerhalb der Fläche und ihrer Richtung bewegende Fläche erzeugt den Körper.

IX. Vergleichen mit einander kann man nur Raumgrößen von gleich vielen Ausdehnungen oder Raumgrößen von gleicher Art; also Körper mit Körpern, Flächen mit Flächen, Linien mit Linien.

X. Bei dieser Vergleichung kann man nur die Größe und Gestalt in das Auge fassen. Die Übereinstimmung an Größe heißt Gleichheit schlechtweg (=), die Gleichheit an Gestalt heißt Ähnlichkeit (∾). Zwei Raumgrößen können also 1) an Größe und Gestalt zu gleicher Zeit gleich oder kongruent sein (≌) oder

2) nur an Größe gleich (=) oder 3) nur an Gestalt gleich (∾) oder 4) weder an Größe, noch an Gestalt gleich.

XI. Ob zwei Raumgrößen kongruent, gleich, ähnlich oder weder gleich, noch ähnlich sind, das hängt von ihrer Bildungsweise, von ihrem Entstehungs- oder Bildungsgesetze ab. Dieses Bidungsgesetz ist entweder eines und dasselbe, oder ein ähnliches oder weder dasselbe noch ähnlich. So kann sich ein Punkt, eine Linie, eine Fläche wiederholt in derselben Weise und nach demselben Gesetze bewegen, oder nach einem ähnlichen oder nach einem verschiedenen, so daß man kongruente, gleiche, ähnliche oder an Größe und Gestalt verschiedene Raumgrößen erhält.

XII. Kongruente Körper sind solche, welche von gleichvielen, unter sich bezüglich kongruenten Flächen eingeschlossen werden, welche in derselben Anordnung vorhanden sind, dieselben Flächen- und Linienflächenwinkel haben. Ist aber die Anordnung der Theile, welche übrigens dieselben sind, eine entgegengesetzte, so daß eine Umkehrung derselben nothwendig wird, um Kongruenz zu machen, so sind die Körper symmetrisch. Denkt man sich den Raum, welchen ein Körper einnimmt, leer, so kann man den kongruenten Körper so hineinsetzen oder hineingesetzt denken, daß derselbe den Raum in derselben Weise und vollständig, wie der ursprüngliche Körper ausfüllt. Das Bildungsgesetz kann aber auch nur ein ähnliches sein, wie bei Entstehung verschieden großer Würfel. Die Zahl der Flächen ist noch dieselbe, die Flächen sind aber nicht kongruent, sondern ähnlich; Flächen- und Linienflächenwinkel und Anordnung der Theile sind dieselben. Ebenso entstehen entweder kongruente oder ähnliche oder von einander verschiedene Linien und Flächen, je nachdem das Bildungsgesetz dasselbe, ein ähnliches oder ein verschiedenes war.

Kongruente Körper, Flächen und Linien sind nach demselben Bildungsgesetze entstanden; ähnliche nach einem ähnlichen.

XIII. Bei kongruenten Körpern sind die Flächen, welche dieselben einschließen, bezüglich kongruent; Flächenwinkel, Linienwinkel und Anordnung der kongruenten Flächen ist dieselbe; alle Kanten sind gleich. Bei ähnlichen Körpern findet dasselbe Statt; nur sind die in derselben Weise geordneten und gestalteten Flächen nicht kongruent, sondern ähnlich und die Kanten der einen, sowie überhaupt alle linearen Dimensionen stehen zu den entsprechenden

Dimensionen der andern in einem bestimmten, sich gleichbleibenden Verhältnisse.

XIV. Kongruente Flächen stimmen in der Anzahl der Seiten oder in der Begrenzungslinie, in den Winkeln und in der Anordnung der Bestandtheile ganz überein und können zur Deckung gebracht werden. Die Ähnlichkeit der Figuren ist an die Winkelgleichheit, an dieselbe Anordnung der Winkel und daran gebunden, daß die Seiten, welche dieselben Winkel einschließen oder denselben Winkeln gegenüberliegen, in der einen, wie in der andern Figur dasselbe Verhältniß zu einander haben. (Verhältnißgleichheit.)

XV. Alle Geraden sind ähnlich oder nach einem ähnlichen Bildungsgesetze entstanden; dieselben werden kongruent, wenn sich zwei Punkte in derselben Weise, mit gleicher Schnelligkeit und gleichlange bewegt haben, oder von Zeit und Geschwindigkeit abgesehen, wenn ein Punkt wiederholt nach einem andern sich in derselben Weise hinbewegt. Von den krummen Linien sind die nach demselben Bildungsgesetze entstandenen auch kongruent, z. B. zwei Kreisbogen von gleichviel Geraden in Kreisen mit demselben, oder ähnlich, in Kreisen mit verschiedenen Halbmessern.

XVI. Die Konstruktion oder Erzeugung von Raumgrößen hängt davon ab, daß man entweder alle Bestandtheile und ihre Anordnung kennt oder doch hinreichend viele, sogenannte bestimmende Stücke, welche so beschaffen sind, daß wenn dieselben in vorgeschriebener Weise angeordnet werden, die noch fehlenden Bestandtheile sich von selbst mit ergeben. Ebenso hängt die Bildung ähnlicher Figuren von der Kenntniß der Seitenverhältnißgleichheit und Winkelgleichheit ab, oder doch davon, daß man von den zur Ähnlichkeit gehörigen Bestimmungsstücken hinreichend viele kennt und richtig anordnet. Alle Konstruktionen werden mit Zirkel, Winkel, Lineal und Transporteur ausgeführt.

XVII. Die Größe der Raumgrößen hängt von einer Ausdehnung ab, wie bei der Linie, von zwei Ausdehnungen, wie bei der Fläche, von drei Ausdehnungen, wie bei dem Körper.

XVIII. Eine Raumgröße wird durch eine andere von derselben Art gemessen, wenn man untersucht, wie oft das Linien-, Flächen- oder Körpermaß (Fuß, Quadratfuß, Kubikfuß 2c.) in derselben enthalten ist. Das Maß, oder irgend ein Maß, kann entweder theil-

weise, oder irgendoft oder irgendoft und noch theilweise in der zu messenden Raumgröße enthalten sein; dann nennt man den Maßstab und die zu messende Raumgröße kommensurabel; zwei Linien sind kommensurabel, wenn man dieselben durch Wiederholung des Maßstabes entstanden denken kann. Wäre der Maßstab unendlich klein, wobei freilich der Quotient zur Bezeichnung des Werthes der Raumgröße sehr groß würde, so müßten alle Linien kommensurabel sein. Aber wir kennen das Unendlichkleine nicht; es ist auch kein fertiger Begriff. Wissen wir aber nur, wie bei der Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, daß dieselbe entsteht, wenn man die Kathete mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, welche $>$ als 1 aber $<$ 2, aber doch kein unächter, fertiger Bruch ist, sondern nur eine Zahlgröße, welcher wir uns bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annähern können, so haben wir es mit inkommensurablen Größen zu thun. Für die Praxis verschwindet alle Inkommensurabilität sehr bald.

XIX. Krumme Linien, krumme Flächen, gekrümmte Körper werden durch Ein- und Umschreibung möglichst vieler und möglichst kleiner gerader Linien, Flächen und gerадflächig begrenzter Körper gemessen. Ein möglichst kleiner Theil einer krummen Linie, Fläche und eines gekrümmten Körpers kann als gerade betrachtet werden.

Da man nicht immer direkt untersuchen kann, wie oft sich der Maßstab abtragen läßt, so muß man ein, zwei, drei bestimmende Dimensionen messen, die Zahlwerthe mit einander multipliciren und das Produkt auf die gehörige, entsprechende Maßeinheit (Linien-, Flächen- oder Körpereinheit) beziehen.

XX. Das Gewicht der Körper hängt von ihrem Volumen, dem absoluten Gewichte des Wassers und dem specifischen Gewichte des betreffenden Körpers ab.

XXI. Die Körperinhalte sind gleich, wenn sich eine bezeugende Fläche senkrecht oder schief bis zu derselben Höhe bewegt; dasselbe findet bei den Flächen Statt, welche durch eine senkrecht oder schief mit sich selbst parallel bis zu einer gewissen Höhe bewegte Gerade entstanden sind. Sind die drei bestimmenden Dimensionen zweier Körper a, b, c und α, β, γ; zweier Flächen a, b und α, β; zweier Linien a und α, so sind die Körper gleich, wenn a.b.c mal Kubikeinheit $= \alpha.\beta.\gamma$ mal Kubikeinheit ist;

wird $a = \alpha$, so verhalten sich die Körper, wie die Produkte aus den beiden andern Zahlen, wie $b.c : \beta.\gamma$; wird $a = \alpha$ und $b = \beta$, so verhalten sich dieselben noch wie ihre dritte Dimension oder wie $c : \gamma$. Sind bei den Flächen $a = \alpha$ und $b = \beta$, oder doch $a.b = \alpha.\beta$ so sind dieselben gleich, weil $a.b$ mal Flächeneinheit $= \alpha.\beta$ mal Flächeneinheit. Ist nur $a = \alpha$, so verhalten sich die Flächen bezüglich ihrer Größe, wie ihre andere Dimension. Linien sind gleich, wenn $a = \alpha$, oder wenn $a \lesseqgtr \alpha$ ist, so verhalten sich die Linien eben wie $a : \alpha$.

XXII. Ähnliche Körper verhalten sich bezüglich ihrer Umfänge, wie die entsprechenden Dimensionen, bezüglich ihrer Oberflächen, wie die Quadrate, bezüglich ihrer Kubikinhalte wie die Würfel über den entsprechenden Linien oder Dimensionen.

Ähnliche Figuren verhalten sich bezüglich ihrer Umfänge, wie die entsprechenden, ähnlich liegenden Linien; bezüglich ihrer Größe, wie die Quadrate über diesen Linien.

Ähnliche Linien verhalten sich wie die Maßzahlen, welche angeben, wie oft die zu messende Einheit in denselben enthalten ist.

XXIII. Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen dem rechnerischen Verfahren bei der Größenbestimmung einer Raumgröße und zwischen dem konstruktiven.

Große Linien, Flächen und Körper stellt man durch ähnliche, entsprechende kleinere Linien, Flächen und Körper dar. Nimmt man $\frac{1}{n}$ des Maßstabes, so werden dann alle Umfänge $\frac{1}{n}$, alle Flächen $\frac{1}{n.n}$, alle Körper $\frac{1}{n.n.n}$ von den ursprünglichen Linien, Flächen und Körpern in der Natur. Eine solche planmäßige Verkleinerung heißt Verjüngung. Umgekehrt kann man Verjüngtes auch wieder vergrößern.

XXIV. Im Verlaufe der Beschäftigung mit den Raumgrößen werden bei uns durch die Anschauung gewisse Sätze und Wahrheiten geweckt, welche allen Menschen, die überhaupt in Bezug auf ihren Verstand nicht abnorm organisirt sind, eigenthümlich und unumstößlich sind. Sie liegen in jedem Menschengeiste, wie in der Erbse die keimende Kraft, welche bei der günstigen Bedingung immer ein ähnliches Individuum bildet, müssen aber durch die Anschauung angeregt werden, wie die Keimkraft durch Feuchtigkeit, Wärme, Licht 2c. Ein Mensch ohne Anschauung, welche hier auf die Sinne überhaupt, auf das Gesicht und den

Tastsinn sich gründet, ist für Mathematik, besonders Geometrie unbrauchbar. Er versteht, auch wenn er Gehör hat, von Ausdehnungen, Größe und Gestalt ebenso wenig, als der Blinde von der Farbe. Wie der Blinde sich die Farben durch Töne, so müßte sich der Blinde und Tastsinnlose das Räumliche durch das Zeitliche ersetzen. Ton ist aber nicht Farbe und Raum ist keine Zeit.

Diese im Menschengeiste liegenden, durch die Anschauung zu erregenden Haupt- oder Grundsätze, Axiome, sind zweifacher Natur, rechnerischer und räumlicher, theils gemischter. Also: Gleiche Linien, Flächen, Körper zu gleichen gethan oder von gleichen genommen, geben wieder gleiche Linien, Flächen und Körper. Allgemein: Nimmt man mit gleichen Größen gleiches Verfahren vor, so erhält man wieder Gleiches; im Gegentheile aber Ungleiches. Sind zwei Größen einer dritten gleich oder ähnlich, so sind dieselben einander selbst gleich oder ähnlich. Das Ganze ist allen seinen Theilen gleich. Der Theil ist kleiner, als das Ganze.

Die Begriffe von Ausdehnung, Größe, Gestalt kommen uns nur durch die Anschauung — das Kind greift nach dem Monde; ebenso die Begriffe von Richtung, Lage, gleicher Lage, parallelen Linien ꝛc.

Die Gerade ist die kürzeste Linie zwischen zweien Punkten; die Theile der Geraden haben dieselbe Lage, wie die ganze Gerade; parallele Linien schneiden sich nicht, soweit man dieselben auch verlängert; die Gleichheit der Winkel ist nur durch die gleiche Lage im gleichen Sinne bedingt ꝛc. Zu allen diesen wesentlichen Sätzen kann uns nur die Anschauung leiten. Ob es möglich ist, ohne Anschauung zu denselben Grundsätzen und Grundbegriffen zu kommen, kann Niemand behaupten; je mangelhafter aber die Anschauung, desto geringer ist auch die Begriffsbildung bezüglich der Raumgrößen und ihrer Eigenschaften.

Wer keinen durch Anschauung zu bildenden Verstand hat, braucht auch keine Geometrie zu treiben, ja er kann es nicht.

Wenn die Axiome einmal klar sind, braucht man dieselben in einem Lehrbuche gar nicht mehr vorzusetzen oder anzuführen, außer gelegentlich. Je klarer der Verstand, je vollendeter die Anschauung, desto einfacher und von selbst, wie Grundsätze verständlich, kommen den Menschen die mathematischen Wahrheiten vor. Dem Newton war es, als spräche Euklid nur Axiome aus;

es giebt Schüler, Heil dem Lehrer, dem solche begegnen, bei denen man nur die Anschauung zu vermitteln hat, wenn sie dann von selbst die ganze Folge der geometrischen Wahrheiten von selbst finden sollen.

XXV. Bei der Auffindung der geometrischen Wahrheiten sind wir vom Körper ausgegangen und also zur Fläche, Linie und den Eigenschaften und Beziehungen der Raumgrößen zu einander gekommen; dieser Weg heißt der analytische. Dreht man aber den Weg um, geht vom Punkte zur Linie, von der Linie zur Fläche, von der Fläche zum Körper, so geht man den synthetischen Weg. Läßt man dabei die Raumgrößen durch Bewegung entstehen und entwickelt zugleich die Eigenthümlichkeiten aus dieser ihrer Entstehungs- oder Naturgeschichte heraus, so entwickelt man genetisch; hält der Lehrer den Schüler an, auf dem Grunde der Naturgeschichte der Raumgrößen ihre Eigenthümlichkeiten und die auf dieselben bezüglichen Wahrheiten selbst zu finden, so heißt die Methode genetisch-heuristisch. Diese allein eignet sich für den ersten Unterricht zur wahren Geistesbildung. Der gebildete Geist aber faßt auch das fertig Gegebene ohne mehr der Entwickelung zu bedürfen, er nimmt die Sache, wie ein Dogma oder einen Glaubenssatz an; dogmatischer Weg. Der letztere, weil nicht entwickelnd und Überzeugung bildend, paßt nicht für die Jugendbildung.

XXVI. Die mathematischen Sätze sind wesentlich von zweierlei Art. Einmal Lehrsätze oder Theses, in denen z. B. von einem Dreieck, z. B. vom gleichschenkligen, unter gewissen Bedingungen und Voraussetzungen, eben unter der Voraussetzung der Gleichschenkligkeit, eine gewisse Behauptung ausgesprochen wird, z. B. daß die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind. Der Satz selbst oder die Behauptung ist die Thesis, die Voraussetzung heißt Hypothesis. Der Beweis wird geführt, indem man sich entweder auf Grundsätze, auf Folgerungen des gesunden Menschenverstandes oder schon bewiesene Lehrsätze beruft (direkter Beweis). Man kann aber auch die Möglichkeit des Gegentheiles annehmen und die daraus hervorgehenden irrigen Folgerungen (ad absurdum führen) zeigen und darum die Möglichkeit des Gegentheiles verneinen (indirekter oder apagogischer Beweis).

XXVII. Dieses Buch macht nur annähernd auf den Namen

eines systematischen Anspruch. Die Anordnung des Materials muß nach seiner inneren Zusammengehörigkeit gemacht sein, so daß zugleich der dritte, vierte rc. nte Satz durch einen vorhergehenden sich beweisen läßt. Die Beweismöglichkeit allein, wie bei Euklid, bietet ein nur unvollständiges System. Das Zusammengehörige ist in diesem Bruche annäherud zusammengestellt, so daß auch auf die Möglichkeit der Entwickelung und des Beweises Rücksicht genommen ist, um also zur Wissenschaftlichkeit vorzubereiten.

XXVIII. Die andere Art mathematischer Sätze sind Aufgaben, entweder rechnerischer Natur oder konstruktiver. Der Schüler soll, wenn ihm gewisse Bestandtheile von Figuren, Körpern rc. gegeben sind, unter der Voraussetzung, daß er mit Zirkel, Lineal und Winkel umgehen kann, dieselben zeichnen. Die Aufgaben sind für den mathematischen Unterricht von ganz besonderer Bedeutung. Denn durch dieselben wird der Schüler angehalten, das Erkannte anzuwenden, das Wissen zum Können zu bringen, mögen nun mit bekannten Wahrheiten neue gefunden oder Konstruktionen ausgeführt werden. Das Können ist aber bei der Geometrie sehr nöthig, weil das Wissen außerdem hohl, ohne Anwendung ist und weniger Interesse bietet. Es wird ferner durch die Aufgaben des Schülers Denkthätigkeit, seine Erfindungskraft gestärkt; er kömmt zur Selbständigkeit. Die rechte Bildung für Wissen und Können führt zur Charakterbildung.

Ist die Aufgabe gelöst, so muß in der Lösung nach Grundsätzen oder schon bewiesenen Sätzen der Beweis für die Richtigkeit enthalten sein. Wie man freilich eine Aufgabe lösen soll, wie man erfinderisch werden soll, das ist schwer zu sagen. Der eine Mensch hat mehr Anlage, als der andere und Übung macht den Meister. Die gewöhnliche Methode ist die analytische. Man nimmt an, das Geforderte sei geschehen und entnimmt also aus den fertig gedachten Konstruktionen die Bedingungen und Möglichkeit derselben. Diese Analysis, verschieden von der vorher genannten analytischen Methode und von einem gewissen Theile der höhern Arithmetik, war besonders auch schon den Alten bekannt. Einem Lehrer, welcher seine Schüler durch viele, richtig und sauber auszuführende Aufgaben üben will, wird „die Geometrie der Alten in einer Sammlung von 848 Aufgaben“

von Dr. Lorenz Wöckel, Nürnberg, 1853. Bauer und Raspe, empfohlen.

XXIX. Wir wenden nun noch einmal den Blick zurück und stellen uns ein geometrisches Lehrgebäude auf in synthetischer Weise und unter Voraussetzung der genetisch-heuristischen Entwickelungsweise.

Man geht vom Punkte aus, der Raumgröße ohne alle Ausdehnung; läßt denselben sich in verschiedener Weise nach einem zweiten Punkte bewegen, ohne daß die dabei angedeutete Richtung verlassen wird (Gerade) oder anders (krumme, gebrochene Linie). An der Geraden lernt man Gestalt und Größe, Richtung und Lage kennen; die Bewegung der Geraden nach einem außerhalb derselben und ihrer Richtung liegenden Punkte erzeugt die Ebene, welche daran zu erkennen ist, daß eine Gerade nach allen Richtungen in derselben gedreht, immer vollständig in dieselbe mit allen ihren Punkten hineinfällt. Es giebt aber auch Flächen mit Erhöhungen und Vertiefungen, einseitig- und allseitig gekrümmte. Die Linie, welche sich in der Ebene dreht, beschreibt den Winkel, auch den Kreis und Kreisbogen, welcher ein Mittel zur Winkelmessung wird. Der Winkel ist eine ebene, nur auf zwei Seiten von Geraden eingeschlossene Fläche. Die Gerade muß durch einen Längenmaßstab gemessen werden; Bekanntschaft mit den Längenmaßstäben; Verjüngung. Man setzt dann zwei Gerade zu einander in Verbindung; vergleicht dieselben nach Größe und Gestalt und Lage; man kömmt zum Winkel, aber auch zu den parallelen Linien, ihren Eigenthümlichkeiten und Merkmalen. Drei Gerade können sich entweder in einem oder drei Punkten schneiden, Dreieck. Entstehung desselben durch Drehung einer veränderlichen Geraden; die Hauptbestandtheile des Dreiecks; die Summe der 3 Winkel eine konstante Größe; zwei S. S. größer als die dritte. Die Bedingungen, unter denen die Dr. Dr. nach Größe und Gestalt bestimmt oder konstruirbar sind; die Eintheilung der Dr. Dr. nach S. S. und W. W.; die Eigenschaften des gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen, umgekehrt das Dr., welches 3, 2 gleiche oder 3 ungleiche Winkel hat oder einen rechten oder stumpfen. Vom Dreieck kömmt man in analoger Weise zum Viereck und seinen Eigenschaften [Parallelogramm (Quadrat, Rhombus, Rhomboid, Oblongum), Paralleltrapez, Trapezoid]

Vieleck, besonders dem regelmäßigen Vieleck. Man lernt wieder die Kongruenzbedingungen der geradlinigen Figuren, ihre Konstruktionsmöglichkeit und ihre Eigenthümlichkeiten kennen. Vom regelmäßigen Vielecke findet der Übergang zum Kreise, als der letzten Grenze für die regelmäßigen Vielecke Statt. Vorher aber fände erst eine Betrachtung und Vergleichung der geradlinigen Figuren und des Kreises bezüglich ihrer Fläche oder ihrer Größe und der Ausmessung derselben durch das Flächenmaß und der Verwandlung der Figg. und Theilung derselben Statt; dann wendete man sich zur Untersuchung der Bedingungen, an welche die Ähnlichkeit der Figuren und die Konstruktion ähnlicher Figuren geknüpft ist und in welchen Beziehungen ähnliche Figuren zu einander bezüglich des Umfangs und der Fläche ständen. Die Betrachtung des Kreises und seiner Eigenschaften, der Linien, Winkel, Figuren in dem Kreise und um den Kreis würde die Elemente der Geometrie der Ebene schließen. Man wendete sich aber nun zur Körperwelt und ließ geradlinige Figuren oder Kreise in unveränderter oder veränderlicher Größe mit sich selbst parallel sich emporbewegen, wodurch man, ebenso wie durch Drehung einer veränderlichen oder unveränderlichen Ebene die Körper erzeugen könnte. Man erhielte dann als Hauptrepräsentanten Prismen, Cylinder, Pyramiden, Kegel, regelmäßige Körper und Kugel. Die Körper und ihre Eigenthümlichkeiten bezüglich ihrer Kanten, Ecken, Flächen- und Linienflächenwinkel 2c., bezüglich ihrer Bestimmung durch hinreichende Bestandtheile lernte man kennen (Kongruenz), ebenso die Vergleichung der Körper bezüglich ihrer Größe und ihrer Ausmessung; ebenso die Vergleichung der Körper hinsichtlich ihrer Gestalt oder Ähnlichkeit. Man fände die verschiedenen Beziehungen, in denen ähnliche, kongruente, gleiche, weder gleiche, noch ähnliche Körper stehen.

Das Alles zu finden wäre für den Geist eine Freude und ein Bildungsmittel; man kann aber auch von den gefundenen Wahrheiten, wenn die Erkenntniß von der Fertigkeit unterstützt wird, vielfachen, interessanten Gebrauch machen, am Himmel und auf der Erde, in andern Wissenschaften und in der Industrie, welche ihre Schwingen immer höher hebt.

Anhang,

enthaltend

das Wichtigste aus der mathematisch-astronomischen Geographie.

An die Lehre von der Kugel möge sich das Wichtigste aus der mathematischen Geographie anschließen, soweit überhaupt auf der Stufe des Wissens, für welche dieses Buch geschrieben ist, eine Behandlung dieses Gegenstandes möglich ist; das Wesentlichste der physikalischen Geographie dürfte seine Stelle in den geeigneten Kapiteln der Naturlehre oder Physik finden.

Zwar waren die alten Völker, sowie die Wilden und Kinder unserer Zeit der Ansicht, daß die Erde eine Scheibe sei, als deren Mittelpunkt in der Regel eine wichtige Stadt oder ein sonst wichtiger Ort eines der alten Völker angesehen wurde; zwar hat es, wie überhaupt mit der stetigen Entwicklung des menschlichen Wissens, sehr lange gedauert, ehe man von der Kugelgestalt der Erde sich überzeugte; zwar kann man und wenn man sich, wie Gay-Lussac und Andere gethan, sehr hoch in einem Luftballon erheben wollte, von der Erde als einer Kugel doch nur immer höchstens die Hälfte übersehen, wie dieß vom Monde aus der Fall sein muß: aber um so klarer und sicherer, auf Anschauung, Entwickelung und mathematischer Stringenz ruhend sind die Gründe, welche man für die Kugelgestalt der Erde vorbringen kann. Der griechische Dichter Homer, 1000 v. Chr., stellt uns in seiner Odyssee, welche die Irrfahrten des Odyßeus oder Ulysses beschreibt, die Erde als eine Scheibe dar, welche ringsum vom Okeanosstrome umflossen wird, hinter welchem die Säulen als Stützen des Himmels sich befinden. Ihr wird der Beiname groß, ausgedehnt, beigelegt (Il. VII, 446; XX, 58; Od. I, 98. XIX, 107). Daß sich Homer die Erde rund dachte,

folgt aus seiner Annahme, daß der Ocean dieselbe in einem Kreise umströme und daß er sich dieselbe nicht als eine Kugel, sondern als eine Fläche (also runde Fläche, Erdscheibe) vorstellte, geht aus Od. XII, 380 hervor, nach welcher Stelle der im Osten aufgehende Helios sich des Anblickes seiner Rinder am Westende der Erde erfreuen konnte. Es haben zwar Einige dem Homer eine Kenntniß von der Kugelgestalt der Erde beilegen wollen; allein berücksichtigt man, welche Beobachtungen dazu gehören, auf die Kugelgestalt der Erde zu kommen, und vergleicht man dieß mit der Stufe, auf welcher einstens Homers Wissenschaft des gestirnten Himmels und der Physik überhaupt stand, so muß man annehmen, daß Homer sich die Erde nur als Fläche vorstellen konnte. An eine Eintheilung der Erde nach Welttheilen war zur homerischen Zeit noch nicht zu denken; die Ländermassen, welche man kannte, waren ihrem Umfange nach gering, man kannte dieselben zu wenig, sie erschienen nur als einzelne um Griechenland herum liegende Länder. Der Ocean ist ein großer Strom, welcher die Erde ringsum umgiebt und von welchem das Meer, alle Flüsse und Quellen entfließen. Er ist ein ruhig dahinfließender, breiter, tiefer und der wasserreichste Strom, dessen Quelle weder, noch Abfluß man anzugeben im Stande ist. Sonne und Sterne gehen aus dem Ocean auf und in denselben unter; am berühmten Schilde des Achilles ist der Ocean am Ende angebracht. Diesen vom Meere wohl zu unterscheidenden Ocean hat Homer „den in sich selbst zurückfließenden" genannt (Il. XVIII 399. Od. XX, 65). Das Nähere s. bei J. B. Friedreich „die Realien in der Iliade und Odyssee". 2. Afl. Erlgen 1856. §. 9 und §. 13. Für Homer liegt Griechenland in der Mitte. Delphi, wo die Pythia weissagte, war der Mittelpunkt der Scheibenoberfläche. Bei den Juden, zu Jesaias Zeit, 770 v. Chr. war man zweifelhaft, ob die Erde eine viereckige oder kreisrunde Platte sei, um welche das Meer floß; Jerusalem aber lag in der Mitte. Die Hindus hielten ihren Götterberg Meru auch für den Mittelpunkt der auf dem Weltmeer schwimmenden Erdscheibe. Thales aus Milet, 590 v. Chr., stellte sich die Erdscheibe im hohlen Himmelsraume mit der Luft unter und über derselben schwimmend vor und Pythagoras aus Samos, 540 v. Chr., vermuthete die Kugelgestalt der Erde, wenn auch

der große Geschichtschreiber Herodot dieß, 444 v. Chr., noch spaßhaft findet. Aristoteles, der große Lehrer Alexanders des Großen, 350 v. Chr. tritt der Ansicht des Pythagoras bei und erklärt die Erde für eine freischwebende Kugel, rings von Luft umgeben, mitten in der Himmelskugel, wenn auch noch unbeweglich und an einer und derselben Stelle befindlich. Also hat sich allmälig die richtige Ansicht ausgebildet, für welche wir jetzt folgende Gründe anzugeben vermögen. Um zunächst einmal vorzugreifen, sei hier bemerkt, daß die Erdkugel unter dem Äquator einen Durchmesser von 1719 geogr. Meilen hat, zwischen den beiden Polen nur von 1713 geogr. Meilen. Nimmt man an, daß der Erddurchmesser 1728 geogr. Meilen habe, was im Vergleich zum ganzen Durchmesser wenig mehr wäre, so betrüge der höchste Berg Asia's oder Amerika's eine Meile oder $^1/_{1728}$ des Erddurchmessers. Machte man sich nun einen Globus von 12′ par. Durchmesser oder von 12 mal 12 mal 12 oder 1728‴ par., so würde der höchste Berg erst eine Linie hoch, was bei der Kolossalität des Globus eine verschwindende, die Kugelgestalt in keinerlei Weise störende Größe wäre. Auf solche Weise läßt sich also zunächst des Schülers Anschauung berichtigen, welcher vielleicht ziemlich steile Berge in seiner Nähe hat, deren Höhen natürlich als Verlängerungen des Erddurchmessers zu betrachten sind.

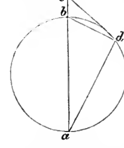
Die einzelnen Gründe für die Kugelstalt der Erde sind aber folgende.

1) Von fernen Gegenständen, z. B. von einem Schiffe mit Mastbaume und Segeln, von einem Kirchthurme eines benachbarten Ortes, von einem hochbeladenen Frachtwagen, welcher auf einer Landstraße daher gefahren wird, sieht man zunächst die obersten Theile und zwar verjüngt; wäre die Erde eine Scheibe, so müßte man den ganzen Gegenstand, wenn auch im Verhältniß zur Entfernung verjüngt sehen. Der zweite Fall findet nicht Statt, sondern der erste. Die Erde kann also keine Scheibe sein, bei welcher alle Punkte der Oberfläche in einer und derselben Ebene liegen, sondern muß eine kugelartige Gestalt haben. Bis zu welchem Grade der Genauigkeit freilich die Erde kugelförmig ist, das folgt aus solchen allgemeinen und noch unbestimmten Erfahrungen nicht. Wäre die Erde eine Scheibe, so müßte man

alle Theile eines Thurmes zugleich sehen, ja sogar die untern breitern Theile deutlicher als die Spitze, wie dieselbe früher verschwinden müßte. Diese Erfahrung gilt, wohin man auch gehe; nach Osten oder Westen; aber auch nach Norden und Süden, soweit man eben vorgedrungen ist; nach Norden ist man weiter vorgedrungen, als nach Süden; ja man giebt sich jetzt der Hoffnung hin (Petermann, Mittheilungen rc.), daß man nächstens einmal um den Nordpol herumsegeln werde. Daran schließt sich Ähnliches an. Hätte man eine konkave, mit Laternen besetzte Straße, so könnte man auf der konkaven Fläche stehend, alle Laternen mit ihrem Lichte auf einmal übersehen; wäre umgekehrt die konvexe Fläche mit Laternen besetzt, so würde man zur Konvexität auf- oder absteigend immer nur einen Theil der Laternen auf einmal übersehen; beim Gehen würden die einen verschwinden, die andern sichtbar werden. Wir wollen die Erfahrung in einem großartigen Maßstabe anwenden. Sei nämlich die Erde die Straße, seien die leuchtenden Himmelskörper die Laternen, so sehen wir den nördlichen Polarstern in Eisenach gegen 51° eines am Himmel gedachten, durch den Polarstern und den Südpunkt gehenden größten Kreises (Meridians) über dem Horizonte. Gehen wir weiter nach Norden, z. B. 15 geogr. Meilen, so rückt der Polarstern um einen Grad über den Horizont herauf; könnten wir von unserem Wohnorte gegen 40 mal 15 geographische Meilen genau von Süden nach Norden gehen, so müßte uns der Polarstern im Zenith oder Scheitel stehen. Umgekehrt muß, wenn die Erde eine Kugel ist, der Polarstern für den Äquatorbewohner im Horizonte, für einen jenseits des Äquators Wohnenden noch unter dem Horizonte sich befinden. Dieß findet man genau bestätigt, also muß die Erde eine kugelförmig gekrümmte Oberfläche haben. Anstatt des Polarsternes konnte man natürlich jeden anderen Stern in der Richtung von Norden nach Süden annehmen. Denken wir uns ferner das Himmelsgewölbe sammt seinen Sternen ruhend (bei Planeten und Kometen, Nebenplaneten ist es freilich nicht wahr, so wenig als bei den Fixsternen), denken wir uns weiter die ruhende Erde, von Süden nach Norden mit ihrer Achse gerichtet und von Westen nach Osten in 24 St. um die Achse gedreht, so müssen sich die Sterne von Osten nach Westen über unsern Häuptern dahin zu bewegen scheinen; also

auch die Sonne muß täglich einen ganzen Kreis oder 360° zurücklegen. Auf einen Viertelkreis kömmt 6 St. Zeitunterschied, auf einen Grad 4 Min. Zwei Menschen wohnen auf dem Äquator, aber nur ¼ Kreis von einander entfernt, so hat der östlich Wohnende alle Zeiten 6 St. früher, wie dieß später weiter erörtert werden wird.

Anm. Ein in der Erdoberfläche (die Erde als vollkommene Kugel gedacht) befindliches Auge hat gar keine Aussichtsweite oder die Länge des Sehstrahles ist = Null. Je höher aber der Standpunkt eines Beobachters über der Erdoberfläche oder dem Niveau des Meeres ist, desto mehr, wenn auch nicht proportional, wächst die Aussichtsweite. Dabei ist natürlich auf die terrestrische Strahlenbrechung gar keine Rücksicht genommen. Von der Wartburg bei Eisenach aus (gegen 1400′ rhl. über dem Meeresniveau) ist der Sehstrahl an die als Kugel gedachte Erde gegen 10 Meilen lang; von einem eine Meile hohen Berge gegen 42 Meilen. Die Berechnung läßt sich leicht machen. Denn ist beistehender Kreis ein Durchschnitt der Erde (größte Kreisfläche), bc die Erhebung über das Meeresniveau und cd der Sehstrahl, so ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke adc und dbc (W. a = W. bdc, weil beide die Hälfte des Bogens bd zum Maße haben, s. Lorey, Lehrb. d. eb. Geom. S. 148, W. c ist beiden Dr. Dr. gemein), daß bc : dc = dc : ab, oder daß $dc^2 = ab.bc$ und $dc = \sqrt{ab.bc}$



$$dc = \sqrt{(1719.24000 + 1400).1400}\,\square' \text{ preuß.}$$
$$= 10{,}02 \text{ Meilen preuß. (s. S. 187).}$$

Nach der eben gemachten Angabe ließe sich leicht eine Tabelle entwerfen, aus welcher man die Aussichtsweite bei einer gewissen Erhebung über die Oberfläche des Meeres entnehmen könnte.

Erhebung über die Meeresfläche.	Halbmesser des Gesichtskreises in Meilen.
10 Fuß	0,9 Meilen
50 „	2 „
1500 „	10,625 „
3000 „	15,04 „
4000 „	17,36 „

Erhebung über die Meeresfläche.	Halbmesser des Gesichtskreises in Meilen.
14000 Fuß	32,5 Meilen
16000 „	35,7 „
24000 „	41,56 „

Dabei sei bemerkt, daß eine durch das Auge des Beobachters gelegte wagerechte Ebene, welche die sichtbare Hälfte der Himmelskugel von der unsichtbaren scheidet, der Horizont heißt. Diesen Horizont könnte man auch den scheinbaren Horizont nennen; er würde der die Erdkugel berührenden wagerechten Ebene gleich sein, welche durch unsern Standpunkt gelegt wird. Der Bewohner des Nordpols hat den Nordpol des Himmels als höchsten Punkt über sich oder im Zenith, den Äquator als Horizont; wer auf dem Äquator wohnt, der hat den Nordpol im Horizont und einen Punkt des Himmelsäquators im Zenith. Zenith und Horizont ändern sich stets mit dem Standpunkte des Menschen auf Erden. Von diesem scheinbaren Horizont unterscheidet man den wahren; der wahre Horizont liegt parallel mit dem scheinbaren durch den Mittelpunkt der Erde. Vom Zenith bis zum Horizont ist ein Viertelkreis. Der Abstand des wahren Horizontes vom scheinbaren ist so klein im Vergleich zu den Dimensionen des Himmels, daß der Anblick des gestirnten Himmels für den auf der Oberfläche befindlichen Beobachter derselbe ist, als ob er sich im Mittelpunkte des wahren Horizontes befände. Der durch Norden und Süden und einen beliebigen Ort auf der Erdoberfläche gelegte größte Kreis schneidet den Horizont in zwei Punkten, dem Nord- und Südpunkte; befindet sich ein Beobachter in der Meridianebene und blickt nach Süden, so liegt ihm der Ostpunkt um einen Viertelkreis vom Süden links, der Westpunkt ebenso weit rechts. Die Gegend zwischen Süden und Osten heißt südöstlich; zwischen Osten und Norden nordöstlich; ähnlich spricht man von südwestlich und nordwestlich. Die Linie, welche Nord- und Südpunkt mit einander verbindet, heißt die Mittagslinie. Es wird sich später zeigen, daß um den 21. März und Septbr. die Sonne im wahren Ostpunkte auf und im Westpunkte untergeht; aber am 21. Dcbr. um $23\frac{1}{2}°$ vom Ostpunkt nach Süden und um $23\frac{1}{2}°$ den 21. Juni vom Ostpunkt nach Norden auf- und entsprechend untergeht.

Versetzen wir uns auf den Inselsberg (gegen 3000 F. hoch)

und auf den Brocken (zwischen 3000 bis 4000 F. hoch), so erkennt man aus der Tabelle eine Aussichtsweite von beiden Punkten aus, welche zusammen gegen 33 Meilen beträgt. Ist nun die direkte Entfernung beider Punkte größer, als die Summe der Aussichtsweiten, so kann man den einen Punkt vom andern nicht mehr sehen. Von der Wartburg aus (1350 F.), sowie vom Gerberstein über Ruhla, welcher noch höher ist, kann man den Brocken sehen. Könnte man aber auch noch höher emporsteigen und die Erde vielleicht in einer Entfernung von einigen 50000 Meilen, wie z. B. vom Monde aus, betrachten, so würde zwar die Erde sich für uns verjüngen, weil der Gesichtswinkel, unter welchem der Durchmesser des Aussichtskreises erschiene, immer kleiner werden müßte, aber von einem gewissen Punkte an würde der Durchmesser des Aussichtskreises mit dem Durchmesser der Erde zusammenfallen. Dann könnte man die gerade dem Auge zugewendete Hälfte der Erde übersehen. Dieselbe würde sich aber als eine ebene Fläche in Kreisform zeigen, so daß die Punkte ihrer Oberfläche sich auf einen größten Kreis derselben projiciren. Hätten die Erdbewohner gerade Mondesneulicht und befänden wir uns auf der Seite des Mondes, welche der Erde zugewendet ist, so würden wir die Erde als eine helle, beleuchtete Scheibe, ungefähr 14 mal so groß an Fläche, als den Vollmond erblicken.

2) Die Mondfinsternisse lieferten schon früher den augenscheinlichsten Beweis, daß die Erde eine Kugel sei oder sich doch wenigstens der Kugelgestalt nähere, da nur der Schatten einer Kugel nach jeder Richtung hin einen kreisförmigen Durchschnitt giebt, nicht aber einen elliptischen — vorausgesetzt, daß die Lichtstrahlen, welche den dunklen Körper treffen, verlängert die Schattenfläche senkrecht treffen würden. Wenn nun beim Vollmonde Sonne, Erde und Mond in einer geraden Linie stehen, so muß die von der Erde 20 Millionen Meilen entfernte Sonne die ihr zugekehrte Erdhälfte zwar beleuchten, die Erde muß aber einen Schatten werfen, welcher sich auf dem 50000 Meilen entfernten Monde als kreisförmig darstellt. Ein solcher könnte nun zwar auch von einer Scheibe herrühren; der Schatten einer solchen würde sich aber für einen rechts oder links in derselben Ebene stehenden Beobachter als Ellipse darstellen. Der Schatten ist aber stets kreisförmig, folglich muß die Erde eine kugelförmige Gestalt haben.

3) Seit Magelhaens (1519) haben sehr viele Menschen die Erde von Westen nach Osten oder in umgekehrter Richtung umsegelt und sind von der entgegengesetzten Seite her zurückgekehrt. Das konnte zwar auch bei einer Walze der Fall sein und zu einem vollständigeren und mehr berechtigten Schlusse gehörte eigentlich auch noch, daß man nach Norden segelnd um den Nordpol und Südpol herum gekommen und von Süden her zurückgekehrt wäre oder umgekehrt. Eine solche Fahrt ist aber noch nicht gelungen. Man ist zwar zum Nordpol hin bedeutend, etwa bis zu einer Entfernung von 90 Meilen vorgedrungen und Dr. Kane, der Amerikaner, hat ein zu gewissen Zeiten eisfreies Polarmeer entdeckt; aber nach Süden hin ist wegen der Eismassen an ein so weites Vordringen noch nicht zu denken gewesen. Allein soweit man auf dem Festlande oder zur See nach Norden und Süden gekommen ist, hat man das durch die Kugelgestalt bedingte Kommen und Schwinden der Sterne und anderer Gegenstände bemerkt. Nimmt man beide Erfahrungen zusammen, so kann man mit Recht auf die Kugelgestalt der Erde schließen.

4) Daß die Erde wenigstens von Morgen gegen Abend ein gekrümmter Körper ist, was freilich auch eine Walze sein könnte, das ergiebt sich auch daraus, daß ein Durchgang des Merkur und der Venus, welche der Sonne näher stehen, als die Erde (8 und 14 Millionen Meilen) von den nach Osten wohnenden Menschen früher bemerkt wird, als von den nach Westen wohnenden, was auf ein früheres und späteres Erblicken der Sonne, also auf eine Krümmung von Osten nach Westen schließen läßt. Da sich Merkur und Venus um die Sonne drehen und der Sonne näher stehen, als die Erde, so müssen sie sich auch zwischen der Erde und Sonne hindurch, vor der Sonnenscheibe vorüber bewegen können (Durchgang), auf welcher dieselben als kleine schwarze Scheiben durch das Fernrohr erscheinen. Einen solchen Durchgang in der Südsee zu beobachten war einst Kook mit dem Astronomen Green abgesendet worden.

5) Alltäglich scheint die Sonne im Osten, wenn auch nur der Hauptrichtung nach, auf- und im Westen unterzugehen; was entweder von einer Umdrehung der Sonne und des ganzen Himmels mit seinen Sternen binnen 24 Stunden in der Richtung von Osten nach Westen um die Erde oder von einer Umdrehung der

Erde um ihre den Nord- und Südpol verbindende Achse in der Richtung von Westen nach Osten, binnen gleichfalls 24 St., herrührt. Mag jetzt einmal die Wahrheit unerörtert bleiben, so nennen wir im Allgemeinen die Zeit, in welcher für uns an einem bestimmten Tage die Sonne am südlichen Himmel am höchsten steht (für einen zwischen dem Äquator und dem Nordpol liegenden Ort) Mittag. Wenn wir aber Mittag haben, so muß für alle die Punkte, welche mit uns auf demselben zum Äquator parallelen Kreise wohnen, aber von uns aus nach Westen oder Osten eine andere Zeit sein. Wir nennen den Zeitpunkt, wenn für uns die Sonne sichtbar wird oder in oder unter den Horizont tritt (auf Strahlenbrechung ist keine Rücksicht genommen) Morgen oder Abend; daher muß während unseres Mittags die Sonne für den Bewohner desselben Parallelkreises, welcher aber von uns um einen Viertelkreis nach Westen oder Osten entfernt ist, entweder erst auf- oder eben untergehen, oder es muß Morgens oder Abends 6 Uhr sein, wenn die Erde von Westen nach Osten gekrümmt sein soll. Nun weiß man aber, daß Jemand, welcher seine richtig gehende Uhr z. B. auf dem Äquator um 90 mal 15 Meilen von dem Orte A entfernt, gerade dann stellt, wenn die Sonne am höchsten am Himmel steht, schon Abends oder Morgens 6 Uhr hat, jenachdem er von Osten oder Westen kömmt. Dieß haben uns hinreichende Erfahrungen derer, welche z. B. aus Amerika (Neu-York) oder aus Asien (Kalkutta) oder aus Australien (Sidney, Melbourne) gekommen sind bestätigt. Wohnt der Eisenacher auf dem 51ten Parallelkreise, so findet dasselbe Statt; da aber der 51te Parallelkreis nicht so groß ist, als der Äquator, so ist auch ein Grad desselben nicht mehr so groß als ein solcher auf dem Äquator. Da ein solcher, wie sich später weiter ergeben wird, nur etwa noch $9\frac{1}{2}$ oder in runder Zahl 10 Meilen lang ist, so hat Jemand, welcher 900 Meilen von uns nach Westen oder Osten entfernt ist, einen Zeitunterschied von 6 Stunden. Das ist erfahrungsmäßig hinlänglich bekannt. Da nun auf 90 Grad 6 Stunden Zeitunterschied kömmt, so gehören 15° und 1 Stunde oder 15° und 60 Minuten oder 1° und 4′ zusammen. Berlin liegt von Eisenach um ziemlich 3° nach Osten, also muß die Eisenacher Uhr um etwa 10—12 Minuten später gehen; der mit der Eisenbahn Abreisenden wegen

stellt man aber die Eisenacher Uhr um 10—12 Min. vor; folglich geht die Eisenacher Uhr faktisch mit der Berliner Uhr, wenn die durch den Telegraphen angezeigte Berliner Zeit auf der Bahnhofsuhr um 10—12 später angenommen und die Eisenacher Stadtuhr um 10—12 Min. der Bahnhofsuhr gegenüber vorgestellt wird. Da überall auf der Erde die genannten Zeitunterschiede von Westen nach Osten und umgekehrt Statt finden, da aber auch dasselbe in Bezug auf den Polarstern von Norden nach Süden und umgekehrt Statt findet, so muß die Erde eine Kugel sein. Stände ich auf dem Nordpole, so hätte ich den Nordpolarstern am höchsten (im Zenith, Scheitelpunkt der entgegengesetzte Punkt der durch den Erdmittelpunkt in das Unendliche gehenden Linie heißt Nadir oder Fußpunkt). Vom Polarstern bis herab zum Horizonte ist ein Bogen von 90°; geht man in der Richtung von Norden nach Süden und zwar um 1 mal 15, 2 mal 15, 3 mal 15 2c. . . . . 51 mal 15 Meilen, 90 mal 15 Meilen, so sinkt der Polarstern nach dem Horizonte herab, und zwar um 1°, 2°, 3° 2c. . . . . 51°, 90°, so daß er endlich im Horizonte läge, wenn wir auf dem Äquator wären, ja unter dem Horizonte sich befände, wenn wir in unserer nach Süden gehenden Richtung über den Äquator hinausgekommen wären. Aus den beiden zusammen gehaltenen Erfahrungen der verschiedenen Zeit nach Westen und Osten und der verschiedenen Erhebung des Polarsternes über den Horizont (Polhöhe), je nachdem man sich vom Nordpole nach Süden entfernt, oder aus dem Sinken eines am Südpole des Himmels befindlichen Sternes, wenn wir uns nach Norden entfernen, ergiebt sich die Kugelgestalt der Erde.

6) Wir wissen, daß alle Gegenstände, die ihrer Unterstützung beraubt werden, durch die in der Erdmasse enthaltene und derselben inwohnende Anziehungskraft fallen oder angezogen werden. So können, was 444 v. Chr. der berühmte Herodot noch belächelte, alle Menschen auf der Kugel stehen, ohne von derselben herabzufallen. Sie alle glauben, den Himmel über dem Haupte zu haben, obwohl, wenn wir von 2 Menschen den einen an das eine, den andern an das andere Ende des Erddurchmessers versetzen, beide mit den Füßen auf der Erde stehend denken, der eine mit dem Kopfe nach unten gerichtet sein oder den Himmel

unter sich haben müßte. Die Anziehungskraft der Erde aber hält ihn. Denkt man sich eine hohle Kugel mit unendlich vielen Löchern, über jedem Loche einen Bleisoldaten, welcher durch eine Hand an einem Faden nach dem Mittelpunkte derselben gezogen würde, so könnte keiner von denselben herabfallen. Eine an einen Faden angehängte Bleikugel spannt denselben; dieses Loth würde verlängert das Zenith einerseits, den Mittelpunkt der Erde und das Nadir andererseits treffen und auf der Oberfläche, dem Niveau des Wassers senkrecht stehen. Das rührt von der Anziehungskraft der Erde her, welche allem Stoffe als eine Grundkraft einwohnt und im Mittelpunkte der Erde koncentrirt gedacht werden kann. Die Anziehungskraft findet sich durch das ganze Weltall als Grundkraft in allem Stoffe; diese gegenseitige Anziehung der Himmelskörper wird die Mutter aller Bewegung der Weltkörper durch den Weltraum. War nun der Urzustand der Weltmassen, wie uns die Naturforscher sagen, feuerflüssig, also flüssig, so vereinigten sich nach irgend einer Weise, z. B. nach Art der Kantisch-Laplace'schen Ringe, welche sich ablösten, an bestimmten Punkten Massen, welche durch die Anziehungskraft aller Theile zur Kugel geformt werden mußten. Denn „ein Körper, dessen Theile von der Anziehungskraft aller Theile zu allen zusammengehalten werden, muß als eine Kugel erscheinen.“

Dieser Grund, in Verbindung mit den früheren, bestätigt also auch die Ansicht, daß die Erde eine Kugelgestalt habe. Andere Gründe, als die Häufigkeit der Kugelgestalt, z. B. bei den Tropfen, die Drehung der Erde um ihre Achse, die Kugelgestalt anderer Himmelskörper lassen sich wohl noch gelegentlich als unterstützend, wenn auch nicht als entscheidend hinzufügen — denn rein logisch genommen, kann auch einmal Etwas eckig sein, wenn Anderes rund ist; auch Eckiges, weniger Abgerundetes kann sich drehen.

Weiß man aber einmal, daß die Erde eine Kugel ist, so ergiebt sich die Größe derselben in Kubikmeilen, die Oberfläche in Quadratmeilen, die Länge eines größten Kreises, die Länge eines Parallelkreises (dem Äquator parallelen Kreises), wenn man nur den Durchmesser oder Halbmesser derselben kennt. Aber zwischen die zwei Platten eines Schraubstocks läßt sich die Erde nicht bringen; bis an den Mittelpunkt der Erde (gegen 860 Meilen, wie sich zeigen wird) hat man noch lange,

lange nicht vordringen können, da ja die tiefsten Schachte und Bohrlöcher kaum einige Tausende von Fußen tief sind (das Bohrloch im Georgenthale bei Eisenach 2260 F.); bei einer Reise um die Welt ist es auch nicht möglich gewesen, so zu sagen ein Band um die Erde herumzulegen, dasselbe dann aufzuwickeln oder zu rektificiren und mit $3\frac{1}{7}$ zu theilen, auch hat man sich noch nicht so hoch erheben können, daß man den Durchmesser der Erde unter einem gewissen Gesichtswinkel bei einer gewissen Entfernung hätte sehen können, so daß man aus der scheinbaren Größe bei der bekannten wahren Entfernung einen Schluß auf die wirkliche Größe hätte machen können; um den Nord- und Südpol herum hat man vollends kein Band, keinen Meridiankreis legen können; ebenso wenig hat man sonstige andere größte Kreise außer dem Äquator und den Meridianen legen können — daher müssen wir, um die Größe des Durchmessers und Halbmessers der Erde zu messen, unsere Zuflucht zu folgendem anschaulichen Versuche nehmen.

Es mögen zwei Personen A und B auf dem Äquator wohnen und zwar um $7\frac{1}{2}$ geographische oder deutsche Meilen von einander entfernt, so daß B weiter nach Osten wohnt, als A. Für B tritt ein Stern Abends 9 Uhr in den Meridian, für A um 2 Minuten später, so muß bei einem Zeitunterschiede von 2 Min. B um $\frac{1}{2}$ Grad weiter nach Osten wohnen. Dieser halbe Grad beträgt aber nach der ursprünglichen Voraussetzung $7\frac{1}{2}$ Meile; also muß ein ganzer Grad 15 Meilen betragen und der ganze Äquator 360 mal 15 oder 5400 Meilen. Also: der größte Umfang (Kreis) der Erde von Westen nach Osten oder der Äquator beträgt 5400 Meilen. Ebenso können wir uns auf den Meridian versetzen und finden, daß wenn für 2 Orte A und B, von denen B weiter nach Norden liegt als A, der Polarstern um einen ganzen oder halben Grad höher steht, ihre Entfernung für die als Kugel gedachte Erde, das Bogenstück des Meridians zwischen beiden Orten, $7\frac{1}{2}$ oder 15 geographische Meilen beträgt. Derartige, durch die größten Mathematiker ausgeführte Gradmessungen*) eines Meridians haben zwar ver-

*) Solche Gradmessungen haben z. B. Pikard 1669, Kassini 1683 und 1700 in Frankreich; 1735 und 1736 Bouguer, de la Kondamine und Godin in Peru, Maupertius in Tornea in Lappland; später viele in England,

schiedene Längen eines Meridiangrades dargethan, jenachdem ein solcher in der Nähe des Äquators oder mehr nach dem Nordpole zu gemessen wurde; sie haben auch weiter gezeigt, was sich auch anderweit ergiebt und später wieder berührt werden wird, daß der Umfang des Meridians kleiner ist, als der des Äquators oder genauer, daß der Durchmesser zwischen den beiden Polen oder die Erdachse um 6 Meilen kleiner ist, als ein Durchmesser des Äquator, weil die Erde in Folge der Achsendrehung an den Polen eingedrückt oder abgeplattet worden ist. Aber für unsern augenblicklichen Standpunkt genügt die Anschauung vollkommen, daß auch ein Meridiangrad 15 Meilen lang ist, so daß überhaupt ein größter Kreis der Erde 5400 Meilen lang ist. Theilt man diesen Umfang mit $3\frac{1}{7}$, so ergiebt sich der Durchmesser der Erde $= 1718\frac{2}{7}$ oder in runder Zahl 1719 Meilen. Der Halbmesser $= 859\frac{1}{2}$ Meile. Daraus erhält man die Oberfläche $=$ $4 . 859\frac{1}{2} . 859\frac{1}{2} . 3\frac{1}{7}$ Quadratmeilen.

859,5 . 859,5 = 738740,25 □ M. Quadrat des Radius mal $^{88}/_{7}$ = 65009142 □ M. getheilt durch 7 = $9287020\frac{2}{7}$ □ M., wofür man sich in runder Zahl $9\frac{1}{4}$ Million Quadratmeilen als die Oberfläche der Erde merken kann. In diese $9\frac{1}{4}$ Million Quadratmeilen theilen sich die 5 Erdtheile Australien, Europa, Afrika, Amerika und Asien, sowie die beiden Eismeere, der indische, atlantische und der große Ocean so, daß sich die Meeresfläche zur Fläche des festen Landes wie 3 : 1 oder wie 57 : 20 verhält.

Die Meeresfläche hat	6,856,000 □ M.
Die Fläche des festen Landes	2,424,000 „ „
zusammen	9,280,000 □ M.

Die Erdtheile in der oben angedeuteten Reihe verhalten sich wie die Zahlen 1 : 1 : $3\frac{1}{3}$: 4 : 5.

Australia	=	160,000 □ M.
Europa	=	168,000 „ „
Afrika	=	545,000 „ „

Frankreich, Schweden, Amerika, Afrika und Ostindien. Mechain und Delambre haben seit 1792 den Meridian von Dünkirchen bis Barcellona gemessen; Biot und Arago haben dann diese Messung bis Formentera fortgesetzt. In Indien hat Lambton, auf dem Kap der guten Hoffnung Lakaille; in Pennsylvanien Mason und Dixon, in Italien Lemaire und Boskovich, in England bei Greenwich Roy, in Schweden Melanderhielm gemessen.

Amerika	=	668,000 □ M.
Asia	=	883,000 „ „
zusammen		2,224,000 □ M.
Großer Ocean	=	3,300,000 □ M.
atlantischer „	=	1,625,000 „ „
indischer „	=	1,380,000 „ „
südl. Eismeer	=	350,000 „ „
nördl. „	=	200,000 „ „
zusammen		6,855,000 □ M.

Mit solchen Oberflächen vergleiche man sein engeres Vaterland; das Großherzogthum S. Weimar-Eisenach hat $67\frac{1}{2}$ □ M., Preußen 5100, Deutschland 12000, Östreich ebenfalls, um sich ein Verhältniß zu verschaffen.

Der Kubikinhalt beträgt aber nach der Lehre von der Kugel $\frac{4}{3} . r^3 . 3\frac{1}{7} = \frac{4}{3} . 859{,}5 . 859{,}5 . 859{,}5 . 3\frac{1}{7}$ Kubikmeilen, d. h. Würfel, an denen jede Kante eine Meile lang ist.
$\frac{4}{3} . 634947244{,}875 . \frac{22}{7}$ Kubikmeilen $= 4.211649081{,}625 . \frac{22}{7}$ $= 18625119183$ Kubikmeilen getheilt durch $7 = 2660{,}731311\frac{6}{7}$ Kubikmeilen.

So kolossal diese Oberfläche und dieser Kubikinhalt erscheinen, so bedeutend in Bezug auf kleinere Himmelskörper, wie den Mond und die zahlreiche Schaar der Planetoiden zwischen der Mars- und Jupitersbahn, so verschwindend werden diese Größen im Verhältniß zu andern Planeten oder gar der Sonne und andern Fixsternen.

Es kömmt nun darauf an mit Bestimmtheit anzugeben, an welchem Orte auf der Oberfläche der Kugel sich ein Mensch befinde, wie weit er von einer Normallinie an nach Norden oder Süden oder nach Osten oder Westen abstehe und wie groß noch die Grade der mit dem Äquator parallelen Kreise sind.

Zur Orientirung auf der Erdkugel stellen wir uns vor, daß ein größter Kreis von Westen nach Osten gehend, der Äquator, die Erde in eine nördliche und eine südliche Hälfte theilt; daß ferner ein Meridian, welcher durch die Insel Ferro, eine der kanarischen Inseln, geht, gezogen sei, durch welchen die Erde in eine östliche und westliche Hälfte zerfällt. Den Meridian denken wir uns vom Äquator aus in 90 gleiche Theile oder Grade getheilt; durch jeden Gradpunkt denken wir uns einen

mit dem Äquator parallelen Kreis gelegt, so daß man 90 Parallelkreise erhält, unter denen der Äquator der größte ist. Wenn es also 90 Parallelkreise giebt, welche auf der nördlichen Halbkugel der Erde liegen, so giebt es eben so viele auf der südlichen Halbkugel, im Ganzen 180. Durch den einen beider Pole und jeden andern Punkt der Oberfläche der Erde, z. B. Eisenach, läßt sich aber ein Meridian legen, deren Anzahl dadurch unendlich groß wird. Denken wir uns vom ersten Meridian aus jeden Parallelkreis in 180 gleiche Theile oder Grade getheilt und durch jeden Theil einen Meridian gelegt, so erhält man 180 Meridiane, welche den Äquator, sowie jeden Parallelkreis in 360° oder gleiche Theile zerlegen. Unter den Parallelkreisen sind besonders hervorzuheben 1) der Äquator, 2) der nördliche und südliche Wendekreis, deren Name später klar werden wird und welche vom Äquator um 23½° des Meridians abstehen, 3) der nördliche und südliche Polarkreis, welche 66⅔° des Meridians vom Äquator absteht. Der zu beiden Seiten des Äquators liegende Gürtel heißt die heiße Zone; der Gürtel zwischen den Wende- und Polarkreisen die nördlich und südlich gemäßigte Zone; die beiden Kugelhauben jenseits des nördlichen und südlichen Polarkreises die nördlich und südlich kalte Zone. Ein Grad des Äquators oder Meridians ist 15 Meilen lang; das aber ist weiter klar, daß die Parallelkreise vom Äquator aus nach Norden oder Süden kleiner werden, bis dieselben endlich im Nord- oder Südpol verschwinden. Sind aber die Parallelkreise kleiner als der Äquator, so muß auch ein Grad derselben in demselben Verhältnisse kleiner werden, in welchem die Parallelkreise kleiner werden. Beträgt zum Beispiel ein Grad des Äquators bei einem Umfange von 5400, einem Durchmesser von 1719, einem Halbmesser von 859½ Meilen noch 15 Meilen, so muß ein Grad des Parallelkreises, dessen Umfang, Durch- oder Halbmesser halb so groß ist, als die entsprechenden Linien des Äquators, auch nur noch 7½ Meile sein. Im Nord- und Südpole verschwindet der Parallelkreis zu einem Punkte; Umfang, Durchmesser, Halbmesser werden zu Null, folglich auch ein Grad = 0 Meilen. Wie man auf dem Standpunkte der Vorbildung und des Wissens, welchen dieses Buch vertritt, den Halbmesser des ersten, zweiten, dritten rc. Parallelkreises finden und somit

auch die Größe eines Grades des Umfanges desselben Parallelkreises bestimmen könne, ist schon früher in der Lehre von der Kugel, S. 299. angedeutet worden. Es ist leicht denkbar, daß bei andern, erweiterten Hülfsmitteln des Wissens Halbmesser, Umfang und Grad eines beliebigen Parallelkreises sich schneller, leichter und einfacher bestimmen lassen. Wollte man aber das oben angedeutete Verfahren einschlagen, so würde man finden, daß die Grade der Parallelkreise folgende Größe hätten.

1°	des Äquators	15	geogr.	Meilen
1°	„ 5. Parallelkr.	14,9	„	„
1°	„ 10. „ „	14,7	„	„
1°	„ 15. „ „	14,4	„	„
1°	„ 20. „ „	14	„	„
1°	„ 25. „ „	13,6	„	„
1°	„ 30. „ „	13	„	„
1°	„ 35. „ „	12,3	„	„
1°	„ 40. „ „	11,5	„	„
1°	„ 45. „ „	10,6	„	„
1°	„ 50. „ „	9,6	„	„
1°	„ 55. „ „	8,6	„	„
1°	„ 60. „ „	7,5	„	„
1°	„ 65. „ „	6,3	„	„
1°	„ 70. „ „	5,1	„	„
1°	„ 75. „ „	3,9	„	„
1°	„ 80. „ „	2,6	„	„
1°	„ 85. „ „	1,3	„	„
1°	„ 86 „ „	1	„	„
1°	„ 87. „ „	0,7	„	„
1°	„ 88. „ „	0,5	„	„
1°	„ 89. „ „	0,2	„	„
1°	„ 90. „ „	0	„	„

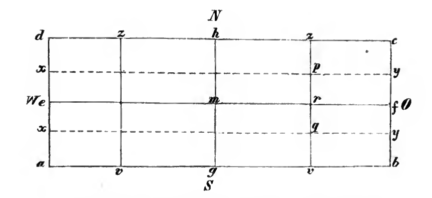
(aus Diesterwegs populärer Himmelskunde, 5. Aufl. S. 105). Aus der Größe eines Grades lassen sich aber Umfang, Halbmesser und Durchmesser leicht berechnen.

Anm. Zu den folgenden Auseinandersetzungen bedient man sich entweder des Globus, einer Abbildung der Erde in Kugelgestalt mit messingenem Meridiane oder einer Hohlkugel von Reifen, welche einen Reif als Äquator, zwei sich unter rechtem

Winkel schneidende als Meridiane, dann die beiden Wende- und Polarkreise enthält. Eine solche Vorrichtung kann man entweder selbst herstellen oder läßt dieselbe durch den Böttcher machen.

Denken wir uns einen an der Oberfläche der Erde wohnenden Menschen, so kann derselbe 1) auf irgend einem Punkte des Äquators sich befinden. Er wohnt dann auf der Grenze, welche die nördliche und südliche Halbkugel scheidet, also weder nach Norden, noch nach Süden oder hat keine geographische Breite oder 0° Breite. 2) Wohnt ein Mensch gerade auf dem Nord- oder auf dem Südpole, so steht er um $\frac{1}{4}$ Kreis oder 90° des Meridians vom Äquator ab oder um 90 mal 15 = 1350 geogr. Meilen oder er hat 90° nördliche oder südliche geographische Breite. 3) Wohnt Jemand überhaupt auf der nördlichen oder südlichen Halbkugel, also zwischen dem Äquator und dem Nordpole oder zwischen dem Äquator oder Südpole, ohne gerade auf dem Nord- oder Südpole sich zu befinden, so hat derselbe nördliche oder südliche geographische Breite. Haben wir nun einen Globus, auf dem der Ort sich befindet, dessen geographische Breite wir bestimmen wollen, so bringen wir den Ort unter den Meridian und sehen zu, wie viele Grade vom Äquator bis zu dem fraglichen Orte der Bogen des Meridians enthält. Bringt man z. B. Eisenach, Frankfurt a./M., Berlin, Bremen, Hamburg, Stettin, Wien zc. unter den Meridian, so fände man in runden Zahlen den Abstand vom Äquator in Graden des Meridians 51° oder 50° 58′; 50°; $52\frac{1}{2}$°; 53°; $53\frac{1}{2}$°; 53° 26′; $48\frac{1}{5}$° zc., d. h. das Bogenstück des Meridians, welcher durch die genannten Orte geht, ist von dem betreffenden Orte bis an den Äquator 51 mal 15; 50 mal 15; $52\frac{1}{2}$ mal 15; 53 mal 15; $53\frac{1}{2}$ mal 15; $53\frac{5}{12}$ mal 15; $48\frac{1}{5}$ mal 15 geographische Meilen entfernt. Dabei ist natürlich die Erde als Kugel vorausgesetzt, so daß jeder Punkt der Oberfläche vom Mittelpunkte gleichweit entfernt ist, also die Erde weder Erhöhungen, noch Vertiefungen hat. Müßten wir uns anstatt auf einem Globus auf einer Landkarte orientiren, auf welcher ein Theil, im äußersten Falle, die Hälfte der Erdoberfläche in einer Ebene, entweder in Form eines Oblongums oder einer Kreisfläche dargestellt ist, so muß man zunächst von der Anschauung am Globus her wissen, durch welche Erdtheile und Meere der Äquator hindurchgeht oder

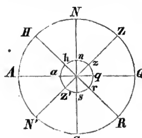
welche nördliche und südliche Breite zugleich, oder nur eine von beiden haben. So schneidet der Äquator Amerika und Afrika, den großen, atlantischen und indischen Ocean und die genannten Erd- und Meerflächen haben theils nördliche, theils südliche Breite, während das Festland von Asien, Europa und das nördliche Eismeer nur nördliche, Australien und das südliche Eismeer nur südliche Breite haben. Es kömmt hier nicht darauf an, in das Geographische überzugreifen, Verhältnisse aufzustellen, z. B. auf welcher Halbkugel der Erde, auf der nördlichen oder südlichen sich mehr Land oder Wasser befinde, wie man einen größten Kreis über die Oberfläche der Erde hinweglegen müßte, um die möglichst größte Landmasse auf der einen, die möglichst größte Wassermasse auf der andern Hälfte zu haben — oder Orte verschiedener geographischer und derselben geographischen Breite zu vergleichen und ihr Klima zu berücksichtigen; sondern darauf zu wissen, was ein als Landkarte, in ebener Fläche vorgelegtes Stück der Erdoberfläche, z. B. Deutschland oder Italien &c. für geographische Breite hat und wie man dieselbe findet. Daß Italien und Deutschland nördliche geographische Breite haben, weiß man von der Anschauung am Globus her; wieviele Grade der geographischen Breite, das liest man rechts oder links an der Seite ab. Denkt man sich die Erde als eine Walze und zwar so, daß ihre Ausdehnung von Westen nach Osten die Länge, die von Norden nach Süden die Breite bezeichnet (und einstens dachte man sich wirklich die Erde unverhältnißmäßig von Westen nach Osten ausgedehnt, so daß Kolumbus das sich zu weit nach seiner Vorstellung nach Osten ausdehnende Asien von Osten her kommend auffinden wollte), denkt man sich ferner die Seitenoberfläche der Walze oder den Mantel zu einer Ebene aufgewickelt, so erhält man, wie beim Cylinder näher angedeutet worden ist, ein Oblongum, an welchem die kurze, von Süden nach Norden gerichtete Seite die B r e i t e, die lange, von Westen nach Osten gerichtete die L ä n g e bezeichnet. Wäre z. B. das Oblongum abcd der zur Ebene abgewickelte Cylindermantel, in welchem die Ausdehnung von Westen nach Osten absichtlich weit größer gemacht ist, als die von Süden nach Norden, so kann ein Erdbewohner zunächst auf der Linie ef wohnen, der Grenze zwischen Süd und Nord oder in dem Punkte h oder g, das heißt auf



dem Nord- oder Südpol, oder in irgend einem Punkte der beliebig zwischen e und d, oder e und a durch einen Punkt parallel zur ef gelegten Linie, dann hat er nördliche oder südliche geographische Breite. Theilt man die Linie ed oder ea in 90 gleiche Theile oder Grade und legt parallele Linien zu ef durch die Theilpunkte, so wohnt ein Mensch entweder gerade auf einer von diesen parallelen Linien, also z. B. auf dem 50°, wie der Frankfurter a./M. oder zwischen dem 50° und 51°ten nördlicher Breite, dem 51°ten näher, wie der Eisenacher. Eine solche Darstellung der Erdoberfläche, welche die Merkatorsprojektion heißt, findet man in fast allen Atlanten. Es ist nicht ohne Interesse, wer mit uns oder mit einer Stadt auf demselben Parallelkreise wohnt oder gleiche geographische Breite hat — dieß zu erfahren, muß man entweder einen etwas größeren Globus benutzen oder ein Hülfsbuch, in welchem man die Angabe der geographischen Breite für die wichtigsten Punkte der Erdoberfläche genau angegeben findet, z. B. Sammlung von Hülfs- und Nachweisungstafeln zu Heinr. Berghaus Grundriß der Geographie rc., Breslau, Graß, Barth und Komp. 1843. Tafel VII. S. 44. ff.

Ist auf solche Weise die Entstehung des Namens der geographischen Breite angedeutet worden, so entsteht nun die weitere Frage, wie es möglich sei, die geographische Breite eines Ortes, z. B. von Eisenach zu bestimmen; denn es ist ja weder möglich, in der Richtung von Süden nach Norden zum Nordpol, noch in der Richtung von Norden nach Süden zum Äquator vorzu-

bringen, um zu beobachten, wieviel mal 15 Meilen wir wandern oder fahren müßten, oder um wie viele Grade der Polarstern stiege oder fiele, ehe wir entweder zum Nordpol oder zum Äquator gelangten. Ja — wenn die Erde im vollendeten Sinne des Wortes eine Kugel wäre und also eine eben angedeutete Reise auch in anderer Beziehung leicht ausführbar wäre, so könnte man durch Reisen und dabei vorgenommenes Messen die geographische Breite leicht finden und also einen fraglichen Ort leicht auf den ihm zugehörigen Parallelkreis des noch weiß und ohne Namen gedachten Globus bringen. Vor allen Dingen müßte man also den noch weiß und unbeschrieben gedachten Globus durch den Äquator in eine nördliche und südliche Hälfte theilen; dann sich einen Meridian ziehen, welcher den Äquator, sowie den Globus in eine östliche und westliche Hälfte theilte; dann hätte man den Meridian vom Äquator aus nach Norden und Süden in 90 gleiche Theile oder Grade zu theilen und durch jeden Theilpunkt einen zum Äquator parallelen Kreis zu legen. Um nun zu finden, welche geographische Breite ein Ort, z. B. auf der nördlichen Halbkugel habe, muß man 1) den Standpunkt des Polarsternes am Himmel wissen; 2) die wesentlichste Einrichtung eines Winkelinstruments kennen und einen Winkel in senkrechter Ebene oder einen Höhenwinkel zu messen verstehen. Hat man nun keinen Theodolithen, auch keine Kippregel, so läßt sich die Sache wenigstens an dem zum geometrischen Unterrichte nothwendigen großen Holzzirkel oder an einem möglichst großen Transporteur von Blech leicht zeigen. Wäre der am Holzzirkel befindliche messingene Bogen in 90 Grad getheilt, so könnte man mit demselben jeden Winkel $= 90^0$ oder $< 90^0$ messen; ebenso ließe sich mit dem Transporteur jeder Höhenwinkel messen, wenn man denselben an einer senkrechten Säule aufhängte.



Stellt uns ahnzqrsz' einen Durchschnitt der Erdkugel dar, so daß der Meridian anqs durch den Punkt z der nördlichen Halbkugel geht, auf welchem wir wohnen; ist ferner ANQS ein Durchschnitt des Himmels, so daß

derselbe durch den Polarstern und durch den Punkt Z, unser Zenith am Himmel geht, ist ferner n und N, s und S Erd- und Himmels- Nord- und Südpol, ist aq der irdische, AQ der Himmels-Äquator, in ähnlicher Weise HR der Himmels- oder wahre und hr der Erdhorizont für unsern Standpunkt z, bedeutet endlich z unsern Wohnort auf der Kugel, N' den Fußpunkt oder Nadir am Himmel, so ist zunächst klar, daß wir nicht auf dem Äquator wohnen. Wohnten wir in q, so wäre unser höchster Punkt am Himmel Q, die Linie NS wäre der Durchmesser und Durchschnitt unseres Horizontes; wir könnten einen Stern in N und S eben noch im Horizonte sehen, weil NQ und SQ = 90° ist, den Stern bei H oder N' könnten wir aber nicht sehen, weil QH und QN' > 90° ist, (auf Strahlenbrechung ist keine Rücksicht genommen, wenn auch dieselbe nicht um einen ganzen Grad Ausschlag giebt). Wohnten wir aber zwischen dem Äquator und dem Nordpole, z. B. in z, so ist Z unser Zenith, HR unser Horizont, weil ZH = ZR = 90° ist. Es kömmt nun darauf an, das Stück ZQ oder zq zu bestimmen; erfahren wir das Stück ZQ, welches am Himmel liegend zu denken ist, der Gradzahl nach, so wissen wir auch die Gradzahl von zq; denn zu demselben Centriwinkel zmq und ZmQ, welche zu koncentrischen, in einer Ebene liegenden Kreisen gehört von dem kleinen, sowie vom großen Kreise der Gradzahl nach derselbe Bogen. Dabei ist aber, worauf es freilich nicht ankömmt, die absolute Länge des Bogens ZQ und zq, mit demselben Längenmaßstabe gemessen, eine durchaus verschiedene — denn in Kreisen von verschiedenem Halbmesser hat ein Grad verschiedene Länge, also haben auch zwei Bogen von gleicher Gradzahl, wenn sie den verschiedenen Kreisen angehören, ungleiche Länge. Kennt man aber einmal die Gradzahl von ZQ, so kennt man auch die von zq und da man die Länge eines Grades von zq = 15 M. kennt, so wüßte man auch die Entfernung des Punktes z, unseres Wohnortes vom Punkte q, oder die geographische Breite. Diese könnte man zunächst direkt messen. Denn denken wir uns, z. B. im Januar oder Februar Abends 9 Uhr in m befindlich und das Fernrohr bei der Kippregel, welches genau von Norden nach Süden gerichtet sein muß, nach dem Punkte Q des Himmelsäquators gerichtet, den man am mittleren Theile des schönen Sternbildes

Orion erkennt; hebt man dann aus dieser Lage das Fernrohr, bis man einen uns zu derselben Zeit im Zenith stehenden Stern sieht, so giebt der Bogen, um welchen das Fernrohr gedreht worden ist, die Gradzahl des Bogens zq oder ZQ oder die geographische Breite an. Der Bogen QR heißt die Äquatorhöhe des Punktes Q in Bezug auf den Horizont. Aber nicht immer steht Abends der Orion gerade am höchsten, nicht immer zu derselben Zeit ein irgend sich auszeichnender Stern nur im Zenith, der Polarstern aber ist allabendlich, wenn überhaupt Sterne auf der nördlichen Halbkugel zu sehen sind, sichtbar. Deßhalb schlägt man ein anderes Verfahren ein. Ist ZN die Zenithdistanz, so ließe diese sich direkt messen und von 90° abziehen; aber bei Z steht ja nicht immer ein sich auszeichnender Stern. Man mißt deßhalb lieber den Bogen HN, welcher mit hn an Gradzahl gleich ist und die Erhebung des Polarsternes über den Horizont oder Polhöhe heißt. Denn $ZN + NH = 90^\circ$, aber auch $ZN + ZQ = 90^\circ$, also $ZN + NH = ZN = ZQ$ oder $NH = ZQ$, d. h. die Erhebung des Nordpolarsternes auf der nördlichen Halbkugel über den Horizont ist der Gradzahl nach ebenso groß, als die geographische Breite des Beobachtungsortes. Um also einen Ort auf den rechten Parallelkreis der nördlichen Halbkugel zu bringen, so braucht man nur die Erhebung des Polarsternes über den Horizont oder die Polhöhe zu messen. Diese beträgt für den Äquatorbewohner 0°, für den Polbewohner 90°, für uns in Eisenach 50° 58′ oder 51°. Es giebt wohl unter Umständen noch andere Mittel, im Falle der Noth die geographische Breite zu bestimmen; für unsern Zweck ist die gegebene Darstellung genügend. Befände man sich aber anstatt auf der nördlichen, auf der südlichen Hälfte der Erde, wäre analog ein Stern am Südpole, der Südpolarstern oder doch wenigstens in der Nähe des Südpoles, so wiederholte sich ganz dasselbe Verfahren. Die Erhebung des Südpolarsternes über den Horizont wäre der südlichen geographischen Breite gleich und um die südliche geographische Breite zu messen, hätte man nur die verschiedenen Polhöhen eines nahe am Himmelssüdpole stehenden Sternes zu messen, wenn man nicht die Zenithdistanz messen und von 90° abziehen wollte, oder wenn man nicht die geographische

Breite direkt mäße oder die Äquatorhöhe bestimmte und von 90° abzöge, um die geographische Breite zu finden. Mit einem Sextanten läßt sich die geographische Breite auch auf einem beweglichen Fahrzeuge, z. B. einem Schiffe oder im Korbe auf dem Rücken eines Kameles (Alexander Burnes, der britische Lieutenant und Ingenieur) mit ziemlicher Sicherheit messen. So hat man nach und nach viele Stationen gemessen, auf den rechten Parallelkreis auf dem Globus gebracht oder in besondern Tabellen zusammengestellt und noch immer ist das große Korps der Reisenden mit dieser aus vielen Gründen sehr wichtigen Aufgabe der Messung und Bestimmung der geographischen Breite vieler Punkte der Erdoberfläche beschäftigt.

Wenn man aber auch wüßte, daß ein Mensch auf der Mittellinie ef des Oblongums abcd wohnt, so lassen sich doch zwischen e und f, ebenso zwischen x und y und auch zwischen d und c unendlich viele Punkte denken, wo dieß der Fall sein kann. Um dieß nun genauer zu bestimmen, denkt man sich die gh durch den Punkt m gerade von Norden nach Süden gezogen; dadurch zerfällt das Oblongum in einen westlichen Theil gadh und einen östlichen gbch. Wer gerade auf der gh, als der Grenzlinie, wohnt, ist von derselben weder nach Osten, noch nach Westen entfernt oder hat keine, 0° geographische Länge; wer aber in dem Oblongum gbch oder gadh irgendwo wohnt, der hat östliche oder westliche geographische Länge. So steht der Punkt r um das Stück mr = $\frac{1}{2}$ mo von der gh ab; ist mo = 180°, mr = rf = 90°, so hat der Punkt r, ebenso p oder z 90° geographischer östlicher Länge. Ist ein Grad der ef = 15 Meilen, so ist der Abstand = 90 mal 15 Meilen. In dieser Figur sind alle Längengrade ohne Unterschied gleich, weil die parallelen Linien ab = xy = ef = dc sind. Anders gestaltet sich das nothwendig auf einer Kugel, da auf derselben die mit dem Äquator parallelen Kreise immer kleiner werden nach den Polen zu und in denselben ganz verschwinden. Gehen wir also zum Globus über, um an demselben uns bezüglich der geographischen Länge zu orientiren, so möge der erste Meridian durch die Insel Ferro gehen, wie dieß seit Louis XIV. üblich ist. Dann liegen Afrika, Europa, Asien und Australien, ein Theil des atlantischen und großen Oceans, des nördlichen und

südlichen Eismeers und der ganze indische Ocean auf der östlichen Halbkugel und haben östliche Länge, während der größere Theil des atlantischen und großen Oceans, ein Theil des nördlichen und südlichen Eismeeres und ganz Amerika auf der westlichen Halbkugel liegen und westliche Länge haben. Wohnt Jemand gerade in einem Durchschnitt zwischen dem Äquator und ersten Meridian (solcher Durchschnitte giebt es zwei, welche um 180° von einander entfernt sind), so hat derselbe weder geographische Länge, noch geographische Breite; rücken wir den Wohnort vom ersten Meridiane auf dem Äquator um 1°, 2°, 3° . . . . 180° nach Osten oder Westen, so hat derselbe dann ebenso viele Grade der östlichen oder westlichen geographischen Länge und wäre vom ersten Meridiane um soviel mal 15 Meilen entfernt, als wie viele Grade der Bogen des Äquators betrüge, um welchen der fragliche Ort vom ersten Meridiane abstände. Der fragliche Punkt könnte ja aber auch, anstatt auf dem Äquator, auf dem ersten, zweiten, ... 89ten Parallelkreise liegen. Stände derselbe um 90° oder einen Viertelkreis von dem ersten Meridiane ab, so wäre derselbe um 90 mal soviel Meilen vom ersten Meridiane entfernt als ein Längengrad oder Grad des betreffenden Parallelkreises noch lang wäre, was zwischen 15 und 0 Meilen sein muß. Wenn also die Breitengrade auf dem Meridiane gemessen werden und gleich sind, so werden die Längengrade auf dem Äquator, dem ersten, zweiten, dritten, . . . 89ten Parallelkreise gemessen und haben bei einer gewissen geographischen Breite nur noch eine gewisse Länge. So beträgt der Bogen des Parallelkreises, auf welchem Eisenach liegt, bis zum Meridian von Ferro 27° 58′ 22″ oder in runder Zahl 28°; da aber 1° des 50ten oder 51ten 9,6 bis 9,3 Meilen etwa beträgt, so steht Eisenach nicht um 28 mal 15, sondern um 28 mal 10 Meilen oder 280 Meilen in runder Zahl vom ersten Meridiane ab, wenn man statt 9,6 die Zahl 10 annimmt. Sowie man also z. B. in einer Reisebeschreibung von der östlichen oder westlichen Länge eines Punktes liest, darf man nie vergessen zu berücksichtigen, unter welchem Grade der geographischen Breite derselbe liegt und wie lang noch bei dieser geographischen Breite ein Längengrad ist. Sucht man die geographische Länge eines Punktes auf dem Globus, so legt man sich durch den fraglichen Punkt einen

Meridian und sieht zu, um wie viele Grade der Durchschnitt vom ersten Meridiane entfernt ist, um eben so viele Grade muß derselbe auf seinem Parallelkreise vom ersten Meridiane abstehen. Man könnte die Messung und Abzählung der Grade auch direkt auf dem betreffenden Parallelkreise vornehmen, wenn derselbe in Grade getheilt wäre. Am Globus ist aber nur der Äquator getheilt. Bei Landkarten findet man die geographische Länge eines Ortes unten und oben, oder südlich und nördlich angegeben. Liegt der fragliche Punkt nicht gerade unter einem schon vorhandenen Meridiane, so legt man sich einen Meridian durch denselben und bemißt die Entfernung des Durchschnitts vom vorhergehenden oder nächstfolgenden Meridiane.

Wie aber, wenn ein Ort nach dem früheren Verfahren auf den rechten Parallelkreis gebracht worden ist, kann man denselben auf den rechten Meridian oder in die rechte Weite, um 1, 2, 3, u. s. w. bis 180° östlicher oder westlicher Länge auf dem nun bestimmten Parallelkreise bringen, da man doch den Bogen des einzelnen Parallelkreises zwischen dem fraglichen Punkte und dem ersten Meridiane ebenso wenig, als einen Bogen des Meridians vollständig und bequem messen kann, da uns zur Messung eines solchen Bogens auf unserem Standpunkte die nöthigen Vorkenntnisse und Hülfsmittel fehlen? Zu dem Zwecke aber, die geographische Länge zu bestimmen, läßt sich ganz einfach die später weiter zu begründende und entwickelnde Erfahrung verwenden, daß ein Ort, welcher um eine geographische Länge von x° von uns nach Osten oder Westen absteht, um x mal 4 Minuten in der Zeit abweicht. Gehen wir vom Mittag aus, als dem Zeitpunkte, zu welchem die Sonne am Himmel am höchsten steht, (ohne an wahre oder mittlere Zeit zu denken), so hat der um x° nach Osten von uns liegende Ort um x mal 4 Min. früher, der um x° nach Westen liegende, um x mal 4 Min. später Mittag. Darauf läßt sich die Bestimmung der geographischen Länge verschiedener Punkte in einfacher Weise gründen, wenn man nicht anderweite astronomische Hülfsmittel herbeiziehen will.

Nehmen wir an, daß sich die Sonne in genau 24 Stunden einmal um die Erde von Osten nach Westen herumdrehe und nach dieser Zeit im Meridiane stehe; lassen wir zunächst die Achsendrehung der Erde von Westen nach Osten in 24 St.,

sowie die jährliche Umdrehung der Erde um die Sonne mit verschiedener Geschwindigkeit je nach den Stadien ihrer Bahn, in welcher sie dahinläuft, aus dem Spiele, kennen also auch keinen Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit; versetzen wir uns ferner mit einem guten Chronometer, wie man deren in großer Vollkommenheit hat, seitdem der englische Uhrmacher Harrison ein solches erfunden (1793) und die Hälfte des unter der Königin Anna vom englischen Parlamente ausgesetzten Preises von 20000 L. erhalten hatte, während andere 3000 L. den Erben des Göttinger Astronomen Tobias Mayer übermacht worden waren wegen seiner genauen Mondlaufsberechnungen, so daß durch beides zusammen man sich bei Längenbestimmungen zur See um keinen halben Grad mehr irren konnte, auf die Insel Ferro unter den Kanarien und stellen unser Chronometer auf 12 Uhr, sowie die Sonne im Meridiane und am Himmel am höchsten steht; sorgen wir ferner dafür, daß der Gang des Chronometers in keinerlei Weise gestört werde, so daß dasselbe, wo immer wir uns auch befinden, uns die Zeit und Uhr von Ferro zeigt: so können wir nun unsere Reisen zu Land oder Meer antreten, um die verschiedenen Punkte der Erdoberfläche vermittelst des Zeitunterschiedes bezüglich ihrer östlichen oder westlichen Länge zu bestimmen und dann auf dem Globus auf dem rechten Parallelkreise im rechten Abstande vom ersten Meridiane nach Osten oder Westen eintragen zu können. Auf unserer Fahrt, von welcher wir noch gar nicht zu wissen brauchen, ob dieselbe nach Osten oder Westen geht, gelangen wir auch in den Hafen der Kapstadt und finden, daß wenn das Chronometer in der Kapstadt gerade 12 Uhr zeigt, also wenn die Sonne dort für den Tag am höchsten steht und es gerade Mittag ist, das Chronometer von Ferro erst 9 Uhr 36 Min. Vormittags zeigt. Daraus geht hervor 1) daß die Kapstadt von Ferro aus östlich liegt, weil die Sonne derselben früher im Meridiane steht, als der Insel Ferro; 2) daß die Kapstadt um 36° des Parallelkreises, auf welchem er liegt, von der Insel Ferro absteht. Denn 2 St. 24 Min. Zeitunterschied oder 144 Min. lassen auf soviele Längengrade schließen, als 4 in 144 enthalten ist, oder auf 36°; 3) da wir endlich die geographische Breite der Kapstadt in runder Zahl zu 34° finden würden und ein Längengrad unter dieser Breite

noch 12 Meilen lang ist, so steht die Kapstadt vom Äquator um 34 mal 15, vom ersten Meridian um 36 mal 12 geogr. Meilen ab. In Bombay in Ostindien fänden wir einen Zeitunterschied von 6 St. 2 Min., also eine östliche Länge von 90½°; in Kalkutta von 7 St. 4 M. oder 106° östl. L.; in Kanton 8 St. 44 M., also 131° ö. L.; in Peking 8 St. 56 M., also 134° ö. L.; in Sidney in Australien 11 St. 16 M. oder 169° ö. L.; auf Honolulu in Oahu 12 St., also 180° ö. L.; Tahiti 11 St. 28 M. oder 172° ö. L.

Wendeten wir uns von Ferro aus in der entgegengesetzten Richtung nach Westen und fänden, daß in New-York der Zeitunterschied 3 St. 5⅓ Min. betrüge, um welche die dortige Uhr später ginge als unsere Uhr nach der Ferrozeit, so würden wir den Schluß machen, daß wir um 46° 20′ nach Westen gefahren wären. Einen ähnlichen Zeitunterschied würden wir in Philadelphia, einen größern in New-Orleans, einen noch größern bei den verschiedenen Punkten des großen Oceans finden. In Tahiti betrüge der Zeitunterschied 8 St. 47⅓ Min., um welche die dortige Uhr zu spät geht, was auf eine westliche Länge von 131° 50 Min. schließen läßt.

Um also die Lage eines Ortes auf der Oberfläche der Erde zu bestimmen, so gieb die geographische Breite und Länge an, d. h. bestimme, um einen wie großen Bogen des Meridians der betreffende Ort vom Äquator nach Norden oder Süden und um einen wie großen Bogen des betreffenden Parallelkreises der Ort vom ersten Meridian nach Osten oder Westen absteht.

Anm. Die Franzosen rechnen in der Regel nach dem Meridian von Paris, welcher um 20° vom Ferromeridian nach Osten liegt; die Engländer nach dem Meridian von Greenwich (Grinitsch), welcher um 17° 41′ östlich von Ferro und um 2° 19′ westlich von Paris sich befindet. Will man die östliche Längenangabe nach Paris oder Greenwich auf Ferro reduciren, so hat man also 20° zu addiren, während man von den bezüglichen Angaben der westlichen Länge nach Paris oder Greenwich 20° oder 17° 41′ abzuziehen hat.

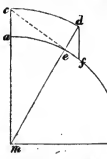
Bewegen wir uns auf der Eisenbahn in der Richtung von Westen nach Osten und geht die Bewegung leise genug vor sich,

so kann man in einzelnen Momenten sich leicht in der Täuschung befinden, als ob man in seinem Fahrzeuge selbst ruhe, während sich die Telegraphenstangen, welche an der Seite der Eisenbahn stehen, in der umgekehrten Richtung von Osten nach Westen zu bewegen scheinen. Denken wir uns die Bewegung der Erde um ihre in der Richtung von Norden nach Süden liegende Achse noch viel geschwinder und viel leiser, als die Bewegung der Eisenbahnwagen, und zwar auch in der Richtung von Westen nach Osten, setzen wir ferner voraus, daß die Sonne am Himmel still stehe, so muß es den Anschein gewinnen, als wenn die Sonne sich in umgekehrter Richtung in großen kreisförmigen Bahnen von Osten nach Westen um die Erde herum bewegte, so daß jeden Augenblick ein anderer, westlicher liegender Punkt die Sonne am Himmel im Meridiane oder am höchsten stehen sieht. Soviel wissen wir aus der täglichen Anschauung, daß die Sonne im Allgemeinen in Osten aufzugehen scheint, sich in einem größeren oder kleineren Halbkreise über den Horizont herauf und zu demselben herab bewegt, wenn auch der Punkt, an welchem die Sonne auf- und der Punkt, an welchem dieselbe untergeht, nicht immer rein Ost- und Westpunkt ist, wie um den 21. März und 21. Septbr., sondern mehr südöstlich und südwestlich liegt, wie um den 21. Decbr. oder mehr nordöstlich und nordwestlich, wie um den 21. Juni. Lassen wir aber die Erfahrung, daß die Sonne an verschiedenen Punkten des Horizontes auf- und untergeht, je nach den Jahreszeiten, und daß dieselbe verschieden große Kreise beschreibt, vor der Hand ganz aus dem Spiele, da wir später zu dieser Sache zurückkehren müssen, so ist es nicht ausgemacht, ob sich die Erde von Westen nach Osten um ihre von Norden nach Süden liegende Achse binnen 24 Tagen drehe, oder ob sich die Sonne in derselben Zeit in umgekehrter Richtung von Osten nach Westen um die Erde herum drehe und es kömmt darauf an, eine von beiden Möglichkeiten als Wahrheit und Gewißheit durch augenscheinliche Versuche zu begründen.

Wie uns die Naturforscher erzählen, wären bei dem Welt- und Erdbildungsprozesse die Bedingungen nicht vorhanden gewesen, unter denen Menschen leben und beobachten konnten. Wenn es aber auch möglich gewesen wäre, in dieser Beziehung

von Anfang an erdnaturgeschichtliche Studien, vielleicht von einem Punkte außerhalb derselben, nachdem sie zu einem kugelförmigen Individuum durch wirkende Kräfte geworden war, machen zu können, so würden wir doch keine berührende und drehende Hand gesehen haben, sondern eine Drehung, welche als das Resultat eines Spieles von nach verschiedener Richtung hin anziehenden Kräften aufzufassen wäre. Doch warum sollen wir uns in Zeiten und Dinge vertiefen, welche selbst in Humboldt's Kosmos als ungelöste Räthsel dastehen müssen? Wenn sich die Erde heute noch dreht, so müssen wir doch davon eine Wahrnehmung haben! Aber wir spüren ja Nichts davon, auch nicht die leiseste Wahrnehmung. Der Vogel, welcher das Nest verläßt, um Futter für seine Jungen zu suchen, kehrt mit Sicherheit zu demselben zurück; wenn wir uns in einem Luftballon noch höher erheben, so können wir doch die unter uns von Westen nach Osten dahingleitende Erde nicht bemerken und uns vielleicht dann herablassen, wenn ganz Europa und der atlantische Ocean sich bereits vorbeigedreht haben und Amerika vielleicht unmittelbar unter uns steht. Das wäre eine neue, bequeme, schnelle, wohlfeile, unübertreffliche Art zu reisen. Aber die Sache ist nicht so, denn die Luft ist ein der Erde untrennbar und eigenthümlich zugehöriger Bestandtheil, das Meer, auf dessen Grunde die luftathmenden Thiere schwimmen und wenn sich die Erde dreht, so muß sich auch die Luft mitdrehen. Drehte sich die Luft nicht mit, so würde bei dem Laufe der Erde nach Osten ein unüberwindlicher Zug der Luft nach Westen Statt finden, welcher zerstörend oder doch umstürzend wirken müßte. Wenn ein Pferd in vollem Laufe plötzlich stehen bleibt, ohne daß der Reiter seine in demselben Sinne gerichtete Geschwindigkeit aufhält oder bezwingt, wie Jemand welcher bergablaufend eine große, unter Umständen unaufhaltsame Geschwindigkeit erlangt hat, so pflegt der Reiter dem Pferde nach Vorn über den Kopf hin herabzustürzen; ebenso fallen wir ostwärts, wenn ein nach Osten laufender Wagen in seinem Laufe plötzlich angehalten wird. Daraus geht aber recht deutlich hervor, daß wie sich die Bewegung des Pferdes dem Reiter, die Schnelligkeit des Wagens dem Passagier mittheilt, daß auch die sich vielleicht um ihre Achse drehende Erde ihre Bewegung den Menschen, Bäumen, Häusern, Thürmen rc. mittheilen muß. Bliebe die

Erde einmal plötzlich stehen, so müßte Alles nach Osten zu umfallen und dann jedenfalls mit einer solchen Kraft, daß Alles zerschmettert würde. Ein solches Experiment würde so gefährlich, daß wir Anschauung und Überzeugung mit dem Leben zu bezahlen hätten. I. Da sich aber Alles mit nach Osten bewegen müßte, z. B. von einem sehr hohen Thurme ebenso wohl der Fuß, als die Spitze, so müßte die letztere beim Umschwunge einen größeren Kreis beschreiben, als der erstere und zwar in derselben Zeit. Also muß auch die Spitze eine größere Geschwindigkeit in ihrer östlichen Richtung haben, als der Fuß des Thurmes. Ein auf der Spitze befindlicher Mensch, ein in der Hand des Menschen befindlicher Stein muß ebenfalls eine größere, nach Osten gerichtete Geschwindigkeit haben. Läßt man denselben fallen, ohne daß ein die Richtung irgendwie störender Einfluß hinzutritt, so kann derselbe nicht in der verlängert durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Linie oder im Lothe fallen, sondern muß um irgend eine Linie nach Osten zu von der lothrechten Linie abweichen. Stellt uns beistehende Figur den vierten Theil



des Erddurchschnitts vor, ist ca ein freilich etwas unverhältnißmäßig hoher Gegenstand, ein Thurm 2c., so macht die Spitze c den Bogen cd in einer Zeiteinheit, während der Fuß a den kleineren Bogen ae macht. Es wirkt aber auf die Spitze c außer der Schwungkraft, welche allein c bis d in der Zeiteinheit bringen würde, auch noch die Schwerkraft, welche c, oder den von c fallenden Stein in der Zeiteinheit von c bis a ziehen würde. Daher befindet sich nach Verlauf von einer Zeiteinheit der Stein weder in a, noch in d, sondern in f, d. h. am Endpunkte der Diagonale, welche sich in dem Parallelogramme befindet, das sich aus ac, dem Fallraume in der Zeiteinheit und aus cd, dem Bogen, welchen c in der Zeiteinheit durchläuft und den Winkel acd konstruiren läßt, wie man das leicht bei einem Kahne beobachten kann, welcher durch die Ruderkraft quer über den Strom und durch den Zug des Stromes abwärts geführt wird. Der Kahn kömmt im Endpunkte einer zwischen beiden Richtungen liegenden Linie an, welche die

Diagonale des Parallelogramms ist, welche zu Seiten hat a. die Breite des Flusses, welche durch die Ruderkraft allein in 5 Min. durchlaufen würde, b. die Länge, wieweit der Kahn allein durch den Zug des Stromes abwärts gezogen würde und c. zum Winkel z. B. 90°, unter welchem sich die genannten beiden Linien treffen können. In dem obigen Beispiele liegt aber der Punkt f um den Bogen ef weiter nach Osten, als der Punkt e. Macht man nun das Experiment, wie dasselbe von Seiten Benzenberg's im Innern des Michaelisthurmes in Hamburg von einer Höhe von 340 Fuß herab geschehen ist, so findet man diese östliche Abweichung des Steines, welche die Folge der Anziehungs- und Schwungkraft der Erde sein muß. Liegt aber die Anziehungskraft als Eigenschaft in der Materie der Erde, so rührt die Schwungkraft von der Achsendrehung her. Folglich muß sich die Erde in der Richtung von Westen nach Osten in 24 Stunden um ihre eigene Achse drehen. Dabei haben verschiedene Punkte eine verschiedene Geschwindigkeit. Ein Punkt des Äquators legt in 24 Stunden 5400 Meilen zurück, der Nordpol und Südpol ruht oder macht 0 Meilen, jeder Parallelkreis seinen Umfang, z. B. der 51te 360 mal 9,6 Meilen in 24 Stunden. Indeß ist eine Höhe von ungefähr 400—500 Fuß, so hoch die höchsten Thürme sind, viel zu gering, um einen gehörigen Ausschlag nach Osten zu geben. Darum wäre es zweckmäßig, die tiefen Schachte in Bergwerken zu benutzen. Denn dann ist c ein Punkt in der Oberfläche der Erde, ca die Tiefe des Schachtes, z. B. 1000—1200 F. hoch (Bohrloch im Georgenthale bei Eisenach 2200 F.); die Öffnung ist bedeckt, in der Mitte ein eiserner Ring, durch welchen eine glühende eiserne Kugel erst hindurchgeht, wenn dieselbe erkaltet ist. Sie schlägt auf einer mit Wachs vorgerichteten Tafel östlich vom Lothe auf. Dieß hat Prof. Dr. Reich in Freiberg versucht. Als einst Newton diesen Beweis für die Achsendrehung der Erde diskutirte und deßhalb am 28. Novbr. 1679 an den Sekretär d. kgl. Societät der Wissenschaften Hooke zu London schrieb, bemerkte dieser sogleich sehr scharfsinnig, daß auch eine kleine Abweichung nach Süden Statt finden müsse. Und das mit Recht — denn wegen der Abplattung der Erde, von welcher später die Rede sein wird, hat sich am Äquator die meiste Masse angehäuft. Die meiste Masse hat

auch die meiste Anziehungskraft, also muß der Stein südöstlich abweichen, wenn der Versuch auf der nördlichen Halbkugel gemacht wird.

Anm. Hooke's Versuche wurden von zu kleinen Höhen herab angestellt; 1791 versuchte es Gulielmini auf dem Thurme Asinelli bei einer Fallhöhe von 241 F.; 1802 Benzenberg auf dem Michaelisthurme zu Hamburg und in dem Kohlenschachte zu Schlebbusch in der Grafschaft Mark. Er fand in Hamburg bei 235 F. Fallhöhe 4‴ par. Abweichung, in der Mark bei 260 F. Fallhöhe 5 Linien östliche Abweichung, während für Hamburg 3,873‴ par. östliche und 0,0005‴ par. südliche Abweichung berechnet war, welche letztere man gar nicht wahrnahm. Für eine Fallhöhe von 10000 F. würde sich für die Breite von Hamburg eine Abweichung von 1076‴ par. nach Osten (7′ 5″ 8‴) und eine südliche von 0,88‴ par. ergeben.

II. Könnte man mit Sicherheit darthun, daß die Erde einstens einmal feuerflüssig gewesen sei, was die Naturforscher aus mancherlei Gründen, aus der gleichmäßig mit der Tiefe zunehmenden Wärme, aus den heißen Quellen, Vulkanen ꝛc. darthun, aus der ehemals größern Erdwärme, welche sich durch entsprechende Thier- und Pflanzenformen bekundete, behaupten und versichern; wüßte man ferner, daß bei der ehemals flüssigen Erde eine Stoffanhäufung nach dem Äquator zu Statt findet und eine Abplattung der Pole, so daß ein Halbmesser zwischen Mittelpunkt, Nord- oder Südpol kürzer wäre, als ein Halbmesser unter dem Äquator: so müßte man nach Analogie des Einsinkens der Pole an einer Porcellanthonkugel, deren Theile noch weich und verschiebbar genug sind, wenn dieselbe um ihre Achse gedreht wird, nach der Wahrnehmung ihrer Abplattung behaupten, daß auch die Achsendrehung bei der Erde in der Richtung von Westen nach Osten die Abplattung erzeugt habe. Daß also eine zeitweise Achsendrehung der Erde Statt gefunden haben müßte, ließe sich unter obigen Umständen behaupten. Da man nun ein Fortdauern der auf die Achsendrehung gegründeten Erscheinungen bemerkt und umgekehrt keinen Grund für das Aufhören der durch Naturkräfte bedingten Drehung vorzubringen im Stande ist, so muß sich die Erde um ihre Achse auch noch jetzt und ferner drehen, so lange die gegenseitige Beziehung der Kräfte Statt findet,

welche die Erscheinung bedingen. Die Abplattung der Erde, welche bei der ehedem feuerflüssigen Erde durch Achsendrehung erfolgt sein muß, läßt sich in doppelter Weise theils durch die Gradmessungen an den Meridianen, theils durch Pendeluhren und Pendelschwingungen nachweisen.

Dünkirchen und Formentera liegen beide auf dem Meridiane von Paris; Dünkirchen liegt um 12° 22′ 14″ nördlich von Formentera und zwar in einer Entfernung von 1374438 Metern. Daraus kann man leicht die Länge eines Meridiangrades berechnen; wäre nun die Erde genau kugelförmig, so müßte die Länge eines Meridiangrades überall gleich sein. Aber aus allen schon früher angedeuteten Messungen läßt sich behaupten, daß die Länge eines Erdgrades um so kleiner wird, je mehr man sich von den Polen dem Äquator nähert. Demnach ist die Krümmung der Erde in der Richtung des Meridians am Äquator bedeutender als an den Polen oder die Erde ist an den Polen abgeplattet. Man hat den Radius des Erdäquators = 6376984 Meter, den Radius eines Poles = 6356324 Meter, also einen Unterschied von 20660 Mtr. gefunden. Man hat für die Größe der Abplattung verschiedene Werthe, in runder Zahl 1/300 gefunden oder 1/302 oder 1/289 oder 1/292, so daß ungefähr der Halbmesser der Pole um 3 Meilen, die Erdachse um 6 Meilen kürzer ist, als ein Durchmesser unter dem Äquator (1719 und 1713 Meilen).

Ein Pendel schwingt immer um so schneller, je kürzer es ist und je stärker die Schwere es zieht oder je größer die Intensität der Schwere ist. Wenn nun ein Pendel von einer gewissen Länge in einer Sekunde gerade einmal schwingt, so müßte die Verkürzung desselben an einem andern Orte eine Abnahme der Schwerkraft anzeigen und umgekehrt. Richer, ein französischer Astronom und Physiker, machte diese Entdeckung, als er fand, daß er bei seiner in Paris richtig gehenden, guten Pendeluhr das Pendel verkürzen mußte, als er mit dieser Uhr in Kayenne in Südamerika in der Nähe des Äquators ankam (1672). Ein in Paris Sekunden schwingendes Pendel muß 440,56‴ par. lang sein; in Kayenne muß es um 1,14‴ par. verkürzt werden. Demnach muß am Äquator die Schwerkraft schwächer wirken, als in Paris; also muß von Paris bis zum Erdmittelpunkte näher sein, als von Kayenne bis zu demselben Punkte; da man umgekehrt

vom Äquator aus nach den Polen zu gehend das Pendel immer mehr und mehr verlängern muß, so muß man nach den Polen zu sich dem Erdmittelpunkte näher befinden, als nach dem Äquator zu — folglich muß die Erde eine sphäroidische Gestalt haben oder abgeplattet sein. Wäre dieselbe immer fest und starr gewesen, so hätte sie trotz aller Achsendrehung ihre Gestalt behalten, denn auch ein jeder regelmäßige oder unregelmäßige Körper kann sich auch um eine Achse drehen und behält doch seine Gestalt — aber eine flüssige Kugel, deren Theile wenigstens verschiebbar sind, sinkt bei der Achsendrehung an den Polen ein. Da man nun Feuerflüssigkeit und Abplattung bei der Erde nachweisen kann, macht man einen Schluß unter Hinzunahme der Fortdauer der Kräfte und Erscheinungen, daß sich die Erde schon ehedem gedreht habe und heute noch binnen 24 Stunden um ihre eigene Achse drehe.

III. Die Meeresströmungen, Passatwinde, ja die Erfahrung, an welches Ufer der Mississippi vorzugsweise sein Treibholz antreibt, wie man dieß am interessantesten und geistvollsten in Maury's physischer Geographie des Meeres dargestellt findet, sind ein neues Beweismittel für die behauptete Achsendrehung.

Um die sogenannten Passatwinde und ihre Entstehung vollständig zu fassen und darzustellen, muß man eigentlich die Erde als eine große Wasserkugel oder auch als eine vollständige Erdkugel ohne Erhöhungen und Vertiefungen auffassen, weil durch die Abwechslung von Wasser und Land, sowie durch die Erhöhungen und Vertiefungen auf dem Lande die einfache Erscheinung mannigfach modificirt wird, was schon durch die Konfiguration z. B. des Beckens des indischen Oceans leicht ersichtlich ist, durch welche die abwechselnd nach dem Lande vom Meere und nach dem Meere vom Lande wehenden Monsune entstehen. Doch zu den Passatwinden. Die Land- und Wasserflächen zu beiden Seiten des Äquators, also auch die Luftsäulen über denselben werden durch den erst später genauer in's Auge zu fassenden Stand der Sonne am meisten erwärmt. Die erwärmten Luftmassen steigen nach oben, bilden dadurch einen luftverdünnten Raum und fließen nach Norden und Süden, polwärts ab, aber die Achsendrehung der Erde treibt diese Luftschichten auch mit nach Osten, deßhalb

gehen dieselben z. B. aus dem atlantischen Ocean zwischen der nördlichen und östlichen Richtung hindurch nach Nordosten, berühren also alle Südwest- und Westküsten Europa's und machen dieselben notorisch wärmer als die Ostküsten. Daher in Europa eine Wärmeabnahme, weniger von Süden nach Norden, als von Südwest nach Nordost, wobei auch der Einfluß des wärmeren Golfstromes mit im Spiele ist. Sind aber die erwärmten Luftschichten nach oben gestiegen, um nach Norden und Süden abzufließen und sich allmälig abkühlend wieder zu senken, so bringen von Norden und Süden und unten her nach dem Äquator hin die kälteren Luftmassen. Wenn sich aber die Erde um ihre Achse von Westen nach Osten dreht, so haben alle Punkte des Äquators, also auch alle Luftsäulen über dem Äquator die größte, Luftmassen aus Norden oder Süden kommend eine kleinere Geschwindigkeit, wenn dieselben auch auf ihrem Wege nach Süden, wenn wir zunächst die nördliche Halbkugel in's Auge fassen, an Wärme und Geschwindigkeit nach und nach so zunehmen, daß sie dieselbe erhalten. Kommen aber die nördlichen Luftmassen in der heißen Zone an, so haben sie eine geringere Geschwindigkeit und gehen scheinbar nach Westen (sie bleiben vor den geschwinderen nach Osten gehenden Luftmassen zurück). Zwei Richtungen sind es also, nach denen die nördlichen Luftmassen getrieben werden, einmal nach Süden, dann nach Westen — also nach Südwesten. Die Passate auf der nördlichen Halbkugel scheinen also aus Nordosten zu kommen. Umgekehrt ist die Sache auf der südlichen Halbkugel; die Luftschichten gehen nach Norden und Westen, also nach Nordwest und kommen aus Südost. Da die Sache sich also verhält, denn trotz aller Modifikationen ist die Grunderscheinung zu erkennen, selbst in den Monsunen des indischen Oceans, so muß die vorausgesetzte Achsendrehung der Erde wirklich sein. In ähnlicher Weise ist die Achsendrehung auch an den Meeresströmungen zu erkennen; eine solche würde, wenn die Erde eine Wasserkugel wäre, rings um die Erde herum in der äquatorialen Gegend Statt finden — wir finden im indischen, atlantischen und großen Ocean davon die deutlichsten Beweise — aber die dazwischen tretenden Erdtheile gestalten die Sache anders; die Strömung bricht sich an Afrika, geht um dasselbe herum, wendet sich nordwärts, fällt westlich gehend in den mexikanischen

Golf, tritt als Golfstrom aus demselben. Ja selbst der überhaupt höchst merkwürdige Golfstrom, sich auszeichnend durch größere Wärme und Geschwindigkeit, ist ein deutlicher Beweis für die Achsendrehung. Er wendet sich zunächst nach Norden, bald aber nach Nordwest, denn von zwei Kräften getrieben, muß er zwischen der nördlichen und östlichen Richtung hindurch nach Nordosten gehen. Darin liegt ein neuer Grund für die größere Wärme der Südwestküsten Europa's vor den Ostküsten. Wer sich darüber noch weiter unterrichten will, muß Dove (meteorologische Untersuchungen) oder Maury lesen. Aber, müßte sich die Achsendrehung nicht auch an den Flüssen zeigen? Wenn wir den Mississippi einmal in's Auge fassen und uns das Treibholz auf demselben vorstellen, so treibt es der Zug des Stromes, die Folge der Schwerkraft auf der schiefen Ebene des Flußbettes nach Süden, die Achsendrehung nach Osten; es muß sich also nach Südosten wenden oder an das östliche Ufer, nicht an das westliche anlegen. So soll es sein, wie uns von Beobachtern gemeldet wird. (Maury.) Also auch aus den Passatwinden, Meeresströmungen &c. ergiebt sich die Achsendrehung der Erde.

IV. In neuerer Zeit, seit dem Jahre 1851 hat der Pariser Léon Foucault durch Experimente mit einem großen schwingenden Pendel, welche zuerst in einem Keller, dann im pariser Observatorium, im Pantheon, in Deutschland überall, z. B. im kölner Dome von Dr. Garthe oder in den Kirchen von nur einigermaßen bedeutenden Städten, in Eisenach in der Nikolaikirche, angestellt wurden, die Achsendrehung der Erde direkt nachgewiesen. Der Beweis gründet sich darauf, daß ein Pendel, welches womöglich ohne Reibung am Aufhängepunkte schwingt, wegen des Beharrungsvermögens in derselben in ihrer Lage verharrenden Ebene schwingt. Befände man sich nun am Nordpole, so hätte man den Himmelsäquator zum wahren Horizonte; diesem parallel läge der scheinbare Horizont. Brächte man in der Richtung der verlängerten Erdachse ein Pendel an und ließe dasselbe senkrecht zur Horizontebene von Norden nach Süden schwingen, so müßte es, wenn die Erde binnen 24 Stunden von Westen nach Osten sich dreht, da es in seiner Schwingungsebene verharrt, in 24 Stunden sich umgekehrt nach Westen drehen oder in entgegengesetztem Sinne. Also nach

6 Stunden müßte es von Osten nach Westen, nach wieder 6 Stunden von Süden nach Norden, nach wieder 6 Stunden von Westen nach Osten und endlich wieder von Norden nach Süden schwingen. Denken wir uns eine Säule in der Richtung der Erdachse, lassen die Erde einen Augenblick ruhen, binden einen Menschen so an dieselbe, daß er mit dem Rücken gegen dieselbe gerichtet das Gesicht nach Süden wendet, so muß er, wenn die Erde sich von Westen nach Osten um ihre Achse dreht, sich umgekehrt wie das Pendel bewegen. Derselbe muß sich mitdrehen in der Richtung nach Osten, so daß er nach 6 Stunden nach Osten, nach wieder 6 Stunden nach Norden, nach wieder 6 Stunden nach Westen und endlich in der 24ten Stunde wieder nach Süden blickt. Könnte man einen jeden Schüler also durch die Anschauung von der Sache überzeugen, so hätte man richtig ad oculos demonstrirt. Dann müßte man ihn auch auf den Äquator bringen, die Erde wieder ruhend denken, den Durchmesser des Äquators verlängert denken, an den senkrechten Durchmesser einen Menschen mit dem Rücken anbinden, sein Gesicht nach Süden wenden — es bliebe bei der dann vor sich gehenden Drehung stets nach Süden gewendet. Ebenso würde das Pendel, welches in ähnlicher Weise senkrecht zur Meridianebene, die vom Zenith zu beiden Seiten um 90° abstände oder zu einer ihr parallelen schwänge, in seiner Ebene bleiben, während die Erde sich östlich schwänge, aber immer von Norden nach Süden schwingen. Also wird keine Bewegung der Schwingungsebene wahrnehmbar sein. Auf dem Pole erfolgt die ganze Umdrehung der Schwingungsebene in 24 Stunden; auf dem Äquator ist die Bewegung Null oder es gehört eine Unendlichkeit der Zeit dazu, wenn dieselbe erfolgen und bemerkt werden soll. Zwischen dem Äquator und den Polen hängt die Zeit, in welcher die Schwingungsebene eine ganze Kreisbewegung zu machen scheint, von der geographischen Breite des Ortes ab; je näher ein Ort nach den Polen zu, desto kürzer, je näher dem Äquator zu, desto länger ist diese Zeit. In Eisenach, bei einer geographischen Breite von 50 bis 51° braucht das Pendel gegen 31 Stunden; in Panama bei 8° 45′ geogr. Br. 158 St. oder mehr als 6½ Tage; bei 30° Breite 48 St., bei 70° 25 St. ꝛc.

Also die Erde dreht sich in 24 Stunden von Westen nach

Osten um ihre eigene Achse, wodurch die Abwechslung zwischen Tag und Nacht, deßhalb aber noch keineswegs die verschiedene Länge der Tage und der Wechsel der Jahreszeiten bedingt wird. Denkt man sich eine Kanone auf dem Äquator gerade nach Norden gerichtet, würde mit derselben möglichst weit nach Norden geschossen und zwar ohne Rücksicht auf andere Umstände in den Mittelpunkt einer Scheibe, so müßte die vom Äquator kommende Kugel östlich vom Mittelpunkte der Scheibe einschlagen; denn sie wird durch die Kraft des Pulvers nicht allein nach Norden, sondern durch die Achsendrehung nach Osten bewegt; sie muß also einen nordöstlichen Lauf annehmen und rechts vom Centrum einschlagen. Umgekehrt müßte eine vom nördlichen Wendekreise nach dem Äquator zu abgeschossene Kugel, welche übrigens das Centrum treffen müßte, rechts oder westlich von demselben einschlagen.

Wie schon früher angedeutet worden ist, rührt von der Achsendrehung der Erde, durch welche die Sonne von Osten nach Westen in 24 Stunden sich zu bewegen scheint, der Wechsel zwischen Tag und Nacht und die Erscheinung her, daß ein um x^0 von uns östlich oder westlich liegender Ort um x mal 4 Min. früher oder später Mittag haben muß. 15° bedingen 1 Stunde, 90° 6 St., 180° 12 St. Zeitunterschied; bei einer Reise um die Welt nach Osten verliert, bei einer andern Reise um die Welt in der Richtung nach Westen gewinnt man einen Tag. Wer von uns um 180° östlich oder westlich wohnt, befindet sich auf demselben Meridiane; jenachdem wir die Richtung nach Osten einschlagen, haben wir um 180° von uns entfernt entweder 12 Uhr später oder 180° nach Westen von uns entfernt 12 Uhr früher. Schreiben wir also den 31. Dcbr. Abends 6 Uhr, so ist je nachdem wir uns nach Osten oder Westen wenden 180° von uns entweder schon den 1. Jan. des folgenden Jahres früh 6 Uhr, oder den 31. Dcbr. früh 6 Uhr. Wer auf einem Pole wohnt, hat eigentlich alle Zeiten auf einmal, weil alle Meridiane durch den Pol gehen. Nimmt man voraus, was erst im folgenden Kapitel weiter betrachtet werden wird, daß der Polbewohner die Sonne 6 Monate über dem Horizonte sieht, also 6 Monate Tag hat, aber auch 6 Monate Nacht und denkt man sich denselben um eine ebenso große Winkelgröße nach Westen sich

drehend, als die Erde sich nach Osten dreht, so behält er die Sonne immer am höchsten am Himmel oder hat immer Mittag. Wollte Jemand auf dem Äquator immer Mittag haben, so müßte er, da die Erde sich in 4 Min. um einen Grad nach Osten dreht, in 4 Min. umgekehrt 15 Meilen nach Westen zurücklegen — dann ging es ihm, wie in Bürger's „der Kaiser und der Abt". Je weiter nach Norden oder Süden, desto weniger weit brauchte er sich zu bewegen; auf den Polen brauchte er, auf seinem Standpunkte stehenbleibend, sich nur um seine eigene Achse zu drehen. Verfolgt man solche Betrachtungen weiter, so wird die Erde zu einer großen, mächtigen, kostbaren Uhr. Zeigt aber eine Uhr in Eisenach oder irgend einer Stadt eine Zeit, so zeigt die Erde alle mögliche Zeit auf einmal. Denn wenn bei uns die Kinder noch in voller Erwartung auf die Christbescheerung harren und hoffen, also den 24. Decbr. Abends 6 Uhr, so ist diese schöne Handlung in Sidney, was über 10 Stunden frühere Zeit hat, längst vorüber, es ist dort Nachts um 4 Uhr am 25. Decbr. und die Kinder träumen vielleicht von ihrem Glücke; in Amerika aber hat man erst zu Mittag gegessen. Geht man an einem Orte zur Kirche, so kömmt man an einem andern aus derselben, obgleich die Kirche zu derselben Zeit begonnen hat; anderwärts liegt man noch im Bett und schläft. So könnte man auf der großen Erdkugel, wenn es bei uns Mittags 12 Uhr ist, einen andern Punkt oder eine unendliche Anzahl anderer Punkte für jegliche andere Zeit finden. Die größte Mannigfaltigkeit in der Einheit! Dieses interessante Spiel gewinnt um so mehr an Abwechslung und Reichhaltigkeit, wenn wir erst später zur Verschiedenheit der Tages-, auch noch die Verschiedenheit der Jahreszeiten hinzufügen können. An den meisten Globen befindet sich am Nordpole eine sogenannte Stundenrose, ein so getheilter Kreis, daß nach Osten die Zahlen 1, 2, 3 rc. sich befinden, nach Westen die Zahlen 11, 10 rc. Dreht man z. B. Eisenach unter den Meridian, stellt den Stundenzeiger auf 12, so kann man alle Orte desselben Meridians finden, welche dieselbe Zeit haben; bringt man dann Bombay, Sidney rc. unter den Meridian, so zeigt der Zeiger die Zeit unmittelbar, welche an diesen Orten schon nach 12 Uhr ist, weil dieselben nach Osten liegen, was natürlich bei Petersburg, Konstantinopel rc. ebenso der Fall ist.

Aber auch jeden westlichen Punkt, z. B. Neu-York, Philadelphia 2c. könnte man unter den Meridian bringen und der Zeiger würde andeuten, um wie viel Zeit vor 12 Uhr es an diesen Orten wäre oder die Uhr überhaupt nachginge.

Wenn im Vorigen von dem Wechsel zwischen Tag und Nacht die Rede war; wenn als Ursache davon die Achsendrehung der Erde binnen 24 Stunden von Westen nach Osten erkannt worden ist, so haben wir doch die verschiedene Länge der Tage, sowie den Wechsel der Jahreszeiten damit noch keineswegs erklärt. Wir wissen recht wohl den Unterschied zwischen der Tageslänge um Weihnachten und um Johannis und hoffen alle auf die Zunahme der Tage und die sich mit der steigenden Temperatur erneuernde Natur und auf das Lied des Vogels, welcher mit dieser Temperatur wieder zu uns zurückkehrt. Die Länge der Tageszeit, sowie die Temperatur hängt nicht von der Entfernung von der Sonne ab; denn es wird sich später ergeben, daß wir gerade im Winter der Sonne um ziemlich 700000 Meilen näher sind, als im Sommer, sondern von dem Winkel, unter welchem die Sonnenstrahlen eintreffen, d. h. ob dieselben eine Fläche schief oder senkrecht treffen. Legen wir ein Bret, eine Schiefertafel wagerecht, so wird der Gegenstand, selbst wenn die Sonne für uns im Sommer am höchsten steht, schief getroffen; man kann den Gegenstand aber den Strahlen der Sonne so zuneigen, daß dieselben senkrecht einfallen. Dann hat man stets die Erfahrung gemacht, daß die senkrecht einfallenden Sonnenstrahlen stets die größere, wärmende Kraft haben, während die Entfernung in Bezug auf die Sonne ganz dieselbe bleibt. Doch lernen wir zuerst den Augenschein in Bezug auf die Tageslänge und die Jahreszeiten etwas näher kennen. Wenn auch die Gegend, in welcher die Sonne aufgeht, im Allgemeinen Osten ist, ebenso die ihres Untergangs im Allgemeinen Westen, so findet doch ein sehr wesentlicher Unterschied Statt. So geht die Sonne um den 21. Dcbr. am meisten südöstlich auf, beschreibt am südlichen Himmel den kleinsten sichtbaren Halbkreis — der Tag bei uns wird am kürzesten, die Temperatur gestaltet sich zu der des Winters. Der Nordpolbewohner sieht um diese Zeit die Sonne gar nicht; wer auf dem südlichen Wendekreise wohnt, hat die Sonne senkrecht über seinem Haupte, im Zenith; der Südpol-

bewohner sieht dieselbe um einen Bogen von $23\frac{1}{2}^{0}$ über den Horizont, welcher der Äquator ist, sich erhebend. Wir sehen dieselbe, da wir gegen 51^{0} Breite haben und 90^{0} Grad unser Horizont sich neigt, in einer Höhe von $15\frac{1}{2}^{0}$ über dem Horizonte. Wer also noch $15\frac{1}{2}^{0}$ von uns nach Norden wohnt, sieht dieselbe dann im Horizonte. Nach dem 21. Dcbr., im Jan., Febr. und März geht die Sonne nicht mehr in Südosten auf, sondern nähert sich mehr und mehr beim Aufgange dem Ostpunkte und beschreibt einen größern Halbkreis über den Himmel, um nicht mehr südwestlich, sondern westlich unterzugehen. Sie tritt dann den Bewohnern der Parallelkreise zwischen dem südlichen Wendekreise und dem Äquator in das Zenith, bis dieselbe um den 21. März rein in Osten auf- und in Westen untergeht und am Himmel den Äquator beschreibt. Am 21. Dcbr. schnitt die Sonne den Meridian in einen kleineren südlichen und größeren nördlichen Theil, an jedem folgenden Tage schneidet sie denselben im Mittag etwas weiter nördlich, am 21. März in eine nördliche und südliche Hälfte. Wer auf dem Äquator wohnt, hat die Sonne senkrecht über sich; der Südpolbewohner sieht die Sonne im Horizonte verschwinden, der Nordpolbewohner im Horizonte aufgehen. Wir sehen die Sonne um einen Bogen von ungefähr 39^{0} über den Horizont sich erheben. In den darauf folgenden Tagen geht die Sonne weiter nordöstlich auf und schneidet im Mittage den Meridian in eine kleinere nördliche und größere südliche Hälfte, so daß sie allmälig allen auf den Parallelkreisen zwischen dem Äquator und dem nördlichen Wendekreise befindlichen Punkten einmal in das Zenith tritt. Um den 21. Juni geht die Sonne am meisten nordöstlich auf und nordwestlich unter und beschreibt für uns den größten Tagbogen. Alle, welche auf dem nördlichen Wendekreise wohnen, haben die Sonne im Zenith — die Sonnenstrahlen fallen für uns am wenigstens schief und haben die am meisten wärmende Kraft. Nach dem 21. Juni geht die Sonne wieder mehr nach Osten auf und Westen unter, bis dieselbe am 21. Septbr. rein im Osten auf- und Westen untergeht; der Herbst beginnt, Herbstes- Tag- und Nachtgleiche findet Statt, bis die Sonne gegen den 21. Dcbr. hin wieder mehr südöstlich auf- und südwestlich untergeht, kleinere Tagbogen am Himmel macht, weniger wärmende Kraft hat, bis am 21. Dcbr. die

Sonne am meisten südöstlich aufgeht, am Himmel den südlichen Wendekreis beschreibt, der kürzeste Tag und Wintersanfang Statt findet. Von nun an scheint die Sonne wieder zu steigen und also in 365 Tagen eine spiralförmige Linie um die Erde herum zu durchlaufen, von welcher zwei gleich große Spiralen am Ende liegen, der südliche und nördliche Wendekreis, die Spirale mit dem größten Durchmesser aber, der Äquator in der Mitte liegt und gleichweit vom Äquator nach Norden oder Süden gleich große Spiralwindungen liegen. Betrachten wir nun zuerst die Folgen dieser scheinbaren Bewegung der Sonne bezüglich der Tageslänge und Jahreszeiten für die verschieden wohnenden Erdbewohner, bevor wir nach einer andern Ursache der Erscheinung uns erkundigen. Versetzen wir uns in dem Augenblicke, in welchem die Sonne den Meridian schneidet, also im Mittag 1) auf den Äquator, so sehen wir am 21. Dcbr. die Sonne nach Süden und zwar vom Zenith um einen Bogen von $23\frac{1}{2}^{0}$ entfernt; alle folgenden Mittage wird der Winkel kleiner, bis dieselbe am 21. März im Zenith steht und ihre Strahlen senkrecht einfallen. Nach dieser Zeit sieht man die Sonne im Norden, bis sie am 21. Juni um einen Bogen von $23\frac{1}{2}^{0}$ vom Zenith abweicht. Nach dieser Zeit nähert sie sich dem Zenith wieder, bis dieselbe den 21. Septbr. im Zenith steht und am 21. Dcbr. wieder um $23\frac{1}{2}^{0}$ vom Zenith abweicht. Der Äquatorbewohner sieht also die Sonne 2 mal im Ostpunkte auf- und im Westpunkte untergehen; zweimal im Jahre südöstlich und nordöstlich auf- und untergehen; für denselben beschreibt die Sonne am 21. Dcbr. den südlichen, am 21. Juni den nördlichen Wendekreis, am 21. März und Septbr. den Äquator am Himmel. Die Sonne weicht im Mittage nie bedeutend vom Zenith ab, die Bogen, welche die Sonne am Tage über dem Horizonte beschreibt, sind an Größe nicht so bedeutend verschieden, der Bogen über dem Horizonte ist immer ungefähr die Hälfte des unter dem Horizonte liegenden oder des Nachtbogens, d. h. auf dem Äquator fallen die Sonnenstrahlen fast immer senkrecht, daher die Wärme fast immer sich gleichbleibend ist; am 21. März und 21. Septbr. müßte die Wärme am größten sein. Es giebt 2 Jahreszeiten, die nasse und trockene. Die nasse muß mit der heißesten zusammenfallen, weil bei der größten Hitze die größte Verdunstung möglich

und nothwendig ist und mit derselben die nasse Jahreszeit zusammenhängt. Tag und Nacht müssen gleich sein, weil der Tag- und Nachtbogen der Sonne gleich ist oder doch wenig abweichend; die Nacht tritt plötzlich ein, es giebt keine Dämmerung, weil die Sonne hinter der stark gewölbten Erde verschwindend, in der von Dünsten freieren Atmosphäre durch die Strahlenbrechung nicht mehr über den Horizont erhoben wird und weil keine Wolken am Himmel stehen, um das Licht der schon unter dem Horizonte stehenden Sonne zu reflektiren. 2) Versetzen wir uns auf den nördlichen Wendekreis, so haben wir die Sonne nur am 21. Juni im Zenith; zu jeder andern Zeit des Meridiandurchschnitts erblickt man dieselbe nach Süden; den größten Tagbogen beschreibt sie am 21. Juni, den kleinsten am 21. Dcbr., die Differenz zwischen der Tageslänge wird größer, der längste Tag dauert schon gegen 14 Stunden; die Temperaturverhältnisse weichen schroffer von einander ab, die 4 Jahreszeiten fangen an sich geltend zu machen, wenn auch noch nicht so ausgeprägt, als weiter nördlich. 3) Wohnen wir auf dem 50ten bis 51ten Breitengrade, so sehen wir die Sonne nie mehr im Zenith; im günstigsten Falle steht dieselbe am Mittage des 21. Juni um $27\frac{1}{2}^0$ vom Zenith. Der Unterschied zwischen Tag- und Nachtbogen wird größer, der längste Tag dauert 16—17 Stunden; die Temperaturunterschiede werden größer, die 4 Jahreszeiten treten ganz bestimmt und ausgeprägt auf, nur mit dem Unterschiede, daß sich dieselben nicht nach dem Kalendertage richten, weil die größte Wärme erst nach dem 21. Juni im Juli und August darum eintritt, weil die Sonne dann die Erde zu erwärmen die meiste Zeit gehabt hat und daß die Winterkälte in der Regel im Jan. und Febr. eintritt, wenn die Erde ihre Wärme am meisten ausgestrahlt hat, nicht am 21. Dcbr., als dem kürzesten Tage (wenn die Tage langen, kömmt der Winter gegangen), wie sich dieß Verhältniß auch für den Tag zeigt, erst nach 12 Uhr findet die größte Wärme, kurz vor Sonnenaufgang die größte Kälte Statt. 3) Auf dem nördlichen Polarkreise steht die Sonne am 21. Juni im Mittage um $42\frac{1}{2}^0$ vom Zenith ab; am 21. März und 21. Septbr. um $66\frac{1}{2}^0$; am 21. Dcbr. um 90^0. Wenn also keine Strahlenbrechung Statt findet, verschwindet die Sonne am Mittage im Horizonte, während der Tagbogen

am 21. Juni 24 Stunden beträgt. Während der längste Tag 24 Stunden beträgt, wird der kürzeste zu Null; die Temperaturverhältnisse werden immer schroffer; die kalte Temperatur herrscht vor. 4) Auf dem Nordpole sehen wir am 21. Juni die Sonne um $66\frac{2}{3}^{0}$ vom Zenith entfernt; am 21. Septbr. und 21. März beschreibt sie um uns herum den Horizont; vom 21. Dcbr. bis zum 21. März befindet sie sich unter dem Horizonte. Folglich hat der Nordpol kaltes Klima; der Tag währt vom 21. März bis zum 21. Septbr., also 6 Monate, ebenso die Nacht vom 21. Septbr. bis zum 21. März. 5) In ähnlicher, nur umgekehrter Weise, wie auf dem nördlichen Wende-, auf dem nördlichen Polarkreise und auf dem Nordpole gestaltet sich die Sache auf dem südlichen Wende- und Polarkreise und auf dem Südpole. Es findet vom Äquator aus nach Norden und Süden eine allmälige Zunahme der Tageslängen Statt, so daß der längste Tag am Äquator 12 Stunden, am Nordpole 6 Monate dauert; ebenso die Nacht. Darüber ließe sich eine besondere Tabelle aufstellen. Um sich die Sache noch mehr zu verdeutlichen, muß man über die Richtung, nach welcher der Schatten eines Menschen zu einer bestimmten Zeit fällt, klar werden. Da der Nordpolbewohner 6 Monate die Sonne gar nicht untergehen sieht, so wird sein Schatten ringsum nach allen Richtungen hin geworfen; er ist umschattig; die Eisenacher werfen ihre Schatten im Mittage stets nach Norden; wer auf dem nördlichen Wendekreise wohnt, ebenfalls, mit Ausnahme des 21. Juni, an welchem er den Schatten unter sich wirft; der Äquatorbewohner wirft den Schatten 2 mal unter sich (den 21. März und 21. Septbr.), einmal nach Norden (den 21. Dcbr.), einmal nach Süden (den 21. Juni). Der Bewohner des südlichen Wendekreises wirft seinen Schatten nach Süden, den 21. Dcbr. unter sich; der Bewohner des Südpols ist umschattig. Ohnschattig sind nur der Bewohner des Äq., des nördl. und südl. Wendekreises und zwar der erstere 2 mal im Jahre, die zweiten nur einmal im Jahre.

Die im Vorigen dargestellten Erscheinungen, nach denen die Sonne an verschiedenen Punkten in Osten auf- und in Westen untergeht, um den Meridian an verschiedenen Punkten zu schneiden und einen an Größe verschiedenen Tagbogen zu machen, konnten dadurch hervorgebracht werden, daß die Sonne im Laufe eines

Jahres einen spiralförmigen Gang um die Erde herum beschreibt. Wie bei allen scheinbaren Bewegungen kann es aber auch anders sein. Man kann sich die Erde in Bewegung, die Sonne in Ruhe denken, so zwar, daß sich die Erde um die im Mittelpunkte eines Kreises oder einer Ellipse stehende Sonne herumbewegt, so daß die Stellungen der Erdachse dabei stets zu einander parallel bleiben. Es fragt sich dann nur, was die Bahn der Erde und die von derselben eingeschlossene Ebene mit der Ebene des Sonnenäquators, welche man sich über die Sonne hinaus verlängert zu denken hat, für einen Winkel macht oder ob beide Ebenen in eine einzige zusammenfallen. Zu diesem Zwecke und zur deutlichen Versinnlichung aller hierhergehörigen Erscheinungen müßte man ein sogenanntes Tellurium besitzen, durch welches die Erde als sich in einer länglich runden Linie um die Sonne drehend in den verschiedenen Stadien dargestellt werden könnte, wobei sich vielleicht der Mond um die Erde drehend dargestellt würde und die verschiedenen Lichterscheinungen oder Lichtphasen des Mondes deutlich würden. Fassen wir zuerst das Verhältniß der Erde zur Sonne in das Auge, ohne uns dabei um den Mond weiter zu kümmern, so kann man die genannten Erscheinungen sehr leicht durch folgenden Apparat versinnlichen. Man nimmt einen hölzernen Reif in Kreisform; läßt denselben durch einen zweiten Reif von derselben Größe so schneiden, daß derselbe von Süden nach Norden geht und den ersten Reif in zwei gleiche Theile theilt. Sei der erste Reif der Himmelsäquator, so ist der zweite Reif der Himmelsmeridian; einen Viertelkreis vom Südpunkte liegt der Ost- und Westpunkt nach rechts und links; beide Punkte verbinde man durch einen dritten Reif von derselben Größe, welcher auf dem Himmelsäquator und auf dem Himmelsmeridiane senkrecht steht. Eine solche Vorrichtung heißt eine Armillarsphäre. Den ersten Meridian denken wir uns in 90 gleiche Theile oder Grade getheilt; durch die einzelnen Theilpunkte lege parallel zum Himmelsäquator die Parallelkreise, welche kleiner werden müssen, als der Himmelsäquator, besonders $23\frac{1}{2}^0$ nördlich und südlich vom Äquator den nördlichen und südlichen, sowie $66\frac{1}{2}^0$ nördlich und südlich den nördlichen und südlichen Polarkreis. Dann verbinde man den Ost- und Westpunkt, ebenso den Nord- und Südpunkt durch Fäden, in der Mitte lasse man eine kleine

Kugel sich befinden, welche die Sonne vorstellt. Weiter lege man durch den Punkt, wo der Meridian und der südliche Wendekreis sich schneiden einen größten, dem vorigen gleichen Kreis, welcher zugleich durch den Ostpunkt, durch den untern Durchschnittspunkt des Meridians und nördlichen Parallelkreises und durch den Westpunkt geht. In diesem zuletzt genannten Kreise ziehe man nun einen Faden oder Durchmesser, welcher den von Osten nach Westen gehenden senkrecht schneidet und den einen Durchschnittspunkt des südlichen Wendekreises und Meridians mit dem Durchschnittspunkte des nördlichen Wendekreises und Meridians verbindet; dieser Durchmesser oder Faden bildet dann mit dem den Süd- und Nordpunkt verbindenden Faden einen Winkel von $23\frac{1}{2}^{\circ}$. Endlich lege man parallel dem letzten Reife, welcher den Äquator ebenfalls unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}^{\circ}$ schneidet, einen kleinen Kreis oder länglich gezogenen Kreis von Draht, welcher zwei Punkte mit dem von Osten nach Westen gehenden Durchmesser und zwei Punkte mit dem Durchmesser des zuletzt genannten schief liegenden, den Äquator unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}^{\circ}$ schneidenden Kreises gemein hat. Dieser zuletzt genannte Drahtring, welcher in einer gewissen Entfernung von der Sonne absteht, stellt uns die Bahn oder krumme Linie vor, in welcher sich die Erde so bewegen kann, daß alle früher genannten Erscheinungen zum Vorschein kommen. Man sieht zuerst leicht, daß sich die Erde nicht im Himmelsäquator oder einer dem Himmelsäquator parallelen Linie bewegen kann. Denn wenn auch die Achse der Erde zur Ebene dieser Linie nicht senkrecht stände, sondern geneigt wäre, so würden doch die Sonnenstrahlen den Äquator immer senkrecht, die auf der nördlichen und südlichen Halbkugel Wohnenden unter einem und demselben schiefen Winkel treffen, den Nord- und Südpol streifen — dabei würden die Tageslängen, die Wärmeverhältnisse und Jahreszeiten immer dieselben bleiben. Ein auf dem 51° Parallelkreise wohnender Mensch hätte immer dieselbe Tageslänge und dieselbe Jahreszeit. Welche Einförmigkeit, wie wäre Alles in Frage gestellt und gestört, was mit der verschiedenen Tageslänge und den verschiedenen Jahreszeiten zusammenhängt! Es muß also eine andere Erklärung gesucht werden; zuerst und in voller Klarheit hat dieselbe Kopernikus (geb. zu Thorn 1473, † zu Frauenburg 1543) gegeben. Man

denke sich, wie die Achse der Erde, welche zwar auf der Ebene ihres eigenen Äquators senkrecht stehen muß, mit der Ebene der Bahn, welche schiefliegt und mit der Ebene des Sonnenäquators einen Winkel von 23½° bildet, also mit der Ebene der Erdbahn, welche man auch aus Gründen Ekliptik nennt, einen Winkel von 66½° bildet, bei ihrer Bewegung in der Linie der Erdbahn sich stets so bewegt, daß dieselbe nordwärts gerichtet ist und den genannten Winkel mit der Ebene der Erdbahn bildet, so daß jede Stellung der Erdachse allen vorhergehenden parallel bleibt, wobei natürlich der nördliche Theil der Erdachse nie genau nach Norden, sondern nur nördlich gerichtet ist. Bringen wir nun die Erde mit der schon angedeuteten Lage ihrer Achse in den Südpunkt ihrer Bahn, so wendet sie ihre nördliche Hälfte so zur Sonne hin, daß diese den nördlichen Wendekreis auf der Erde senkrecht bescheint und ihre Strahlen über den Nordpol hinaus wirft, so daß ein auf dem nördlichen Polarkreise Wohnender eine Tageslänge von 24 Stunden hat, ein auf dem südlichen Polarkreise Wohnender die Sonne im Horizonte verschwinden sieht, während sie für den Bewohner des nördlichen Polarkreises 47° über dem Horizonte im Mittage steht. Dieß ist die Stellung der Erde für den 21. Juni, unsere Sommerstellung. Läßt man die Erde aus ihrer Stellung sich weiter drehen, so kömmt dieselbe nach einem Vierteljahre in den Ostpunkt; der Äquator wird senkrecht beschienen; die Strahlen streifen den Nord- und Südpol. Stellung für den 21. Septbr.; Tag- und Nachtgleiche, Herbststellung. Nach wieder einem Vierteljahre befindet sich die Erde der Stellung vom 21. Juni gegenüber; der Nordpol ist von der Sonne ab-, der Südpol der Sonne zugewendet; die Sonne bescheint den südlichen Wendekreis senkrecht und wirft ihre Strahlen über den Südpol hinaus. Die südliche Halbkugel hat ihre längsten Tage und ihren Sommer; die nördliche Halbkugel ihre kürzesten Tage und ihren Winter, den 21. Dcbr. Wird die Erde wieder um ¼ ihrer Bahn fortgerückt, so kömmt dieselbe in den Westpunkt; die Sonnenstrahlen treffen den Äquator senkrecht und streifen beide Pole; Frühjahrsstellung am 21. März; Tag- und Nachtgleiche des Frühlings. Wieder nach einem Vierteljahre tritt die Erde in ihre Sommerstellung für uns ꝛc. Eine solche Drehung der Erde um die im Mittelpunkte sich befindende Sonne

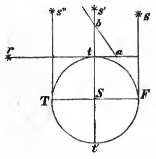
muß ganz dieselben Erscheinungen hervorbringen, welche die früher vorausgesetzte spiralförmige Bewegung der Sonne um die Erde herum hervorgebracht hat. Den der Erdbahn parallelen größten Kreis am Himmel theile man in 12 Sternbilder; der Sonne gegenüber steht am 21. März der Widder, der Erde die Wage; dann entsprechen sich Stier und Skorpion; Zwillinge und Schütze; Krebs und Steinbock; Löwe und Wassermann; Jungfrau und Fische. Das Sternbild, welchem eine Zeit lang die Sonne gegenübergestanden hat, sieht man kurz vor Sonnenaufgang; das, welchem die Sonne gegenüberstehen wird, kurz nach Sonnenuntergang. Die 12 Sternbilder bilden den sogenannten Thierkreis, welcher zwischen den Wendekreisen liegt.

Wir kommen nun zur Kritik; welche von beiden Bewegungen ist wahr? Oder: Für welche von beiden Annahmen lassen sich die überzeugendsten Gründe vorbringen?

Nehmen wir einmal an, was man später aus andern Gründen weiß, daß die Sonne ungefähr $1\frac{1}{2}$ millionenmal so groß ist, als die Erde; nehmen wir ferner hinzu, daß die Schwer- oder Anziehungskraft dem Stoffe inwohnend bei der Sonne viel größer sein muß, als bei der Erde; so mußte es unbegreiflich sein, wie es möglich sein konnte, daß die $1\frac{1}{2}$ millionenmal so kleine Erde die Sonne zur jährlichen Bewegung um die Erde zwingen könne. War es nicht weit einfacher und richtiger, wenn man annahm, daß die Sonne die Erde in ihrer jährlichen Bahn vermöge ihrer Schwerkraft ziehe? Ferner wissen wir, daß ein Körper, der sich wie die Erdkugel um seine Achse dreht, nicht stillstehend im Raume verharren kann, sondern fortschreiten muß — die jährliche Umdrehung ist eine Folge der täglichen, die Revolution eine Folge der Rotation. Woher man aber die Rotation zu leiten habe, ob von einem durch eine von Außen wirkende Kraft der Anziehung zur Zeit der Erdbildung, wenn ihre Richtung nicht genau durch den Mittelpunkt der Erde gegangen ist, ob von einer andern Ursache oder Annahme, so folgt, wie aus der Achsendrehung eines Kreisels, die fortschreitende Bewegung der Erde. Alle Erscheinungen am Himmel lassen sich durch die jährliche Umdrehung der Erde am einfachsten und leichtesten erklären; künftige Erscheinungen mit Bestimmtheit vorhersagen. Es giebt aber auch noch einen andern, direkten Beweis für die jährliche

Umdrehung der Erde. Die Fixsterne, welche in der Ekliptik oder dem der Erdbahn parallelen Kreise stehen, scheinen von der Erde aus gesehen jährlich in einem Bogen von 40,5 Sekunden hin- und herzugehen, eine Ortsveränderung, welche nach der Abirrung oder Aberration des Lichtes benannt wird. Die Fixsterne am Pole der Ekliptik scheinen einen Kreis mit 40,5 Sek. Durchmesser zu beschreiben. Diese von Bradley und Molineux im Jahre 1725 entdeckte Abirrung des Lichtes der Sterne rührt von den verschiedenen, sich verändernden Stellungen der Erde in ihrer Bahn her, verglichen mit dem Verhältniß der Geschwindigkeit des Lichtes zur Geschwindigkeit der Erde in ihrem Umlaufe um die Sonne. Das Licht bewegt sich 10186 mal schneller als die Erde in ihrer Bahn (beim Jupiter und seinen Trabanten etwas Näheres über die Schnelligkeit des Lichtes) und während es in 8′ 13,2″ den Halbmesser der Erdbahn durchstrahlt, beschreibt die Erde in ihrer Bahn einen Bogen von 20,25″. So werden diese 20,25″ der Bogen, um den sich die Fixsterne scheinbar von ihrem wahren Orte entfernen, das Jahr hindurch nach beiden Seiten hinaus hin und her.

(Siehe Fries populäre Vorlesungen über die Sternkunde, 2. Aufl. S. 144, 145.)



Ist S die Sonne, FtT die Erdbahn und steht in ihrer Ebene nach Fs, Sts′, Ts″ ein Fixstern hinaus, so werden bei seiner ungeheuren Entfernung alle Gesichtslinien von der Erdbahn aus so gut, als parallel bleiben, d. h. die Linie FS oder FT ist im Verhältniß zur Entfernung der Fixsterne eine verschwindende Linie oder anstatt auf den verschiedenen Punkten der Erdbahn zu sein, können wir uns auch in den Mittelpunkt der Sonne versetzen. In F geht die Erde diesem Sterne gerade entgegen, in T gerade von ihm hinweg; man sieht also den Stern gerade so, wie in dem ruhenden Punkte S. Geht aber die Erde von F nach t, so geht sie aus der Richtung des Sternes und in t geht die Erde in der Richtung atr, das Licht aber nach s′tS, so daß beide Richtungen einen

rechten Winkel machen. Es ist aber ta : tb = 1 : 10186, wie die Geschwindigkeit der Erde zu der des Lichtes. Der Lichtstrahl s't wird der Richtung ba folgen. Soll der Strahl vom Stern zur Erde genau der Axe eines Fernrohrs folgen, so muß man das Fernrohr gegen ts', die Parallele mit Fs, um den Winkel abt, welcher wegen des Seitenverhältnisses von ta : tb = 20,25″ ist, neigen, dann sehen wir den Stern am weitesten von s't der wahren Richtung entfernt. Von t nach T geht er dann wieder zum wahren Ort zurück und im andern Halbjahr wiederholt sich dieses Hin- und Hergehen auf der andern Seite, während die Erde durch Tt'F nach F zurückkehrt.

Um die Abirrung des Lichtes noch deutlicher und anschaulich zu machen, so setze man den Fall, daß ein still stehender Mensch oder ein ruhender Tisch senkrecht davon getroffen werde; ein Lichtpunkt, welcher senkrecht in ein geöffnetes Auge fiele, würde senkrecht aufwärts gesucht werden. Denkt man sich aber den Menschen in Bewegung, dem Regentropfen oder Lichtpunkte entgegen, so würde der Regentropfen nicht am Gesicht senkrecht herabfallen, sondern dasselbe treffen; ebenso würde der Lichtstrahl schief in das Auge fallen. Es würde also derselbe Erfolg erreicht, als wenn der ruhende Mensch von einem Regentropfen oder Lichtstrahl schief getroffen würde.



Bedeutet op die Geschwindigkeit der Erde, ro die Geschwindigkeit der rechtwinklig auf ihre Bahn treffenden Lichtstrahlen, so muß es einem Auge in o erscheinen, als ob bei ruhender Erde die Lichtstrahlen in der Richtung os gekommen wären; das Auge sieht den in a befindlichen Stern in b (Müller, kosm. Physik S. 242). Der Winkel ros = 20,25″; die op = 4,14 Meilen; daraus ergiebt sich ro = 41400 Meilen = der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Daß die Fixsterne eine Parallaxe haben, über welchen Gegenstand in dem betreffenden Kapitel die Rede sein wird, daraus folgt auch direkt, daß sich die Erde um die Sonne dreht.

Die Zeit, in welcher die Erde ihre Umdrehung um die Sonne vollendet, beträgt 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 45 Sekunden, was später wieder zur Sprache kommen wird. Von

der Umdrehung der Erde hängen die einzelnen Tageslängen und die verschiedenen Jahreszeiten ab. Je nach den Breitengraden hat man folgende Tageslängen:

Längster Tag.		Geogr. Br.
12	Stunden	0° 0′
13	"	16° 44′
14	"	30° 49′
15	"	41° 24′
16	"	49° 3′
17	"	54° 31′
18	"	58° 28′
19	"	61° 19′
20	"	63° 23′
21	"	64° 50′
22	"	65° 57′
23	"	66° 22′
24	"	66° 32½′
30	"	67° 19′
60	"	69° 34′ ꝛc.
180	"	88° 38′
6	Monate	90° 0′

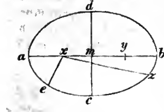
(Diesterweg).

Alle Menschen, welche auf einem und demselben Meridiane wohnen, haben zu gleicher Zeit Mittag, überhaupt also gleiche Tageszeit; wer auf einem und demselben Parallelkreise mit andern Menschen wohnt, hat dieselbe Jahreszeit. Gegenwohner nennt man solche Menschen, welche auf demselben Meridiane wohnen, dieselbe, aber entgegengesetzte Breite haben; unsere Gegenwohner, wenn wir 51° nördlicher Breite und 27 bis 28° östlicher Länge haben, befinden sich im südlichen atlantischen Ocean, südwestlich vom Kap der guten Hoffnung. Besser findet man die Gegenwohner z. B. von Neu-York, da Amerika sich weit genug nach Süden streckt. Die Gegenwohner stimmen in der Tageszeit überein, sind aber in der Jahreszeit entgegengesetzt. Es können ferner zwei Menschen auf demselben Parallelkreise wohnen, aber um 180° von einander entfernt; dann stimmen sie zwar in der geographischen Breite überein, sind aber in der Länge verschieden, sie haben zwar die Jahreszeiten gemein, sind aber in den Tageszeiten entgegengesetzt.

Dieselben heißen Nebenwohner; unsere Nebenwohner sind ungefähr auf den Sandwichsinseln. Es fragt sich aber, in welcher Richtung man nach den Sandwichsinseln reist; geht man nach Osten, so verliert man 12 Stunden; geht man nach Westen, so gewinnt man 12 Stunden an Zeit. Zwei Menschen A und B, von denen A ostwärts, B westwärts nach den Sandwichsinseln geht, müssen verschiedener Meinung bezüglich der Zeit sein — des Einen Uhr muß schon 12 Uhr mehr, des Andern 12 Uhr weniger zeigen — doch befinden sich beide auf demselben Punkte. Befinden sich endlich 2 Menschen an den Endpunkten eines Durchmessers, nur nicht auf dem Nord- oder Südpol, oder auf den Endpunkten eines Äquatordurchmessers, weil die Einen Gegenwohner, die Andern Nebenwohner werden würden, so hat man die Gegenfüßler oder Antipoden. Sie haben gleiche, aber entgegengesetzte Breite und wohnen mit uns auf demselben Meridiane, aber um 180° von uns entfernt. Dieselben haben also entgegengesetzte Tages- und Jahreszeiten. Unsere Antipoden finden sich in der Nähe von Neuseeland. Man muß in Bezug auf Neben- und Gegenwohner, sowie auf Antipoden in's Einzelne gehen und individualisiren, um die Eigenthümlichkeiten und gegenseitigen Beziehungen recht klar zu machen und zu zeigen, wie wechselnd und mannigfach Tages- und Jahreszeit ist und alles Leben, alle Thätigkeit und Beschäftigungen, welche davon abhängen — Alles aber hängt von der leuchtenden und wärmenden Sonne ab, um welche sich die Erde bei einer 24stündigen, von Westen nach Osten gerichteten Achsendrehung in 365¼ Tagen in einer zur Sonnenbahn um 23½° geneigten Ebene dreht, zu welcher der Erddurchmesser einen Winkel von 66½° bildet.

Hat uns Kopernikus in seiner Genialität gezeigt, daß die Sonne nach seiner Ansicht steht (denn auch das ist jetzt zweifelhaft geworden), so hat uns der große Kepler („So hoch als Kepler stieg, war noch kein Mensch gestiegen und doch — starb er in Noth; er wußte nur die Geister zu vergnügen, drum ließen ihn die Leiber ohne Brot“. Kästner.) belehrt, daß die Erde sich nicht in einem Kreise, sondern in einer Ellipse dreht, wenn auch die Excentricität oder die Linie zwischen den beiden Brennpunkten verhältnißmäßig nicht sehr groß ist. In einem Brennpunkte steht die Sonne. Wäre die anziehende Kraft der Sonne und die

Summe der abziehenden, oder centrifugalen Kräfte gleich, so müßte die Erde sich in einer Kreislinie bewegen. Dem ist aber nicht so. Dieselbe wird sich um so schneller auf ihrer Bahn bewegen, wenn sie in der Nähe der Sonne ist; um so langsamer, wenn sie der Sonne am fernsten ist. Ist beistehende Figur die Ellipse der Erdbahn, steht die Sonne in x, dem einen Brennpunkte, so hat die Erde in a ihre Sonnennähe, in b ihre Sonnenferne. Der Weg von d über a nach c, also die Hälfte der Erdbahn legt die Erde, weil sie wegen der Sonnennähe eine größere Geschwindigkeit hat, in kürzerer Zeit zurück, als den Weg von c über b nach d. Der Unterschied beträgt ungefähr 7 Tage. Wir befinden uns in a, wenn Winter ist. Der Herbst beträgt 89 Tage 17 St. (vom 23. Septbr. bis zum 21 Dcbr.), der Winter 89 Tage 1 St., beide zusammen 178 Tage 18 St.; der Frühling beträgt 92 Tage 22 St., der Sommer 93 Tage 12 St., zusammen 186 Tage 10 St. — also ein Unterschied von 7 Tagen 16 Stunden. Daß aber die Erde auf ihrer Bahn eine ungleiche Geschwindigkeit hat, liegt im Gesetz der Ellipse. Beschreibt der Radius vektor (Radius vector) xa in 3 Monaten im Winter die Fläche xae, so beschreibt derselbe im Sommer in derselben Zeit die ebenso große Fläche bxz; letztere hat den kürzeren Bogen bz, während erstere den längeren ax hat. Da beide Bögen von der Erde in derselben Zeit durchlaufen werden, so muß sich die Erde mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen (der Radius vektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen, Kepler). Wären wir von der Sonne immer gleichweit entfernt, so müßte uns bei sonst gleichen Umständen der Durchmesser der Sonne immer gleich groß erscheinen; derselbe erscheint uns aber je nach den verschiedenen Jahreszeiten in einer gewissen wiederkehrenden Ordnung von ungleicher Größe — oder der Sehwinkel, unter welchem uns der Durchmesser der Sonne erscheint, ist ungleich groß — folglich ist unsere Entfernung von der Sonne ungleich und wir können uns nicht in einer Kreislinie bewegen. Theilt man die Linie von dem Punkte, in welchem die Sonne steht, bis zur Sonnenferne (Aphelium) in



30 gleiche Theile, so kommen auf die Linie vom Brennpunkte bis zum Perihelium (Sonnennähe) nur 29 solcher Theile — also beträgt der Unterschied $^1/_{30}$. Wie weit die Sonne im Mittel von uns entfernt sei, das läßt sich bestimmen. Denn da der scheinbare Durchmesser der Sonne ungefähr $^1/_2$ Grad oder 30 Minuten beträgt, also der halbe scheinbare Durchmesser 15 Minuten; so kann man sich aus der Linie ab oder dem Erdhalbmesser, aus dem Winkel bei b = 90° und dem bei s = 15′



ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, in welchem die bs die Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Sonne bedeutet. Zeichnete man nun in Verjüngung oder rechnete man die bs aus, so fände man dieselbe ungefähr = 21 Millionen Meilen. Die Erdbahn nähert sich aber einer Kreislinie, also muß der Umfang der großen krummen Linie, in welcher sich die Erde bewegt = 3,14 mal 42 Millionen Meilen oder 132 Millionen Meilen in runder Zahl sein. Es läßt sich auch leicht berechnen, daß die Erde in einer Sekunde ungefähr 4 Meilen zurücklegt, da sie 132 Millionen Meilen in 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten und 45 Sekunden zurücklegt.

Aus der ungleichmäßig schnellen Bewegung der Erde in ihrer Bahn und aus der schiefen Lage der Ekliptik ergiebt sich, daß die Sonnentage nicht gleich sind, d. h. die Zeit von der einen Kulmination der Sonne bis zur nächsten, weßhalb auch gute Uhren täglich zu Mittag regulirt werden müßten, um die wahre Zeit zu zeigen. Man nimmt deßhalb eine in ihrer Bahn mit gleichmäßiger Geschwindigkeit sich bewegende Erde oder Sonne an — was für unsern Zweck ganz gleichgültig ist. Bestimmt man nun nach dem Durchgange dieser gedachten, sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegenden Sonne, durch den Meridian die Zeit, so hat man nicht die *wahre*, sondern die *mittlere* Zeit, nach welcher unsere Uhren gestellt werden. Die Zeit von einem Durchgange eines Fixsterns durch den Meridian bis zum

nächsten, oder der Sterntag ist eine sich gleich bleibende Größe; mit dieser kann ein Sonnentag oder die Zeit von einem Durchgange der Sonne durch den Meridian bis zum nächsten, nicht übereinstimmen, weil sich die Erde außer um ihre Achse auch um die Sonne dreht und zwar ebenfalls von West nach Ost. Beobachtet man zu diesem Zwecke einen Fixstern, z. B. im Gürtel des Orion, und steht derselbe vielleicht Ende Januar Abends 9 Uhr im Meridiane, so steht er Tages darauf ungefähr um 4 Minuten früher im Meridiane; also nach einem Monate um 30 mal 4 Minuten oder 2 Stunden, in 2 Monaten schon um 4 Stunden früher ꝛc. und in 12 Monaten um 24 Stunden früher. So kömmt es, daß uns im Jahre der Orion zu allen Tageszeiten durch den Meridian geht oder kulminirt — weßhalb wir die am Tage Statt findenden Kulminationen nicht sehen. Ein mittlerer Sonnentag ist = 24 St. 3 Min. 56 Sek. Sternzeit und ein Sterntag = 23 St. 56 M. 4 S. mittlerer Zeit; 365 mittlere Sonnentage = 366 Sterntage. Der mittlere Sonnentag stimmt mit dem wahren Sonnentage nicht überein; die Sonne befindet sich entweder noch links vom Meridiane, wenn wir gegen ihre Kulmination hin nach Süden schauen, also östlich oder schon rechts vom Meridiane oder westlich. Dadurch wird der Vormittags- und Nachmittagsbogen der Sonne ungleich. Im Herbste haben wir erst Mittag, wenn die Sonne westlich oder rechts vom Meridiane steht, dadurch muß der Vormittag länger werden, aber der Nachmittag kürzer; daher man die Abnahme der Tage besonders Nachmittags spürt. Im Februar und gegen das Frühjahr hin haben wir nach mittlerer Zeit schon Mittag, wenn die Sonne noch links oder östlich vom Meridiane steht. Dann ist der Nachmittagsbogen länger, als der Vormittagsbogen und die Zunahme der Tage findet mehr Abends als Morgens Statt. Die Zeit, um welche die wahre Sonnenzeit und die mittlere von einander verschieden sind, nennt man die Zeitgleichung. Dieselbe ist Null oder die wahre und mittlere Zeit stimmen mit einander überein oder die Kulminationszeit der Sonne ist zugleich der Mittag nach mittlerer Zeit am 15. April, 15. Juni, 1. Septbr. und am 24. Dcbr. Der stärkste Unterschied beträgt ungefähr ¼ Stunde; so nehmen wir nach mittlerer Zeit am 11. Febr. an, daß es Mittag sei, wenn sich die Sonne westlich vom Meridiane befindet

und zwar um einen Bogen, welcher in Zeit umgewandelt eine Viertelstunde beträgt. Da nun zu 360° 24 St. gehören oder zu einer Stunde 15°, so gehören zu $\frac{1}{4}$ Stunde $3\frac{3}{4}$ Grad und da der scheinbare Durchmesser der Sonne etwa $\frac{1}{2}$° oder 30 Min. hat, so steht die Sonne um $7\frac{1}{2}$ Durchmesser vom Meridiane nach Westen ab; den 11. Febr. hätte man also 15 Min. zu addiren zur wahren Zeit — denn wenn wir Mittag annehmen nach mittlerer Zeit, ist es eigentlich erst $11\frac{3}{4}$ Uhr nach wahrer Zeit. Aber den 2. Novbr., wenn wir nach mittlerer Zeit Mittag annehmen, ist's schon $12\frac{1}{4}$ Uhr; daher müssen wir schon $11\frac{3}{4}$ Uhr nach mittlerer Zeit den Mittag annehmen, wenn wir den wahren Mittag finden wollen oder von dem Mittage der mittleren Zeit 15 Minuten abziehen, um welche der wahre Mittag schon früher gewesen ist. Im Herbste also nehmen die Tage am stärksten des Nachmittags ab; ebenso nehmen die Tage am stärksten im Februar Nachmittags zu. Ein Uhrmacher muß eine vollständige Tabelle haben, welche angiebt, um welche Zeit die mittlere Zeit von der wahren abweicht. Beobachtet er also an gewissen Tagen die Kulmination der Sonne, so wird er mit Ausnahme des 15. April, 15. Juni, 1. Septbr. und 24. Dcbr. zur wahren Sonnenzeit eine Anzahl von Minuten addiren oder von derselben subtrahiren müssen, um die mittlere Sonnenzeit zu finden, oder er wird schon Mittag annehmen, wenn die Sonne noch östlich vom Meridiane steht, oder er nimmt erst Mittag an, wenn die Sonne schon westlich vom Meridiane steht.

Da einmal von der Zeit der Umdrehung der Erde um die Sonne oder von dem bürgerlichen Jahre die Rede ist, so mögen noch einige auf unsere Zeiteintheilung bezügliche Bemerkungen hier eine Stelle finden, wobei vorausgesetzt ist, was später weiter erörtert werden wird, daß die verschiedenen Lichterscheinungen oder Lichtphasen des Mondes in $29\frac{1}{2}$ Tagen wiederkehren. Die Umdrehungszeit der Erde um die Sonne beträgt nach Obigem 365 Tage 5 St. 48 M. 45 S. Wenn also Julius Cäsar das Jahr nur zu 365 Tagen annahm, so fehlten ziemlich 6 St. oder $\frac{1}{4}$ Tag, weniger 11 Min. 15 Sek. Deßhalb ordnete derselbe an, daß das 4te Jahr ein Schaltjahr von 366 Tagen sein und dem Monat Februar ein Tag eingeschaltet werden sollte, damit Jahreszeiten und Monate immer mit einander übereinstimmten.

Er hatte aber 11 Min. 15 S. zu viel angenommen oder in 400 Jahren 3 Tage; 1582 betrug der Unterschied schon 10 Tage, so daß Frühlingsanfang auf den 11. März fiel, anstatt auf den 21. Daher bestimmte Papst Gregor XIII., nach dem 4. Okt. sogleich den 15. zu schreiben und in 400 Jahren 3 Schalttage auszulassen. Jedes 4te Jahr war ein Schaltjahr, was man daran erkennen kann, daß sich die beiden letzten Stellen mit 4 theilen lassen; die Säkularjahre aber, wie 1700, 1800, 1900 rc., deren erste Stellen nicht durch 4 theilbar sind, sollten ausgenommen sein. Dieser verbesserte oder Gregorianische Kalender weicht jetzt um 12 Tage vom Julianischen ab. Wir können also alle Feste recht bequem 2 mal feiern, wenn wir nur nach Rußland gehen, wo der Julianische Kalender noch besteht, nach welchem alle Feste später fallen. Wird nicht einmal, was sehr wahrscheinlich ist, eine Maßregel getroffen, wie unter Gregor, so kann Pfingsten nicht nur auf unsere Ostermonate (März und April), sondern noch in den Januar, ja auf Weihnachten rc. fallen, oder die wärmsten Monate und die kältesten vertauschen ihre Rollen; schon in 10000 Jahren wäre bei den Völkern alten Styles auf der nördlichen Halbkugel der Oktober der kälteste und der April der wärmste Monat des Jahres. Diese Unstatthaftigkeit, daß der Jahresanfang und die Jahreszeiten allmälig in alle Jahreszeiten fallen, findet noch mehr bei den Türken Statt, welche ein Mondjahr zu 354 oder 355 Tagen haben — im bürgerlichen Leben gilt aber der Julianische Kalender.

Neujahr, Johannis, Michaelis, Advent, Weihnachten sind Feste, welche immer auf denselben Tag fallen, den 1. Jan., den 24. Juni, den 29. Septbr., den 4ten Sonntag vor Weihnachten zur Erinnerung an die Ankunft und Geburt Christi. Andere christlichen Feste sind beweglich und richten sich nach dem Osterfeste. Die von der Kirchenversammlung zu Nicäa aber 325 n. Chr. festgesetzte Osterregel lautet: das Osterfest wird am ersten Sonntage nach dem ersten Vollmonde nach der Frühlings- Tag- und Nachtgleiche gefeiert. Ist also den 21. März Frühlings- Tag- und Nachtgleiche und findet an dem 21. März noch nach dem Äquinoktium der Ostervollmond Statt, ist dann der 21. März ein Sonnabend, also der 22. März ein Sonntag, so kann am 22. März frühstens Ostern sein. Die

eine Ostergrenze ist also der 22. März; wäre aber am 20. März Vollmond gewesen, so findet der nächste Vollmond erst nach 29 Tagen, also am 18. April Statt. Im ungünstigsten Falle muß der 18. April ein Sonntag sein, so daß erst der 25. April Ostersonntag wäre; der 25. April ist die andere Ostergrenze. Zwischen dem 22. März und dem 25. April muß Ostern fallen. Der 7te Sonntag vor Ostern ist der Fastnachtssonntag, der erste vor Ostern der Palmsonntag; die Woche zwischen dem Palmsonntag und dem ersten Ostertag heißt die stille Woche mit Gründonnerstag und Charfreitag. Der grüne Donnerstag, sowie das Wort Ostern, von der Frühlingsgöttin Ostara, sollen an den wiederkehrenden Frühling erinnern; überhaupt sind die alten heidnischen Feste christianisirt worden. Der 7te Sonntag nach Ostern ist Pfingsten (πεντεκόστη, der 50te Tag nach Ostern); das Himmelfahrtsfest fällt auf den vierzigsten Tag nach Ostern, also den zweiten Donnerstag vor Pfingsten; der erste Sonntag nach Pfingsten heißt Trinitatis- oder Dreieinigkeitssonntag; solcher kann es mehr geben, wenn Ostern möglichst früh fällt; die Trinitatissonntage hören auf mit dem 1ten Adventssonntage (Ankunftssonntage), dem 4ten Sonntage vor Weihnachten, mit welchem das Kirchenjahr beginnt, während das bürgerliche mit dem 1. Jan. anfängt. Die Sonntage zwischen Neujahr und Ostern haben noch besondere, meist lateinische Namen, welche an den Anfang von Gebeten rc. erinnern, ebenso wie die Sonntage zwischen Ostern und Pfingsten, z. B. Reminiscere, Oculi, Lätare, Judica, Palmarum — Rogate, Jubilate rc.

Das Epiphanienfest oder das Fest der Erscheinung Christi, den 6. Jan.; das Fest der Reinigung Mariä oder der Darstellung Christi, auch Lichtmesse, den 2. Febr.; das Fest der Verkündigung Mariä oder der Empfängniß Christi, den 25. März; Fest der Heimsuchung Mariä, am 2. Juli; Reformationsfest, den 31. Okt.; Todtenfest, der letzte Sonntag im Kirchenjahre; der Bußtag im Advent, Freitag nach dem 1ten Adv. Wenn das Weihnachtsfest nicht gerade auf einen Sonntag fällt, so kann es Sonntage nach Neujahr geben; fällt es aber auf einen Sonntag, so ist am Sonntag nach Weihnachten Neujahr und am darauf folgenden Sonntage der erste Epiphaniensonntag. Die Epiphaniensonntage fallen zwischen den ersten Epiphaniensonntag (den 6. Jan.) und

den Sonntag Septuagesima (den 9ten Sonntag vor Ostern). Es giebt wenigstens 2, höchstens 6 Epiphaniensonntage. Sonntag Septuagesima (der 70te Tag), Sexagesima (der 60te Tag) und Quinquagesima (der 50te Tag), was wirklich bei den andern nur annähernd der Fall ist. Mit dem Sonntage Quinquagesima oder auch Esto mihi, nach Ps. 71, 3. Sei mir ein starker Fels, esto mihi in deum protectorem. Der Dienstag darauf ist Fastnacht, der Mittwoch Aschermittwoch „Bedenke, Mensch, daß du Erde und Asche bist". Die 40tägigen Fasten beginnen. Die folgenden Sonntage sind Invocavit (Ps. 91, 15. invocavit me et exaudiam eum, er rufet mich an, so will ich ihn erhören. Dieser Sonntag heißt auch Quadragesima (wegen der 40tägigen Fasten oder weil es 40 Tage vor Ostern); Reminiscere (Ps. 25, 6. reminiscere, domine, miserationum tuarum, gedenke, Herr, an deine Barmherzigkeit); Oculi (Ps. 25, 15.) Oculi mei spectant semper ad dominum, quoniam ipse evellet de laqueo pedes meos, meine Augen sehen stets zu dem Herrn, denn er wird meinen Fuß aus dem Netze ziehen; Lätare, Jes. 66, 10. laetare, Jerusalem, et exaltate in ea, freue dich, Jerusalem, und sei fröhlich über sie, heißt auch Mittfasten, auch Rosensonntag (wegen der Einweihung von Rosen); Judica, Ps. 43, 1. judica me, domine, richte mich, Gott — dann Palmarum, wegen der gestreuten Palmenzweige. Der erste Sonntag nach Ostern heißt Quasimodogeniti, wie neu geboren, 1 Petri 2, 2. An diesem Tage fand die Aufnahme der Katechumenen in's Christenthum Statt; man kleidete sich in Weiß, daher auch der weiße Sonntag. Misericordias domini, Ps. 33, 5., misericordias domini plena est terra, die Erde ist voll der Güte des Herrn; Jubilate, Ps. 66, 1. jubilate deo omnes terrae, jauchzet dem Herrn, alle Lande; Cantate, Ps. 96, 1. cantate domino canticum novum, singet dem Herrn ein neues Lied; Rogate, Joh. 16, 23—30., rogate = bittet; Exaudi, Ps. 27, 7., exaudi, domine, vocem meam, Herr erhöre meine Stimme.

Die Wochentage haben ihren Namen von den Planeten, welche die Alten für solche hielten und kannten und von denen man glaubte, daß sie den Tag und seine erste Stunde beherrschten, nämlich nach S a t u r n, J u p i t e r, M a r s, S o n n e, V e n u s, M e r k u r und M o n d. Wir fangen den Tag um 12 Uhr Mitter-

nachts an, die Griechen fingen denselben mit Sonnenuntergang an, noch heute also Juden und Muhamedaner in ihren kirchlichen Festen. Sonntag ist jetzt bei den Christen der erste Tag der Woche, ehedem der Sonnabend, bei Muhamedanern der Freitag. Die erste Stunde des Sonnabends hat Saturn, daher der Tag Saturnstag bei den Römern hieß; dann hat er die 8te, die 15te, die 22te, die 23te Jupiter, die 24te Mars, die 25te oder erste des folgenden Tages die Sonne, daher Sonntag. Die Sonne hat also auch die 22te Stunde, Venus die 23te, Merkur die 24te, der Mond die 25te oder erste des nächstfolgenden Tages, welcher Mondtag heißt. Fährt man in ähnlicher Weise fort, so erhält jeder der 7 Himmelskörper seinen Wochentag.

Erde, Mond und Sonne.

Wir wissen, wie wenig Aufmerksamkeit unsere Schüler auf Erscheinungen am Himmel richten; ob die Sonne immer rein im Osten auf und im Westen untergeht oder nicht, wie sich der Mond in dieser und anderer Hinsicht zeigt, wie seine Lichtgestalten sind, das kümmert weniger; man übersieht die gewöhnlichen und wiederkehrenden Erscheinungen und sieht nur Außerordentliches. Es ist darum durchaus nothwendig, daß der Schüler vom Lehrer angehalten werde, auf himmlische Erscheinungen aufmerksam zu sein und also auch den Mond in seinen individuellen und specifischen Eigenthümlichkeiten kennen zu lernen. Die wesentlichsten Erscheinungen aber, welche sich unserer Beobachtung darbieten und leicht erklären lassen, sind folgende. Es gehört dabei so recht zur Anschaulichkeit, daß man Sonne, Mond und Erde stets in ihrer Kugelform auffasse und nicht als Scheiben, wie uns Sonne und Mond erscheinen.

1) Beobachtet man den Mond, z. B. den Vollmond, doch weniger bei seinem Aufgange in der östlichen Gegend, weil dann aus später anzudeutenden Gründen der Mond und die Sonne viel größer erscheinen, sondern wenn der Vollmond den Meridian schneidet, was im Durchschnitt des südlichen Wendekreises, des Äquators und des nördlichen Wendekreises und in den Zwischenpunkten Statt finden kann, so findet man, daß der scheinbare Durchmesser des Mondes ungefähr 30 Minuten beträgt, aber nicht immer sich gleich bleibt, woraus eine zu v e r s c h i e d e n e n

Zeiten verschiedene Entfernung des Mondes von der Erde sich ergiebt. Der Halbmesser der Erde muß also einem Auge auf dem Monde unter einem Winkel von 15′ erscheinen; zeichnet man nun ein Dreieck 1. aus der Kathete = 860 Meilen, 2. aus dem anliegenden rechten Winkel und aus dem gegenüberliegenden Winkel von 15′, so findet man die Entfernung des Mondes 60.860 Meilen. Da sich aber der Sehwinkel oder der Winkel an der Spitze des rechtwinkligen Dreiecks nicht gleich bleibt, so muß auch die Entfernung eine wechselnde Größe sein. Man hat die größte = 54000, die kleinste = 48000 Meilen gefunden, also die mittlere Entfernung = 51000 Meilen. Dadurch findet man ferner den Durchmesser des Mondes = 464 Meilen, so daß der Durchmesser der Erde gegen 4 mal so groß ist und die erleuchtete Erdscheibe einem Auge auf dem Monde gegen 16 mal, wenigstens 14 mal so groß erscheint, als uns die Mondscheibe beim Vollmonde. Aus der Stärke seiner Anziehungskraft, welche sich bei der Ebbe und Fluth zeigt, hat man seine Masse zu 1/70 der Erdmasse geschätzt. Dreht sich der Mond um die Erde, so hat er natürlich eine verschiedene Entfernung von der Sonne. Nimmt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zu 21 Millionen Meilen an, so ist der Abstand des Mondes 21 Millionen Meilen weniger 51000, wenn der Mond zwischen Erde und Sonne tritt, oder 21 Millionen Meilen + 51000 Meilen, wenn die Erde zwischen Sonne und Mond steht. Tritt der Mond zwischen Erde und Sonne, so daß alle 3 Kugeln in einer Geraden stehen, so können die Strahlen der Sonne vor dem Monde nicht zur Erde gelangen; die Erde wird verfinstert, die Erscheinung heißt aber Sonnenfinsterniß. Tritt die Erde zwischen Sonne und Mond, so daß die drei Kugeln wieder in einer Geraden liegen, so können die Sonnenstrahlen vor der Erde nicht auf den Mond gelangen; derselbe wird verdunkelt, es entsteht eine Mondfinsterniß.

2) Befindet sich der Mond zur Mittagszeit, wenn die Sonne am höchsten steht, nach derselben Gegend hin, also nach Süden zu, so zwar, daß alle 3 Kugeln in einer Geraden liegen, so muß die weiter entfernte Sonne den uns abgewendeten Theil des Mondes bescheinen. Dann kann kein Sonnenstrahl die Erde treffen, wir haben eine Sonnenfinsterniß und können die

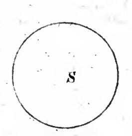
vordere Hälfte des Mondes gar nicht sehen. Denken wir uns aber oder bemerken wir zwar den Mond gegen Mittag auch in der Richtung nach Süden hin, aber etwas rechts oder links, etwas unter oder über der Sonne, so kann die Sonne zu gleicher Zeit den abgewendeten Theil des Mondes und eine Hälfte der Erde bescheinen. Wir würden den Mond gar nicht sehen, aber die Erde wird ja von der Sonne beleuchtet; das geborgte Licht wird nach dem Monde hin und von demselben wieder zurückgeworfen. Daher erscheint der Mond uns in dem doppelt geborgten, abgeschwächten, aschgrauen und fahlen Lichte. Es ist Neumond. Versetzen wir uns auf den Mond und zwar auf die abgewendete Hälfte, so haben wir Tag; auf der vorderen der Erde zugewendeten Hälfte Nacht; aber auf der vorderen Hälfte des Mondes sehen wir die Erde gegen 14 mal so groß, als wir den Vollmond sehen; der Mondbewohner hat Vollerde und mit derselben ein prachtvolles Schauspiel. Wie wir im Monde verschiedene Figuren, ein Gesicht und dergleichen entdecken, so erkennt der Mondbewohner (?) die Erdtheile und Meere, welche er schon längst gesehen und entdeckt hat, ehe man dieselben auf der Erde kannte. Die Erde dreht sich aber von Westen nach Osten um ihre Achse und dadurch wird dieselbe für den Mondbewohner zu einer großen genau gehenden Uhr. Wer aber auf der abgewendeten Hälfte des Mondes wohnt, muß oben oder unten, rechts oder links herum nach Vorn sich wenden, um die Erde zu sehen. Beim Neumonde sehen wir stets dieselbe Hälfte des Mondes und dieselben Punkte, Konfigurationen &c. an derselben Stelle, so daß wir von der abgewendeten Hälfte Nichts kennen. Beobachteten wir aber den Neumond das ganze Jahr hindurch, so würden wir finden, daß sich derselbe den 21. März im Äquator, den 21. Juni im Wendekreise des Krebses, den 23. Septbr. wieder im Äquator und den 21. Dcbr. im Wendekreise des Steinbocks ereignet. Zur Zeit des Neumondes gehen Sonne und Mond mit einander auf, stehen mit einander im Meridian und gehen mit einander unter, beim Neumonde stehen Erde und Sonne in Opposition, der Mond mit beiden in Konjunktion.

3) Wenden wir den Tag nach dem Neumonde unser Auge beim Sonnenaufgange nach Osten, so steht der Mond nicht mehr bei der Sonne, sondern geht erst um etwa 50 Minuten später

auf; ebenso findet die Kulmination oder der Durchgang durch den Meridian 50 Minuten nach der der Sonne Statt, ebenso der Untergang. Obgleich also auch der Mond durch die Achsendrehung der Erde in Westen untergeht, so hat er sich doch in 24 Stunden um einen Bogen von der Sonne entfernt, welcher gegen 13° beträgt oder 26 Mondesbreiten, da eine Mondesbreite = ½° ist. Tags darauf findet man Mondesaufgang, Kulmination und Untergang um etwa 100 Minuten später, als bei der Sonne. Setzt man diese Beobachtung fort, so wird man bemerken, daß der Mond noch über dem Horizonte sich befindet, wenn die Sonne längst untergegangen ist. Die Sonne bescheint dann eine Hälfte des Mondes, von welcher der größere Theil auf der hintern liegt, der kleinere auf der vorderen Fläche des Mondes in Sichelform sichtbar wird. In 7 Tagen hat sich der Mond um 7 mal 13° oder 91°, wir wollen nur 90° annehmen wegen des rechten Winkels, von der Sonne entfernt und geht gegen 6 Stunden später auf, als die Sonne und wenn dieselbe im Meridiane steht; geht die Sonne unter, so steht der Mond im Meridiane und die Sonne bescheint die eine (westliche) Hälfte des Mondes. Von der westlichen Hälfte liegt aber ein Viertel auf der hintern Fläche, das andere erleuchtete Viertel liegt vorn und ist sichtbar. Diese Lichterscheinung oder Phase des Mondes heißt erstes Viertel. Dabei bilden Erde, Mond und Sonne ein rechtwinkliges Dreieck; die Erde steht am Schneidepunkte der beiden Katheten, Sonne und Mond an den Endpunkten der Hypotenuse. Wer auf dem östlichen Viertel der hintern Hälfte wohnt, bekömmt nun Nacht, nachdem er schon 7 Tage Tag gehabt hat; der auf dem westlichen Viertel der hintern Hälfte hat noch immer Tag und zwar noch 7 Tage; die Bewohner der vordern westlichen Hälfte haben auch schon seit 7 Tagen Tag. Beobachten wir ferner das erste Viertel zu den verschiedenen Jahreszeiten, so erscheint dasselbe am 21. März im nördlichen Wendekreise; den 21. Juni im Äquator; den 23. Septbr. im südlichen Wendekreise; den 21. Dcbr. im Äquator. Beim ersten Viertel kann man den Hauptzug des lateinischen D erkennen oder den oberen Zug des deutschen Z. (Decrescens crescit, der Mond ist ein Lügner; der Mond nimmt zu, Zunehmen erinnert an das deutsche Z.) Wie gestaltet sich aber in der Zeit vom Neumonde bis zum ersten Viertel der An-

blick für den Mondbewohner? Der vordere Theil des Mondes zerfällt in eine erleuchtete westliche und dunkle östliche Hälfte; die auf der letztern Wohnenden sehen die östlich zur Hälfte erleuchtete Erde oder das letzte Viertel derselben. Also unserem Neumonde entspricht die Vollerde, unserem ersten Viertel vom Mondstandpunkte aus der Erde letztes Viertel, bei welchem die Hälfte der östlichen Hälfte beleuchtet ist.

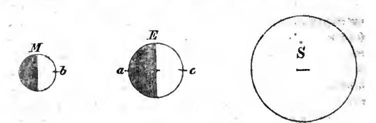




Denn bedeutet S die Sonne, E die Erde und M den Mond, wie die Stellung der 3 Himmelskörper beim ersten Viertel ist, so bescheint die Sonne z. B. Abends um 6 den westlichen Theil sowohl der Erde, als des Mondes, wenn wir die Sonne um diese Zeit unter den Horizont herabsinkend vorstellen. Wohnt nun Jemand in a, so hat er in demselben Augenblicke Nacht; er sieht die Sonne nicht; auch den beleuchteten Theil der Erde nicht. Ist aber die Sonne auf ihrer scheinbaren täglichen Bewegung um die Erde ihrem Aufgange nahe, also aus der Stellung, welche sich der Geraden nähert nach Osten zu, so muß die östliche Hälfte der Erde beschienen werden. Der Mondbewohner sieht also die Erde im letzten, östlichen Viertel.

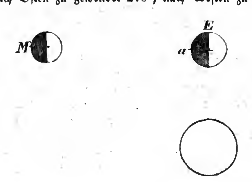
4) Setzen wir unsere Betrachtung noch um 7 Tage fort, so geht der Mond eben in Osten auf, wenn die Sonne im Westen untergeht. Befänden sich alle drei Körper mit ihren Mittelpunkten in einer und derselben Geraden, so müßte nothwendig die Erde die Sonnenstrahlen aufhalten und der Mond verfinstert werden; denken wir uns aber den Mond oder die Erde nach rechts oder links, unten oder oben aus der Geraden gerückt, so sehen wir auf der Seite der Erde, welche der Sonne abgewendet ist, wohnend,

die volle Mondscheibe oder wir haben Vollmond. Geht Abends um 6 Uhr der Vollmond auf, so geht Abends um 6 Uhr die Sonne unter; geht früh 6 Uhr die Sonne auf, so geht um dieselbe Zeit der Mond unter; er scheint also die ganze Nacht.



Wie aus der Stellung der drei Kugeln sich sogleich ergiebt, so ist für den Erdbewohner in a die uns zugewendete Seite des Mondes ganz erleuchtet; wohnten wir auf dem Monde in b, so hätten wir Neuerde, weil die erleuchtete Hälfte der Erde der Sonne zugewendet wäre, die dunkle im Mittag dem Mondbewohner. Beim Mondbewohner wäre es Mittag um 12 Uhr; beim Erdbewohner in c Mittag, bei dem in a Mitternacht. Den 21. März geht der Vollmond im Äquator; den 21. Juni im Wendekreise des Krebses; den 23. Septbr. im Äquator; den 21. Dcbr. im Wendekreis des Krebses auf. Die Erde steht beim Vollmonde mit der Sonne und dem Monde in Konjunktion; aber Sonne und Mond stehen in Opposition.

5) Ist endlich wieder eine Zeit von 7 Tagen vergangen, so ist die Sonne, welche wir uns um Mittag im Meridian denken wollen, nach Osten zu gewendet 270°, nach Westen zu gewendet



90° Grad von dem Monde entfernt. Der Mond geht erst um Mitternacht auf, wir sehen von der östlichen erleuchteten Hälfte die Hälfte oder das letzte Viertel. Umgekehrt sieht der Mondbewohner die Erde im ersten Viertel.

Denn steht die Sonne im Meridiane, so steht der Mond im westlichen Horizonte, es ist Mittags 12 Uhr; Abends 6 Uhr steht der Mond im untern Meridiandurchschnitt und die Sonne im Horizonte; Abends 12 Uhr steht der Mond im östlichen Horizonte, die Sonne im untern Meridiandurchschnitt und beleuchtet von der uns zugewendeten Hälfte die östliche Hälfte oder das östliche Viertel, auch das letzte Viertel genannt. Umgekehrt hat der Mondbewohner der vordern Mondhälfte der Erde erstes oder westliches Viertel gesehen, was sogleich deutlich wird, wenn wir den Mond aus dem westlichen in den östlichen Horizont gerückt denken.

6) Hatten wir Neumond und zwar Mittags 12 Uhr, so hatte der Mondbewohner Vollerde im Meridiane, also Nachts 12 Uhr; haben wir erstes Viertel Abends 6 Uhr, so hat der Mondbewohner letztes Viertel früh 6 Uhr; haben wir Vollmond Abends 6 Uhr, so hat er Neumond früh 6 Uhr; haben wir letztes Viertel Mitternachts 12 Uhr, so sieht der Mond der Erde erstes westliches Viertel. Überhaupt findet für den Mondbewohner an der Erde allemal die um 14 Tage entgegengesetzte Lichterscheinung Statt.

Die Erde wird also den Bewohnern des Mondes, welche auf der vordern Seite wohnen, zu einer Himmelsuhr dienen, an welcher sie die Tage abmessen können, da ihnen die Erde im letzten Viertel, im Neulichte, im ersten Viertel und im Volllichte erscheinen wird, wenn sie in derselben Ordnung Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht haben.

7) Alle 4 Lichterscheinungen des Mondes ereignen sich je nach den Jahreszeiten theils im Äquator, theils im Wendekreise des Krebses, wieder im Äquator, endlich im Wendekreise des Steinbocks, dann wieder im Äquator. Der Mond bewegt sich also auch zwischen den Wendekreisen auf beiden Seiten des Äquators hin und her.

8) Die Bewegung des Mondes um die Erde, welche man auch die jährliche nennen könnte, dauert gegen 28 Tage; binnen

derselben Zeit wechselt einmal Tag und Nacht; beim Mondbewohner fällt also Jahr und Tag zusammen; er hat 14 Tage Tag und 14 Tage Nacht.

9) **Eine Umdrehung des Mondes um die Erde, für uns Monat genannt, könnte für den Mond jährliche Umdrehung heißen.**

Betrachtet man die mit Flecken bedeckte Oberfläche des Mondes genauer, so findet man dieselben immer an derselben Stelle. Drehte sich der Mond um die von vorn nach hinten liegende Achse, so müßte ein Fleck, welcher sich oben befände, auch einmal links, unten und rechts sich befinden. Allein dieß ist nicht der Fall; auch sehen wir stets dieselbe Konfiguration und wissen daraus, daß uns der Mond immer dieselbe zuwendet. Von der abgewendeten Hälfte hat also noch Niemand auf der Erde Etwas gesehen und wer auf dieser abgewendeten Hälfte wohnt, kann die Erde nicht sehen.

Dreht sich nun der Mond in 27 Tagen immer mit derselben Seite der Erde zugewendet um dieselbe herum, so muß er während derselben Zeit sich gerade so um seine Achse gedreht haben, wie ein Mensch, welcher sich um einen runden Tisch herum bewegt und während der Bewegung sich mit seinem Gesichte immer dem Mittelpunkte des Tisches zuwendet.

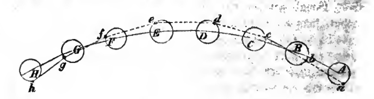
Also: die jährliche Umdrehung des Mondes und die Drehung um seine Achse oder die tägliche Umdrehung fallen zusammen.

Der Wechsel zwischen Tag und Nacht geht von 14 zu 14 Tagen vor sich. Ist also ein Tag auf dem Monde 14 mal 24 Stunden und eine Nacht auch 14 mal 24 Stunden, also Tag + Nacht = 28 mal 24 Stunden, so können die Mondbewohner an der Erde eine Uhr haben. Denn die Erde erscheint ihnen im letzten Viertel Morgens, im Neulichte Mittags, im ersten Viertel Abends und im Vollichte Mitternachts.

10) Wie die Jahreszeiten der Erde davon abhängen, daß die Erdbahn nicht mit der Ebene des Sonnenäquators zusammenfällt und daß der Äquator der Erde mit der Ebene der Erdbahn einen Winkel macht oder daß die Achse der Erde gegen die Erdbahn um $66\frac{1}{2}°$ geneigt ist, wurde früher bei der Erde gezeigt. Je kleiner die Schiefe der Ekliptik ist, desto weniger weichen die Jahreszeiten von einander ab; wird die Schiefe der Ekliptik =

Null, so verschwindet auch die Verschiedenheit der Jahreszeiten. Die Mondbahn um die Erde ist gegen den Äquator des Mondes nur um $6\frac{6}{10}$ Grad geneigt. Zwischen beiden liegt die Ebene der Erdbahn, welche mit der Mondbahn einen Winkel von $5\frac{1}{10}$ Grad bildet. Daher giebt es auf dem Monde keinen wesentlichen Unterschied der Jahreszeiten, Temperatur und Tageslängen.

11) Dreht sich ein Rad um seine Achse und zugleich vorwärts, so beschreibt ein Punkt im Umfange eine Radlinie oder Cykloide; die Erde, welche der Mittelpunkt der Mondbahn ist, bewegt sich aber selbst in einer kreisförmigen Bahn, nicht auf einer Geraden vorwärts, daher die Mondbahn eine sogenannte Epicykloide wird, (wenn sich ein Kreis auf dem hohlen Theile des Kreises fortbewegt; Cykloide, wenn auf dem konvexen).



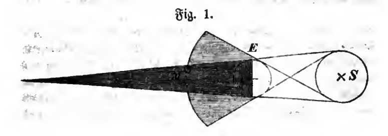
Bezeichnen A, B, C, ... H die verschiedenen Stellungen der Erde in ihrer Bahn um die Sonne, a, b, c, ... h die Stellungen des Mondes in seiner Bahn um die Erde, welche also in 28 Tagen vollendet sein muß, so ist die Stellung b um $\frac{1}{7}$ der Mondbahn vorwärts, die Stellung in c um $\frac{2}{7}$ rc., bis endlich in h der Mond seine alte Stellung wieder einnimmt. Die Mondbahn wird also durch die punktirten Striche bezeichnet; die punktirte Linie wiederholt sich ungefähr 12 mal.

12) Wenn der Mond in $27\frac{1}{3}$ Tagen wieder zu demselben Fixsterne zurückkehrt oder demselben wieder gegenübersteht (siderischer Monat), so gelangt er doch in dieselbe, z. B. Neumondsstellung erst nach 2 Tagen 4 Stunden später und ungefähr im nächsten Zeichen des Thierkreises, weil die Erde in derselben Zeit ungefähr $\frac{1}{12}$ ihrer Bahn zurückgelegt hat und der Mond dieselbe erst wieder einholen muß.

13) Zur Zeit des Vollmondes kann, aber muß nicht eine Mondesfinsterniß entstehen; ständen aber Sonne, Erde und Mond in einer geraden Linie und in einer und derselben Ebene,

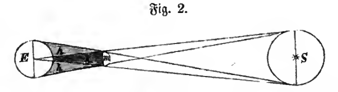
so müßte bei jeder Umdrehung des Mondes um die Erde innerhalb 29 Tagen ebensowohl eine Mond-, als auch, was nur beim Neumonde sein kann, eine Erd- oder Sonnenfinsterniß Statt finden. Zur Veranschaulichung mögen beifolgende Zeichnungen dienen; Fig. 1. Mondfinsterniß; Fig. 2. Sonnenfinsterniß.

Fig. 1.



Der dunklere Schatten heißt Kernschatten, der hellere Halbschatten; die Mondfinsterniß beginnt am östlichen Rande und hört am westlichen Rande auf, weil der Mond schneller, aber in derselben Richtung der Zeichen läuft, wie die Erde.

Fig. 2.



h = Halbschatten, k = Kernschatten. Die Sonnenfinsterniß muß durch den östlichen Rand des Mondes hervorgebracht werden, da sich der Mond von West nach Ost oder von der rechten nach der linken Hand bewegt; der westliche Rand berührt die Sonnenscheibe zuletzt.

Alle Orte, welche auf demselben Meridiane liegen, sehen die Mondfinsternisse zu derselben Zeit; aber wer weiter westlich auf einem andern Meridiane wohnt, sieht dieselbe um 4, 8, 12 ꝛc. Minuten später. Daher man die Mondfinsternisse zu Längenbestimmungen benutzen kann.

14) Die Ebene der Mond- und Erdbahn schneiden sich unter einem Winkel von 5°; die Ebene der Erdbahn und des Sonnenäquators schneiden sich unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}$° — folglich

kann der Mond nur noch dem Bewohner des 28¼ten Parallelkreises nach Norden oder Süden im Meridiane im Zenith stehen.

15) Da der Sehwinkel, unter welchem uns der Mond im Meridiane erscheint, sich nicht gleich bleibt, sondern verändert, so muß auch die Entfernung des Mondes eine veränderliche sein und kann sich derselbe deßhalb nicht in einer Kreislinie um die Erde bewegen. Der Sehwinkel beträgt gegen 30 Minuten; aus der größten Entfernung von 54000 und der kleinsten von 48000 Meilen ergiebt sich die mittlere von 51000 M. Ist dieselbe 50000 M., die Entfernung der Sonne 20 Millionen M., so beträgt die Entfernung des Mondes von der Erde 1/400 von der Entfernung der Sonne von der Erde. Bei gleicher Masse müßte also der Anziehungseinfluß des Mondes auf die Erde 400.400 mal so groß sein, als der Anziehungseinfluß der Sonne, was bei der Ebbe und Fluth von großer Bedeutung ist.

16) Es liegt nicht in der Aufgabe dieses Buches, die physische Beschaffenheit des Mondes oder der Erde oder der Sonne oder der Himmelskörper überhaupt zu geben. Es bleibt deßhalb die ziemlich konstatirte Trockenheit des Mondes, der Mangel an Feuchtigkeit in der Atmosphäre desselben hinweg. Ebenso wenig soll hier, was besonders Arago und Schleiden behauptet haben, von dem durchaus zweifelhaften Einflusse des Mondes auf die Temperatur und das Wetter, auf vegetabilisches und animalisches Leben und desgleichen die Rede sein, wenn auch Fechner sich des armen Mondes angenommen hat, sondern es soll nur angedeutet werden, daß der Mond auf die Magnetnadel Einfluß hat, daß sein Lichteinfluß Photographien möglich macht und daß er vor allen Dingen die wesentlichste Ursache der Ebbe und Fluth ist. Denken wir uns die Neumondstellung und die ganze Erde als eine mit Wasser umgebene Kugel, so summirt sich für einen bestimmten Meridian die anziehende Kraft beider Himmelskörper; es findet eine Erhebung der Fluthwelle Statt; aber nicht nur auf der einen Seite des Meridians, sondern auch auf der entgegengesetzten, weil dort die Wassermassen nach dem Gesetze der Trägheit dem stärker angezogenen Mittelpunkte der Erde nicht folgen können; weßhalb auch im ganzen Meridiane die Fluthwelle Statt findet. Bei der Achsendrehung der Erde nach Osten muß immer ein anderer, westlicher Meridian dem Monde ent-

gegenkommen, daher die Fluthwelle von Osten nach Westen fortschreitet. Dabei fließen nach dem Meridiane von Ost und West die Gewässer herbei, um die Fluthwelle zu bilden; 90° vom Fluthmeridian oder 6 St. nach Osten oder Westen findet die Ebbe Statt; im entgegengesetzten Theile des Meridians oder um 180° davon ist wieder Fluth. Im ersten und letzten Viertel ist die Höhe der Fluthwelle geringer, weil die Anziehungskraft der Sonne den Einfluß des Mondes zum Theil paralysirt; beim Vollmonde findet die Fluth so Statt, daß sie auf der entgegengesetzten Seite des Meridians durch den Einfluß der Sonne erhöht wird. Da also der Mond die wesentliche Ursache der ganzen Erscheinung ist, so muß, da der Mond Tags darauf erst in etwa einer Stunde später wieder im Meridiane steht, die Fluth um dieselbe Zeit später eintreten; Ebbe und Fluth wechseln von 6 zu 6 Stunden ab. Da aber die Erde nicht überall mit Wasser überzogen ist, da die Konfiguration der Erd- und Meerestheile einen großen Einfluß dabei hat, so findet man die Erscheinung der Ebbe und Fluth vorzugsweise an den Küsten des freien Oceans.

17) Mond und Sonne erscheinen uns, wie die Erfahrung allgemein bestätigt, beim Auf- und Untergange weit größer, als im Meridian. Worin hat das seinen Grund? „Sonne und Mond leuchten bei ihrem Auf- und Untergange, da die dichteren Luftschichten der untern Atmosphäre ihr Licht schwächen, weniger hell und zugleich nehmen wir auf dem Erdboden zwischen ihnen und uns viele Gegenstände wahr; daher halten wir beide Himmelskörper dann für zu entfernt und für größer als sonst.“ (Schule der Physik von Krüger, S. 580.)

Eine andere Erscheinung, daß wir beim ersten oder letzten Viertel die Sichel aus einem größern Kreise geschnitten sehen, als die matte Scheibe, heißt Irradiation und rührt daher, „daß uns glänzende Gegenstände ein undeutliches zu großes Bild im Auge geben, indem die Strahlen im unruhigen Auge eine zu große Stelle der Netzhaut treffen. Glänzende Gegenstände sehen wir also verhältnißmäßig wirklich größer, als matt erleuchtete“. (Fries pop. Vorlesungen über die Sternkunde, 2. Afl. S. 142.)

Die Physik belehrt uns über die Lichtbrechung oder Refraktion; durch dieselbe sehen wir Mond und Sonne, wenn

sie schon oder noch unter dem Horizonte stehen, über dem Horizonte. Diese Refraktion beträgt am Horizont etwa einen halben Grad; da nun Mond und Sonne ungefähr denselben scheinbaren Durchmesser haben, so erscheinen uns dieselben schon oder noch über dem Horizonte, wenn sie eben unter demselben sich befinden.

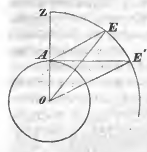
18) Fassen wir nun nach Darstellung des Wichtigsten, was den Mond betrifft, das Ganze zusammen, so finden wir:

Der Mond, welcher einen Durchmesser von 466 und eine mittlere Entfernung von 51000 geogr. Meilen oder 60 Erdhalbmessern hat, dessen Kubikinhalt ungefähr $1/_{60}$ von dem der Erde ist, bewegt sich in $27\frac{3}{4}$, bezüglich $29\frac{1}{2}$ Tagen in einer länglich runden Bahn, welche mit der Ebene der Erdbahn einen Winkel von 5^0 macht, während der Äquator des Mondes gegen die Erdbahn $1\frac{1}{2}^0$ Neigung hat, um die Erde herum und mit derselben während eines Jahres in einer epicykloidischen Linie um die Sonne, wobei derselbe die vier verschiedenen Lichtphasen zeigt und die wesentliche Ursache von der Ebbe und Fluth ist.

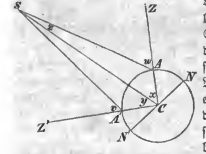
Sonne.

Schon früher ist die Sonne in ihrem Verhältniß zur Erde als der Himmelskörper aufgefaßt worden, welcher uns durch die Achsendrehung der Erde das Tageslicht und die Abwechslung der Jahreszeiten und der Temperatur bringt je nach der Stellung, welche die Erde auf ihrer Bahn um die Erde zu der Sonne einnimmt. Auch ist bereis auseinandergesetzt worden, daß die Entfernung der Erde von der Sonne je nach den Jahreszeiten verschieden ist. Stellen wir uns nun die selbstleuchtende Sonne (Fixstern) ruhend vor und berücksichtigen, daß die Erde sich zu verschiedenen Zeiten in verschiedener Entfernung von der Sonne befindet, so kann der scheinbare Durchmesser der Sonne zu verschiedenen Zeiten des Jahres nicht derselbe sein; da wir uns im Winter der Sonne näher befinden, so muß der Durchmesser der Sonne in dieser Zeit, wenn sie im Meridiane steht, größer sein, als im Sommer. Man findet einen mittleren scheinbaren Durchmesser von 32′ 3,3″ oder von 1923,3″. Wie groß

ist aber der Winkel, unter welchem der Halb- oder Durchmesser der Erde einem Auge auf der Sonne erscheint, bei derselben



Entfernung? Ist A der Beobachtungsort und steht die Sonne bei E' im Horizont, so wäre der W. AE'O die Horizontalparallaxe, welche am größten ist; steht aber die Sonne am höchsten im Meridian, in E so ist die Parallaxe AEO kleiner, als AE'O. Wüßte man 1) den Durchmesser der Erde, 2) die Parallaxe und 3) den scheinbaren Durchmesser der Sonne, so wäre sowohl die Entfernung der Sonne von der Erde durch eine verjüngte Dreieckskonstruktion zu finden, als auch der Durchmesser der Sonne, welcher soviel mal 1719 Meilen wäre, als wieviel mal der Winkel, unter welchem einem Auge auf der Sonne der Erddurchmesser erscheint, in dem Winkel, unter welchem uns der Sonnendurchmesser erscheint, enthalten ist. Es kömmt also jetzt darauf an, die genannte Parallaxe zu bestimmen. Denken wir uns zwei



Beobachter A und A', vielleicht am 21. März oder September, wenn die Sonne den Himmelsäquator zu beschreiben scheint auf demselben Meridiane, legen wir durch eines jeden Zenith und durch die Sonne einen Meridian, so können wir in A, z. B. bei 50° nördl. geogr. Breite den Bogen zwischen Z und S, oder die Zenithdistanz messen; ebenso A' bei 40° südl. geogr. Breite die Zenithdistanz von Z' bis S. Man lernt so den W. $w = x + z$ kennen; da man aber $x = 50^0$ kennt, so läßt sich z leicht finden $= (w - x)^0$. Allein wegen der Weite des Gestirnes wird eine solche Beobachtung nicht genau und fehlerfrei genug; die Entfernung der Sonne wurde zu klein gesetzt, deßhalb erschien die Parallaxe zu groß. Es werden deßhalb andere Mittel, z. B. ein Vorübergang der

Venus vor der Sonnenscheibe zur Bestimmung benutzt, wie 1874 wieder einer Statt finden wird, wie 1769, welchen Kook mit Green im großen Oceane beobachtete. Seitdem hat man den Werth der Horizontalparallaxe im Mittel zu 8,6″ gefunden, wobei man sich nicht mehr um eine Viertelsekunde irrt. Daraus ergiebt sich die mittlere Entfernung = 23984 Erdhalbmessern = 23984 mal 860 geogr. Meilen = 20 Millionen Meilen in runder Zahl. Da nun der Durchm. der Erde von der Sonne aus gesehen = 17,2″ ist, so ist der Sonnendurchmesser = 1719. $\frac{1923{,}8}{17{,}2}$ = 112 mal 1719 Meilen. So ist ferner der Durchmesser der Sonne = 190000, der Umfang etwa 580000 geogr. Meilen. Die Oberfläche ist 112.112 = 12544 mal so groß oder $9\frac{1}{4}$ Million mal 125444 Quadratmeilen; das Volumen ist 112.112.112 oder 1404928 mal so groß. Bei der Neumondstellung summirt sich der anziehende Einfluß von Sonne und Mond, so daß die Fluthhöhe z. B. 5 Fuß beträgt; davon kommen auf den Mond 3 F. Faßt man aber Volumen und Entfernung der Sonne in das Auge, so erscheint dieser Einfluß zu gering; und zwar so sehr, daß die Sonnenmasse nur $\frac{1}{4}$ von der Dichtigkeit der Erde haben kann. Der 4te Theil von 1404928 Erdkugeln oder 350000 Erdkugeln würden ebenso schwer sein, als eine Sonne. An der Oberfläche der Sonne beobachtet man durch ein Fernrohr mit Blend- oder Sonnenglas dunkle Flecken (Joh. Fabricius, 1611; Galiläi, 1612; Scheiner; Apian); aus genauer Beobachtung derselben und ihrer Wiederkehr hat man geschlossen, daß sich die Sonne in 27,3 Tagen um ihre Achse dreht und der Sonnenäquator einen Winkel von 7° 9′ mit der Ebene der Ekliptik macht. Der eigentliche dunkle Kern des Sonnenkörpers scheint von einem Halbschatten, Penumbra umgeben; rings um die dunkle Sonnenkugel befindet sich eine Gasatmosphäre, in welcher zwei Wolkenschichten schweben, von denen die äußere stark leuchtend ist und Photosphäre genannt wird. Entstehen in der Photosphäre und der untern Wolkenschicht Risse, so sieht man den dunklen Sonnenkörper (Sonnenflecken); an andern Orten der Sonnenatmosphäre müssen Verdichtungen der Atmosphäre und mit derselben die Sonnenfackeln entstehen. Den Abstand der Licht- oder Photosphäre vom dunklen Sonnenkerne schätzt man auf 300—500 Meilen.

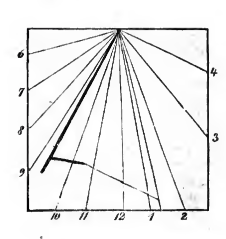
Über dieselbe hinaus müssen sich auch noch wolkenartige Massen ausdehnen, wie man bei Sonnenfinsternissen an den rosenfarbenen Hervorragungen über die ganz bedeckte Sonnenscheibe hinaus (Protuberanzen) bemerken kann*). Mit der Sonne steht noch das Zodiakallicht oder Thierkreislicht in Beziehung. Es ist eine Art Lichtkegel oder schwacher Lichtstreifen, welcher zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen kurz nach Sonnenuntergang am westlichen Horizonte bemerkt wird, aber auch schon des Morgens beobachtet worden ist. Die Achse des Lichtkegels fällt mit der Ebene des Sonnenäquators zusammen. Humboldt schildert das Zodiakallicht als einen besondern Schmuck der Tropennächte. Wenn man sonst die Sonne einen Fixstern nannte, so wollte man damit andeuten, daß sie im Weltraume stillstehe; dieser Begriff des Fixsternes steht aber nicht mehr fest; denn es wird behauptet und geschlossen, besonders von Mädler in Dorpat, daß sich die Sonne in etwa 18 Millionen Jahren um die Alcyone in der Plejadengruppe, oder doch wenigstens um einen in der Gegend befindlichen Schwerpunkt sich drehe. Daher Fixstern oder Sonne = einem selbstleuchtenden Himmelskörper, um welchen sich die Planeten mit ihren Monden und die Kometen drehen und welcher sich selbst wieder um einen andern Himmelskörper oder Schwerpunkt dreht. — Das Licht braucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen, wie Olaf Römer 1676 entdeckt hat, 16 Minuten; denn wir sehen die wieder aus der Verfinsterung tretenden Trabanten des Jupiter, wenn wir den um 40 Millionen weitern Standpunkt haben auf unserer Erdbahnreise um 16 Minuten später; von der Sonne zu uns braucht also das Sonnenlicht 8 Minuten; es legt in einer Sekunde einige 40000 Meilen zurück.

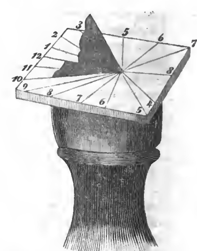
Man kann die Sonne auch, wie bekannt, als eine Uhr benutzen, welche die wahre Sonnenzeit andeutet, welche freilich durch Addition oder Subtraktion einer früher schon angedeuteten Zeitgröße in mittlere Zeit verwandelt werden muß. Hat man nämlich eine senkrechte nach Süden gewendete Fläche und bringt

---

*) Andere erklären die Sonne für einen brennenden Körper, welcher sich noch abkühlen werde, wie einst die Erde und der Mond, welcher am Ende seiner Entwickelung sei. (Moritz Heß in der „Natur". Jahrg. 1858.)

man auf derselben einen Stab parallel der Weltachse an, so fängt die Fläche den Schatten des Stabes auf; zu Mittag liegt der Schatten senkrecht unter dem Stabe, um 1 und 11 gleichweit links und rechts oder östlich und westlich von der senkrechten Linie und deckt immer je eine für eine bestimmte Stunde gezogene Linie. Ebenso könnten die Tafeln, auf welchen sich der Schatten des Stabes oder metallenen Bretchens projicirt, eine wagerechte Ebene sein; der Stab müßte über der Mittagslinie angebracht sein.





Hat man besonders berechnete Tafeln, z. B. solche, welche für den 51ten Breitegrad eingerichtet sind, so läßt sich aus der unmittelbar gemessenen Sonnenhöhe die wahre und dadurch auch die mittlere Zeit berechnen. (Tafeln von Fr. Chr. Müller für den 47ten bis 54ten Breitegrad.)

Die Planeten mit ihren Monden.

Weltkörper wie die Erde, welche ihr Licht und ihre Wärme von der Sonne empfangen, in einer gewissen Zeit sich um ihre Achse drehen und zugleich in einer bestimmten Zeit um die Sonne, welche dabei mit ihrem Äquator gegen ihre Bahn einen größeren oder kleineren Winkel bilden, von welchem die verschiedene Tageslänge und der größere oder kleinere Unterschied

der Jahreszeiten abhängt, giebt es noch eine ziemliche Anzahl. Sie sind Merkur, Venus, Erde, Mars, die einigen 40 kleinen Planeten, deren Bahnen wie über einander liegende Ringe sich durchschneiden, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun oder die 4 inneren, die mittleren und die äußern Planeten, im Ganzen jetzt über 50. Keiner aber stimmt mit dem andern bezüglich seiner Entfernung von der Sonne, seiner Achsendrehungszeit, seiner jährlichen Umdrehungszeit, seiner Neigung des Äquators zur Bahn, seines Durchmessers, seiner Schwerkraft und Dichte und seiner sonstigen Eigenschaften mit einem andern vollkommen überein; jeder bildet eine für sich ausgeprägte Individualität, so daß besonders mit Hinzuziehung der klimatischen und meteorologischen Verhältnisse es sehr bedenklich wird, einen mit menschenähnlichen Geschöpfen bevölkern zu wollen; wir kennen die Bewohner nicht und können dann nur von Unterschieden und Unmöglichkeiten reden. Versetzen wir uns aber auf irgend einen Planeten, so werden alle unsere irdischen Vorstellungen, unsere Zeiteintheilung und Lebensweise verändert.

Die Entfernung anlangend, in welcher sich die Planeten von der Sonne befinden, waltet ein eigenthümliches, noch nicht erklärtes, aber auch nur ungefähr zutreffendes Zahlenspiel. Setzt man nämlich die Entfernung des Merkur = 4 und hat im Sinne Millionen Meilen, verdoppelt, fügt dann hinzu 1.3, 2.3, 4.3, 8.3, 16.3, 32.3, 64.3 ꝛc. und verdoppelt, so hat man die etwaige Entfernung in Millionen Meilen. Dabei gelten die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter als einer.

Also Merkur = 4
Venus = 4 + 1.3
Erde = 4 + 2.3
Mars = 4 + 4.3
Die Planetoiden = 4 + 8.3
Jupiter = 4 + 16.3
Saturn = 4 + 32.3
Uranus = 4 + 64.3
Neptun = 4 + 128.3
} .2 Millionen Meilen.

Nach diesen Entfernungen läßt sich auch leicht ermessen, daß für die weiter entfernten Planeten der Durchmesser der Sonne bedeutend abnimmt, während derselbe für die näheren wächst.

Ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne = 20682000 Meilen = 1, so sind die Entfernungen der einzelnen Planeten, wie folgt: (s. Diesterweg pop. Himmelskunde rc. 5. Afl., Berlin 1855. S. 215, sowie wegen der folgenden Tabellen, S. 213. 214.) Merkur 0,39; Venus 0,72; Erde 1; Mars 1,52; Flora 2,20; Melpomene 2,29; Viktoria 2,35; Vesta 2,36; Iris 2,37; Metis 2,39; Phokäa 2,40; Hebe 2,42; Euterpe 2,43; Lutetia 2,43; Fortuna 2,44; Massilia 2,45; Parthenope 2,49; Thetis 2,49; Irene 2,55; Asträa 2,57; Egeria 2,58; Proserpina 2,59; Thalia 2,64; Eunomia 2,65; Juno 2,66; Ceres 2,77; Pallas 2,77; Kalliope 2,91; Psyche 2,94; Themis 2,07; Hygiea 3,15; Jupiter 5,20; Saturn 9,54; Uranus 19,18; Neptun 30,20. Die Anzahl der kleinen Planeten ist seitdem um mehrere gewachsen.

Die wichtigsten Entdecker sind Herschel, 13. März 1781, (Uranus), Piazzi, 1. Jan. 1801, (Ceres, Berechner Gauß), Olbers, (Pallas, 28. März 1802, Vesta, 29. Mai 1807), Harding, (Juno, 1. September 1804). Der Franzose Le Verrier als Berechner und Dr. Galle in Berlin als Entdecker (29. Septbr. 1846). Unter den neueren Entdeckern sind hervorzuheben der Postsekr. Henke in Driesen in der Neumark, der Sekr. an der Sternwarte zu London, Hind, Graham in Irland, de Gasparis in Neapel, Luther in Bilk, Chakornak in Marseille, Goldschmidt in Paris rc.

Planeten.	Mittlere Entfernung von der Sonne in Millionen Meilen.	Jährliche Umlaufszeit.	Mittlere Geschwindigkeit in 1 Sek., in Meilen.	Neigung der Bahn gegen die Erdbahn.	Achsendrehungszeit o. Sterntag.	Geschw. der Achsendrehg auf dem Äq. in 1 Sek. in par. F.	Abplattung an den Polen.	Neigung des Äq. gegen die Erdbahn.	Größe des Durchmessers des Äq. in Meilen.
Merkur . .	8	88 T.	6,6	7°	24 St. 5 M.	541	—	$28\frac{1}{2}$°	671
Venus . .	14,9	224 „	4,8	3° 21′	23 „ 21 „	1420	—	$24\frac{1}{2}$°	1710
Erde . . .	20,7	365 „	4,1	— —	23 „ 56 „	1447	1/300	$23\frac{1}{2}$°	1720
Mars . .	31	1 J. 321 „	3,3	1° 51′	24 „ 37 „	800	—	$24\frac{1}{2}$°	892
Flora . .	46	3 „ 89 „	—	5° 52′	— —	—	—	—	—
Vesta . .	48	3 „ 229 „	2,6	7° 7′	— —	—	—	—	60 (?)
Iris . . .	49	3 „ 235 „	—	5° 27′	— —	—	—	—	—
Hebe . .	50	3 „ 265 „	—	14° 42′	— —	—	—	—	—
Asträa . .	53	4 „ 52 „	—	5° 20′	— —	—	—	—	—
Juno . .	55	4 „ 131 „	2,5	13° 2′	— —	—	—	—	60 (?)
Ceres . .	57	4 „ 223 „	2,4	10° 36′	— —	—	—	—	?
Pallas . .	57	4 „ 225 „	2,4	34° 35′	— —	—	—	—	150 (?)
Jupiter . .	107	11 „ 312 „	1,8	1° 18′	9 „ 55 „	43771	1/17	$23\frac{1}{3}$°	20018 Pol 18524
Saturn . .	197	29 „ 154 „	1,3	2° 29′	10 „ 29 „	31012	1/10	$22\frac{1}{2}$°	16305 Pol 14696
Uranus . .	396	83 „ 271 „	0,9	0° 46′	?	—	1/9	$23\frac{2}{3}$°	7466
Neptun . .	620	168 „ —	0,6	1° 47′	?	—	—	$22\frac{1}{2}$°	9070

Himmelskörper.	Kubikinhalt; Erde = 1.	Masse; Erde = 1.	Dichtigkeit; Erde = 1.	Dichtigkeit; Wasser = 1	Was 100 Pfund wiegen.	Fallhöhe in der 1. Sek. in par. F.	Lichtstärke; Erdlicht = 1.	Zeit bis zur Ankunft des Sonenlichts.
Sonne . .	1415225	345936	0,25	1,4	2836	428	—	—
Merkur . .	0,05	0,06	1,2	6,6	48	7,2	7	3,8
Venus . .	0,99	0,09	0,9	5	90	14	1,9	6,3
Erde . . .	1	1	1	5,6	100	15	1	$8\frac{1}{4}$
Mars . .	0,15	0,14	0,97	4,8	50	7,5	0,43	13
Flora . .	—	—	—	—	—	—	1/7 (Flora bis Pallas)	26 (Flora bis Pallas)
Vesta . .	—	—	—	—	—	—		
Iris . . .	—	—	—	—	—	—		
Hebe . .	—	—	—	—	—	—		
Asträa . .	—	—	—	—	—	—		
Juno . .	—	—	—	—	—	—		
Ceres . .	—	—	—	—	—	—		
Pallas . .	—	—	—	—	—	—		
Jupiter . .	1491	339	0,24	1,28	Äq. 217 Pol 283	Äq. 32 Pol 40	1/27	44
Saturn . .	772	100,4	0,12	0,66	Äq. 75 Pol 137	Äq. 11 Pol 20	1/91	1 St. 20 M.
Uranus . .	82	20	0,18	0,96	76.(105)	11	1/368	2 " 12 "
Neptun . .	94	18	0,32	1,25	36	20	1/1400	4 " 21 "

Durch Benutzung der beigegebenen Tabellen und durch Vergleichung der einzelnen Angaben mit denen, welche die Erde betreffen, läßt sich ein lebendiges, anschauliches, charakteristisches Bild der Planeten und ihrer ganzen Weise und der Art und Weise, wie etwa die Bewohner leben könnten, geben. Der Volksschriftsteller Bernstein hat derartige Schilderungen und Kombinationen in recht geschickter Weise versucht; seine Schriften eignen sich für Schul- und Volksbibliotheken ganz besonders.

Monde, (Trabanten oder Satelliten) finden wir außer der Erde zunächst bei dem Jupiter und zwar 4, welche einige Menschen mit bloßem Auge gesehen haben wollen und durch Fernröhre von nicht allzustarker Vergrößerung sich wahrnehmen lassen. Sie können eine sehr verschiedenartige Stellung einnehmen oder Anordnung, auch alle 4 auf einer Seite; sie bewegen sich von West nach Ost und brauchen 1769; 3551; 7155 und 16689 Tage zu ihrer Umlaufszeit bei einer Entfernung von 6,05; 9,62; 15,35; 27 Jupitershalbmessern. Ihre Bahn weicht sehr wenig von der Ebene des Jupitersäquators ab; daher bei jedem Umlaufe eine Verfinsterung, zumal da sie dem unverhältnißmäßig großen Planeten sehr nahe stehen. Auf den Jupiter werfen sie einen schwarzen Schatten. Die scheinbaren Durchmesser sind 1″; 0,9″; 1,5″ und 1,3″, woraus sich die wirklichen von 529; 475; 776; 664 geogr. Meilen ergeben.

Der Saturn hat 8 Trabanten; den ersten und zweiten entdeckte Herschel (1788 u. 1789), erst später 1836 u. 1838 wurden dieselben von Lamont und von den Beobachtern der Römischen Sternwarte wieder gesehen; Kassini den 7ten, 5ten, 4ten u. 3ten (1671—1687); den 6ten und größten Huyghens, welcher am leichtesten sichtbar ist, während die andern sehr gute Instrumente erfordern; der 8te wurde von Bond in Nordamerika und Lossel in England zuerst (1848) beobachtet. Nur die Bahn des 7ten Trabanten ist gegen den Äq. des Saturn wesentlich geneigt, die andern fallen ziemlich in die Ebene des Äq. Etwas ganz Eigenthümliches hat aber der Saturn an dem Ringe, welcher als eine Art abgetrennter ringförmiger Theil des Saturnäquators denselben frei umschwebt, dunkel ist, von der Sonne beleuchtet wird und in den verschiedenen Stellungen des Saturn sich ganz verschieden projicirt. Man schätzt seine

Dicke von 20—100 geogr. Meilen, giebt ihm hohe Berge von 200—300 Meilen, und nimmt neuerlich an, daß er in 2, 3 oder 5 einzelne unter sich parallele Ringe zerfalle; zwischen je zweien, sowie zwischen dem innersten und dem Saturn befände sich dann eine große Kluft. Galiläi stellte den Saturn mit seinem Ringe als einen aus 3 Theilen bestehenden Körper dar; Hevel als eine mit 2 Henkeln versehene Kugel; das wahre Verhältniß entdeckte erst Huyghens. Der innere Ring steht vom Saturn um 5000 Meilen ab; die Breite des inneren Rings beträgt 3800 Meilen, der Zwischenraum zwischen dem ersten und zweiten Ringe vom Saturn an gerechnet 400 Meilen; auch den innern und äußern Halbmesser der Ringe hat man berechnet.

Herschel entdeckte am Uranus mit seinem Fernrohr 6 Monde; später will man durch vollkommnere Fernröhre einen 7ten und 8ten Mond wahrgenommen haben; allein vollkommen sicher ist nur die Existenz der von Herschel 1787 entdeckten, welche sich in ganz abnormer Weise von Osten nach Westen bewegen sollen (?), weil ihre Bahnen fast rechtwinklig auf der Uranusbahn stehen. (Lehrb. der kosm. Physik von Dr. Müller, S. 171.)

Am Neptun haben die Engländer Lossel und Challis zwei Monde entdeckt und Struve in Pulkowa bei Petersburg hat die Umlaufszeit des ersten in 5 Tagen 21 St. 15 M. bestimmt; Andere sprechen nur von einem nicht weiter bekannten Monde des Neptun.

Die Sonne mit ihren Planeten und Trabanten und den noch zu erwähnenden Kometen bildet ein sogenanntes Sonnensystem. Die Ansicht des Alterthums faßte Klaudius Ptolemäus (160 n. Chr. zu Alexandria) zusammen; die Erde steht im Universum fest; das ganze Firmament bewegt sich in 24 Stunden von Ost nach West, die Sonne in 365 Tagen um die Erde in spiralförmigem Laufe. Diese Ansicht behielt ihre Geltung bis zu Korpernikus (Niklas, geb. 19. Febr. 1473 zu Thorn, † 1543), welcher die Sonne in die Mitte setzt, um welche sich die Erde mit den übrigen Planeten dreht. Tycho de Brahe suchte die alte Ansicht mit der neuen zu vermitteln, was aber, wie alle derartigen Versuche schlecht gelang. Johann Kepler, dem Grundgedanken des Kopernikus huldigend, erfand die 3 großen

Gesetze: die Bahnen der Erde und der Planeten sind Ellipsen; der Fahrstrahl oder radius vector beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume; die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Würfel ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Den Grund dafür entdeckte Isaak Newton, der berühmte Engländer, durch Erfindung des Schweregesetzes; jede Bahn und Bewegung ist durch eine tangentiale und centripentale Kraft (Flieh- und Schwerkraft) bedingt.

Die periodisch (gegen den 10. August, Laurenziusstrom und in der Zeit vom 12.—14. November) wiederkehrenden Sternschnuppenschwärme werden dadurch erklärt, daß die Erde in dieser Zeit 2 mal einen Ring durchschneide, welcher Stoffe enthalte, welche sich beim Durchgange der Erde entzündeten. Die Feuerkugeln, welche Meteorsteine beim Zerplatzen hinterlassen, welche eben gefallen noch heiß sind, bieten ähnliche Erscheinungen dar. Man hat Meteorsteine von einigen 100 Pfund gefunden. Die Sternschnuppen, Feuerkugeln und Meteorsteine sind wahrscheinlich planetenähnliche, um die Sonne kreisende Massen, welche in den Anziehungskreis der Erde kommen; die von brennbaren Gasen gebildete Atmosphäre derselben entzündet sich wahrscheinlich am Sauerstoffe der Luft.

Die Kometen oder Haarsterne

haben eine sehr verschiedenartige Gestalt; hauptsächlich bestehen sie aus Kern, Nebelhülle und Schweif, welcher meist von der Sonne abgewendet ist und oft 60, 90, ja 100° des Himmels einnimmt. Sie bewegen sich wahrscheinlich in sehr langen Ellipsen um die Sonne (Littrow), einige angeblich in Hyperbeln und Parabeln, welche nicht zur Sonne zurückkehren, und haben bei ihrer Wiederkunft nicht selten ihre Gestalt verändert. Wahrscheinlich (s. die Kometen von Russel Hind, deutsch mit Anm. und Zusätzen von Mädler) bestehen dieselben, deren Anzahl in den nördlichen Theilen des Himmels geringer ist, aus unendlich feinen Staubtheilchen (Hind, S. 204 2c.), so daß wir wohl, trotz der größten Geschwindigkeit der Kometen, durch dieselben ohne irgend einen Erfolg oder eine Gefahr hindurchgehen können; ja man

will sogar durch den Kern Sterne kleinerer Größe größer gesehen haben, (S. 23), was unglaublich klingt. Wirkt aber ein Komet nicht mechanisch, so könnte er chemisch wirken; dagegen spricht aber wieder die höchst geringe Dichtigkeit, da dieselben höchstens $^1/_{20000}$ vom specif. Gewichte der Luft haben. Gasförmig können die Kometen nicht sein, denn das Gas bricht den Lichtstrahl und schwächt ihn zugleich. Der Zusammenhang unter den unendlich losen Staubtheilchen ist oft nicht groß genug, um die Form der Kometen zu behalten. Die alten Vorurtheile von dem Einfluß der Kometen auf Wärme, Krieg, Pest ꝛc. sind längst beseitigt; weder erfahrungsmäßig, noch rationell rechtfertigt sich Derartiges und es war umsonst, wenn ein Papst ein täglich mehrmaliges Läuten der Glocken anordnete, was zum Kreuz mancher Schulmeister geworden ist. Nach den von Arago gemachten Versuchen ist es sicher, daß die Kometen mit geborgtem Lichte leuchten.

Unter den bis jetzt berechneten Kometen, deren Wiederkehr die Rechnung ebenfalls mit Erfolg gekrönt hat, ist 1) der nach Halley genannte, welcher eine Umlaufszeit von 76 Jahren hat. Im Jahre 1758 erschien er; vorher rechnete besonders der ausgezeichnete französische Geometer Klairaut, mit einer ganz besondern Ausdauer; dabei hat ihm Madame Lepaute vortrefflich beigestanden; damals sah ihn zuerst ein Landmann Palitzsch zu Prohlis bei Dresden am Weihnachtsabend 1758 durch ein Fernrohr von 8 F. Brennweite. Auch der französische Baron Damoiseau gewann durch seine Rechnungen einen von der Turiner Akademie über die Störungen in der Bahn des Kometen aufgestellten Preis; 2) der Encke'sche Komet, früher von Miß Karoline Herschel entdeckt (am 7. Novbr. 1795), der Schwester des berühmten Sir William Herschel, welche 1848 zu Hannover 98 J. alt starb, wurde durch die besonders feinen und schweren Rechnungen von Encke bestimmt (Berliner Sternwarte) und nach Encke benannt; seine Umlaufszeit $3\frac{1}{4}$ J.; 3) der Komet des Olbers, 74 J. Umlaufszeit; 4) der Komet des Biela, $6\frac{3}{4}$ J. Umlaufszeit; 5) der Komet von Faye in Paris entdeckt (1843) $7\frac{5}{12}$ J.; 6) der Komet des de Viko in Rom (1844) $5\frac{1}{2}$ J.; 7) des Brorsen, damals Studenten in Kiel (1846) $5\frac{7}{12}$ J.; 8) des Dr. d'Arrest in Leipzig (1851) $6\frac{1}{2}$ J. Es ist sehr

interessant die Hind-Mädler'sche Schrift über die Kometen zu lesen, in welcher zugleich eine geschichtliche Darstellung der Entdeckung gegeben ist.

Man erwartet zwischen dem Jahre 1858 und 1860 einen großen Kometen, den man schon seit 1856 erwartet hat; in Bezug auf seine Rückkehr zur Sonne herrscht eine Ungewißheit von 2 Jahren, je nachdem Halley's oder Hind's Kometenbahnelemente zu Grunde gelegt werden. (s. Hind S. 127. ꝛc.)

Hind giebt auch eine Kometentabelle, welche seit 1854 vermehrt worden ist.

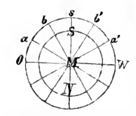
Die Fixsterne.

Fixsterne, stellae fixae, ehemals genannt, weil sie fest und unbeweglich am Himmel ständen, ohne ihre Stelle gegen andere Fixsterne zu ändern und also den unbeweglichen Hintergrund bildeten, auf welchem sich die Bahnen der zu unserem Sonnensystem gehörigen Weltkörper darstellten; ihre zweite Eigenschaft besteht darin, daß sie eignes Licht haben. Zu Kopernikus Zeit wußte man von einer scheinbaren Bewegung der Fixsterne, welche durch die behauptete Bewegung der Erde hervorgerufen würde, noch Nichts; auch von einer wirklichen Bewegung derselben noch Nichts. Ja, man machte dem Kopernikus aus der damals noch nicht bemerkten Bewegung der Fixsterne einen Vorwurf gegen seine neue Hypothese. Erst in neuerer Zeit hat sich die Ansicht des Kopernikus bestätigt, daß die Entfernung der Fixsterne zu groß und die Einrichtung unserer optischen und Meßinstrumente noch ungenügend sei. Heute kann man die Fixsterne nur noch für selbstleuchtende Punkte erklären, welche Planeten mit Monden um sich schwingen, die wir freilich nicht erkennen können und welche sich selbst wahrscheinlich wieder um größere Fixsterne oder Schwerpunkte in gewissen Zeiträumen herumschwingen. Wenn man durch gute Fernröhre sieht, so verschwindet der Strahlenkranz der Fixsterne; sie erscheinen uns als dunkle untheilbare Punkte ohne alle Ausdehnung, so daß von einer Größenmessung derselben keine Rede sein kann. Und doch spricht man von der Größe der Fixsterne oder von Fixsternen erster, zweiter ꝛc. Größe; man hat dann dabei ihre Lichtstärke als Maßstab im Auge und nennt Sterne sechster Größe solche, welche man noch mit bloßem Auge

sehen kann. In unserem Deutschland und mittlerem Europa sieht man über 3000, etwa 3250 Fixsterne mit bloßem Auge; sie sind in verschiedenen Mengen an verschiedenen Punkten des Himmels gruppirt; wie es scheint ohne eine bisher zu bemerkende Regel; besonders dicht zusammengedrängt befinden sich dieselben in der Milchstraße. Bekanntlich umzieht oder umzog man früher gewisse Sterngruppen so mit Linien, daß irgend eine Figur, ein Sternbild entstand; zur leichtern Orientirung spricht man von dem Stern α, β, γ rc. des Sternbildes, je nach der Helligkeit und Lichtstärke. In den Fixsternkatalogen findet man als bei uns sichtbare Fixsterne angegeben, 14 Fixsterne erster, 51 zweiter, 153 dritter, 325 vierter, 810 fünfter, 1871 sechster Größe, welche noch mit bloßem Auge erkennbar sind, 15 veränderlicher Größe; alle übrigen kann man nur durch das Fernrohr wahrnehmen.

Welche unter den bei uns sichtbaren Fixsternen sind die vorzüglicheren, welche man sich einprägen muß, da man nicht alle merken und wissen kann? Nördlich vom Äquator des Himmels: die Wega oder α der Leyer; Kapella oder α des Fuhrmanns; Arkturus oder α des Bootes; Aldebaran oder α des Stiers; Regulus oder α des Löwen; Atair oder α des Adlers; Pollux oder β der Zwinglinge; Prokyon oder α des kleinen Hundes; Beteigeuze oder α des Orion. Südlich vom Äquator: Rigel oder β des Orion; Sirius oder α des großen Hundes, der hellste Fixstern; Spica oder α der Jungfrau; Antares oder α des Skorpions; Fomalhaut oder α des südlichen Fisches. Ferner sind noch zu bemerken der Polarstern oder α des kleinen Bären; Algenib oder α des Perseus; der große Bär hat 6 Sterne zweiter Größe, welche mit einem Sterne dritter Größe die Konstellation bilden, welche Wagen heißt (α, β, ζ im großen Bären heißen Dubhe, Merak und Mizar); Orion und Stier gehören zu den schönsten Sternbildern. Wie lernt man aber die genannten Sternbilder und Sterne kennen? Entweder durch unmittelbare Anschauung und Nennung der in den Abendstunden der verschiedenen Monate sichtbaren Sterne; oder durch einen Fixsternkatalog, in welchem angegeben ist, um welche Abendstunde ein bestimmter Stern in einer bekstimmten Höhe über dem Horizonte im Meridiane steht, wobei man freilich noch eines Winkel-

instruments bedürfte, welches sich in der Ebene des Meridians befände, zu welchem Zwecke man die Mittagslinie kennen müßte. Am einfachsten und zweckmäßigsten aber würde es sein, einen Himmelsglobus für eine bestimmte Stunde des Abends so zu orientiren, daß derselbe uns das Bild unseres Himmels für den fraglichen Augenblick darstellt, so daß man nur durch gerade Linien von den Sternen des Himmels zu den entsprechenden des Globus gelangte (durch Alignement). Um aber den Himmelsglobus zu orientiren, bringe man 1) denselben in den Meridian, so daß die Ebene des messingenen Meridians mit der Ebene des betreffenden Erd- und Himmelsmeridians zusammenfällt. Dieß geschieht entweder durch den Kompaß, indem man die Magnetnadel um etwa 18° nach Osten dreht (Deklination) oder durch anderweite Bestimmung der Mittagslinie, welche Vorrichtung auch noch zu andern Zwecken benutzt werden kann. Zur Bestimmung der Mittagslinie könnte man in einem Punkte einer wagerechten Tafel einen senkrechten Stab errichten und den Schatten desselben im Mittage wenn die Sonne im Meridiane steht und der Schatten am kürzesten ist beobachten, das Ende des Schattens mit dem Fußpunkte des Stabes verbinden; die Richtung der Geraden würde die Richtung der Mittagslinie andeuten. Man könnte aber auch eine Anzahl koncentrischer Kreise in eine wagerechte Ebene legen und im gemeinschaftlichen Mittelpunkte einen senkrechten Stift errichten. Zu einer gewissen Vormittagsstunde wird die Spitze des Schattens den äußersten Kreis berühren, ebenso zu einer bestimmten Nachmittagsstunde; ebenso den vorletzten, drittletzten u. s. w. Kreis. Halbirt man dann die zwischen den Vormittags- und Nachmittagspunkten liegenden Kreisbögen, so erhält man 2 oder mehrere Punkte, durch welche die Mittagslinie gehen müßte, die sich dann leicht ziehen ließe. Der wahre, nicht mittlere Mittag tritt ein, wenn der Schatten die Mittagslinie deckt. Mit einer solchen Vorrichtung kann man z. B. auch die östliche oder westliche Abweichung der Sonne vom Südpunkte zu einer bestimmten Stunde (Azimut), Morgen- oder Abendweite; ferner die Erhebung der Sonne über den Horizont (Sonnenhöhe) und endlich die Größe des Bogens finden, um welchen die Sonne, wenn sie im Meridiane steht, noch vom Zenith absteht (Zenithdistanz). So ist a'Ms, b'Ms, bMs



und aMs ꝛc, das Azimut; und wenn die Spitze des Stiftes A heißt, so wäre AbM, AsM ꝛc. die Sonnenhöhe und z. B. bAM ꝛc. die Zenithdistanz. Hat man aber den Globus nach der Himmelsgegend orientirt, so daß seine Meridianebene mit der Himmelsmeridianebene zusammenfällt, so muß man dafür sorgen, daß 2) der jeweilige Punkt des Erdglobus der oberste ist und über demselben unser Zenith liege oder daß unser Zenith am Himmelsglobus der oberste Punkt werde; wir hätten uns dann eigentlich in den Mittelpunkt des Himmelsglobus hinein zu denken, befinden uns aber jenseits an der Oberfläche. Dieß geschieht, wenn wir den Nordpol des Himmels sich um soviele Grade des Meridians (messingenen Rings am Globus) über den Horizont erheben lassen, als unsere geographische Breite beträgt, weil die geographische Breite der Polhöhe gleich ist. Für Eisenach müßte man also die Polhöhe 50° 58′ 4″ annehmen. 3) Müßte man aus einem astronomischen Kalender wissen, in welchem Sternbilde die Sonne in einem bestimmten Monate und an welchem Punkte des Bogens von 30° die Sonne gerade in der Ekliptik für einen bestimmten Tag des Monats steht. 4) Führt man diesen Punkt der Ekliptik unter den messingenen Meridian, so stellt uns der Globus den Himmel dar, wie er zur Mittagsstunde ist — wenn die Sonne auf einen Augenblick verdunkelt würde, könnten wir das Bild des Himmels im Großen sehen, was uns der Globus im Kleinen darstellt. Wir stellen den Zeiger der Stundenrose, welche am Nordpole angebracht ist, auf 12 Uhr Mittags; dann drehen wir den Globus von Osten nach Westen, bis der Zeiger an der Stundenrose 9 Uhr zeigt — dann stellt uns der Globus den Himmel für 9 Uhr Abends dar und wir können uns leicht am Himmel zurecht finden, wenn wir z. B. Ende Jan. Abends 9 Uhr den Orion sehend, von seinen Hauptsternen gerade Linien zum Globus ziehend, die entsprechenden Sterne auf dem Globus finden. Wie ist es aber möglich gewesen, die Sterne am rechten Orte auf dem Globus einzutragen? Denken wir uns einen Globus nur mit weißem Papiere überzogen, so müssen wir zunächst einen größten Kreis um denselben legen und den Nord-

und Südpol bestimmen, indem wir einen zweiten größten Kreis, den Meridian legen, welcher den ersten oder Äquator zweimal rechtwinklig durchschneidet. Denken wir uns dann den Meridian in 90 gleiche Theile getheilt und durch dieselben parallel zum Äquator Kreise gelegt, Parallelkreise, ähnlich, wie bei der Bestimmung der geographischen Breite auf Erden, so muß ein Stern entweder auf dem Äquator oder einem der Parallelkreise liegen. Läge derselbe zum Beispiel auf dem 50ten Parallelkreise, so betrüge das Bogenstück des durch ihn gelegten Meridians bis zum Äquator 50°. Dieses Stück heißt die Deklination oder Abweichung des Sternes, welche eine nördliche oder südliche sein kann. Ein Stern im Nordpol des Himmels hat 90° Deklination, ein Stern im Äquator hat 0° Deklination. Das Bogenstück der Deklination und das Bogenstück vom Sterne bis zum Nordpol (die Poldistanz) machen zusammen 90°. Um also auf unserer nördlichen Halbkugel die Deklination der Sterne zu bestimmen, braucht man nur die Poldistanz mit einem Winkelinstrumente zu messen und von 90° abzuziehen. Wissen wir aber, daß ein Stern auf dem 50ten Deklinationskreise am Himmel liegt, so kennen wir doch unter den unendlich vielen Punkten desselben noch nicht den Punkt, in welchem gerade der Stern steht. Man müßte also ähnlich, wie bei der Bestimmung der Lage eines Punktes auf der Oberfläche der Kugel die geographische Länge oder Abweichung von einem als ersten angenommenen Meridiane nach Osten oder Westen andeuten. Dieser Meridian muß durch den Frühlingspunkt gelegt werden.

Der Frühlingspunkt aber ist derjenige Punkt, in welchem sich die als sich bewegend gedachte Sonne bei der Frühlings-, Tag- und Nachtgleiche um den 20.—21. März bei ihrer Kulmination befindet oder derjenige Punkt, in welchem die am 21. März rein in Osten aufgehende, den Himmelsäquator beschreibende Sonne die Ekliptik schneidet oder den größten Kreis, welcher den Äquator auf dem Globus unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}°$ schneidet. Zur Bestimmung dieses Punktes muß man an den Mittagen, welche vor und nach dem 20.—21. März liegen, die Sonnenhöhe im Meridian mit einem Winkelinstrumente messen. Da die geographische Breite von Eisenach 50° 58′ 4″ beträgt, so muß die

Sonnenhöhe im Moment des Frühlings im Meridiane = 90° — 50° 58′ 4″ betragen oder 39° 1′ 56″. Fände man nun zu Mittag den 21. März gerade diese Höhe der Sonne, so hätte man den Frühlingspunkt ohne alle weitere Rechnung; fände man aber die Sonnenhöhe zu Mittag den 20. März 39° 1′ und den 21. März 39° 2′ 20″, so wäre der Durchgang zwischen den Mittagen des 20. und 21. März erfolgt. Der Höhenunterschied in 24 Stunden beträgt also 1′ 20″ oder 80″; es kommen also auf eine Stunde $^{80}/_{24}$″ Höhenzunahme = $^{10}/_{3}$″ = $3\frac{1}{3}$″. Soll also die Sonne von der Höhe 39° 1′ zu der Höhe 39° 1′ 56″ emporsteigen, so braucht sie soviel Stunden, als $3\frac{1}{3}$ in 56 enthalten ist oder $16\frac{4}{5}$ Stunden. Um soviel Stunden nach dem Mittage des 20. März müßte der Durchgang des Sonnenmittelpunkts durch den Frühlingspunkt Statt finden. Kennt man aber den genannten Frühlingspunkt, welcher von einem Sternbilde um irgend ein Bogenstück des Äquators absteht, so kann man durch denselben einen Meridian legen und dann von Süd nach Ost auf dem Parallelkreise, auf welchem der Stern liegt, oder, was dem Erfolge nach dasselbe ist, auf dem Äquator die Abweichung von Süd nach Ost, oder die gerade Aufsteigung, Rektascension des Sternes messen. Die Rektascension kann entweder in Graden angegeben werden oder in Stunden oder Zeit, wobei 24 Stunden = 360° sind. So findet man für α des Orion eine Rektascension 5 St. 47 Min. 19 Sek. oder in Graden 86,83° und eine nördliche Deklination von 7° 22′ 32″; für die Wega (α der Leyer) 18 St. 32′ 2″ und 38° 39′ 3″, für α im großen Bär 10 St. 54 M. 44 Sek. und 62° 31′ 57″. Die Rektascension würde der geographischen Länge um so mehr entsprechen, wenn man von dem durch den Frühlingspunkt gehenden Meridiane nach Osten und Westen rechnete.

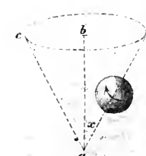
Anstatt die Lage der Sterne durch das genannte Liniensystem festzulegen, kann man dieß auch nach der Ekliptik thun. und nach dem durch ihren Pol und den Frühlingspunkt gelegten Meridiane; die Entfernung von der Ekliptik nach dem Pole derselben hieße Breite, die Entfernung vom Frühlingspunkte oder von dem durch den Pol der Ekliptik und den Frühlingspunkt gehenden Meridiane auf einem zur Ekliptik parallelen Kreise gemessen, hieße Länge.

Eine dritte, aber von der Zeit abhängige Art wäre die Abmessung nach dem Horizonte und dem Meridiane, welcher durch den Pol des Horizonts, das Zenith und den Frühlingspunkt gelegt werden kann. Ein Stern liegt dann entweder im Horizont oder auf einem von den 90 dem Horizonte parallelen Kreisen, welche durch die 90 Theilpunkte des Meridians gelegt sind. Diese parallelen Kreise heißen auch Höhenkreise oder Almukantharat. Das Bogenstück des Meridians, welches zwischen dem Horizonte und dem Höhenkreise des Sternes liegt, heißt die Höhe des Sternes; seine Entfernung vom Frühlingspunkte oder dem durch das Zenith und den Frühlingspunkt gehenden Meridiane nach Osten oder Westen, welche entweder ein Bogenstück des Horizontes oder des dem Horizonte parallelen Kreises wäre, auf welchem der Stern läge, hieße die Morgen- oder Abendweite, das Azimut. Es ist aber deutlich, daß die Angabe für Höhe und Azimut eine nach der Zeit sich richtende und mit derselben wechselnde sein muß.

Wie man ein Stück der Erdoberfläche mit seinen verschiedenen Punkten in einer Ebene als Landkarte darstellen kann, so läßt sich auch ein Stück der vorgestellten Himmelskugel als Ebene darstellen. In derselben werden nach Rektascension und Deklination, oder nach Breite und Länge verzeichnete Sterne angebracht, wenn auch dieselben wegen ihrer verschiedenen Entfernung von uns nicht in einer und derselben Ebene liegen. Solche Karten heißen Sternkarten.

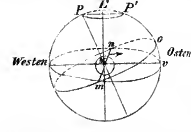
Der Frühlingspunkt ist übrigens, wie man durch Beobachtung gefunden hat, nicht immer ein und derselbe Punkt, in welchem sich Ekliptik und Äquator schneiden, sondern die Ekliptik wird langsam von Osten nach Westen sich fortschiebend, in immer andern Punkten vom Äquator geschnitten. Dieser Rückgang, oder diese Präcession der Tag- und Nachtgleichen, welche übrigens nicht gleichförmig ist, beträgt im Laufe eines Jahrhunderts 1° 23′ 30″ oder in einem Jahre etwa 50″. Vor 2300 Jahren lag der Frühlingspunkt im Sternbilde des Widders, jetzt in dem der Fische; die Länge der Sterne muß wachsen.

Die Präcession hat denselben Erklärungsgrund, wie die Bewegung eines Brummkreisels, dessen Achse nicht, wie ab lothrecht ist, sondern mit der ac einen Winkel x bildet. Wäre keine



Reibung vorhanden, so würde dieselbe einen Kegelmantel beschreiben. Im Sonnensysteme tritt die um die Achse rotirende Erde an die Stelle des Brummkreisels. Die Achse macht einen bestimmten Winkel mit der Ebene der Ekliptik; die Anziehung der Sonne strebt den Winkel zu verkleinern, welchen die Erdachse mit der Geraden macht, welche durch den Mittelpunkt der Erde geht und zur Ekliptik senkrecht steht.

Mit dieser Präcession des Frühlingspunktes von Osten nach Westen hängt noch etwas Anderes, die **Nutation** oder das **Schwanken der Erd- und Weltachse** zusammen. Denn ist



PM die halbe Weltachse und EM die halbe Achse, welche auf der Ekliptik senkrecht steht, mn der Durchschnitt der Ebene der Ekliptik mon mit der Äquatorebene mvn und sollen bei m und n immer andere Punkte des Äquators mit der Ekliptik zum Durchschnitt kommen, so muß sich die mn drehen und mit ihr die MP, welche einen Kegelmantel bilden muß; die krumme Linie PEP' muß aber wegen der Ungleichförmigkeit der Präcession eine Ellipse werden, so daß der Winkel PME oder die Schiefe der Ekliptik innerhalb einer gewissen Zeit ein Minimum und Maximum erreicht, je nachdem die PM am Ende der langen oder kurzen Achse sich befindet. Die große Achse der Ellipse, welche der Nordpol um den Pol der Ekliptik beschreibt, ist 9,6", die kleine 8". Der Frühlingspunkt rückt in 2333 Jahren um 30° oder um ein Sternbild fort. Also müssen wegen der Präcession der Tag- und Nachtgleichen und wegen des Schwankens der Weltachse Länge und Breite der Sterne veränderlich sein.

Aber auch die gegenseitige Stellung der Sterne zu einander, die man ehedem als unveränderlich annahm, weßhalb man die Sterne eben **Fixsterne** oder stellae fixae nannte, ist eine ver-

änderliche, wenn auch erst nach Verlauf eines größern Zeitraumes wahrnehmbare; so steht der Arkturus jetzt um $1\frac{1}{2}^{0}$ etwa von der Stelle entfernt, an welcher derselbe zu Hipparchs Zeiten († 125 v. Chr.) gestanden hat. Außer dieser eigenen nach ganz verschiedenen Richtungen hin Statt findenden Bewegung müssen aber die Fixsterne auch noch eine andere von der jährlichen Bewegung der Erde auf ihrer Bahn abhängige Bewegung zeigen. Denn denken wir die Erde in der Sonnennähe (Winterstellung) und ein halbes Jahr darauf in der Sonnenferne (Sommerstellung), so müssen ja die nach dem Fixsterne gezogenen geraden Linien mit einander einen Winkel bilden, so daß man den Stern in der Richtung der Schenkel zu verschiedenen Zeiten in einer verschiedenen Richtung sehen muß. Ziehen wir in jedem Momente der Bewegung in der Erdbahn gerade Linien und verlängern dieselben ebenso weit über den Stern hinaus, so müssen dieselben mit ihren Endpunkten eine Ellipse bilden, welche der Ellipse entspricht, welche die Erde in 365 Tagen vollendet. Stände die Erde in a, so erschiene uns der Stern in a', von d aus in d' 2c. Dieß Alles würde aber nur unter der Bedingung Statt finden, wenn die Entfernung des Sternes nicht so enorm wäre, daß der Durchmesser der Erdbahn ad, eine Linie von 40 Millionen Meilen dagegen verschwinden oder zu Null werden müßte. Der Winkel asd wäre dann, wenn man die Sache vom Fixsterne aus anschaut, derjenige Winkel, unter welchem man den Durchmesser der Erdbahn sich darstellen sähe oder die sogenannte jährliche Parallaxe. Wüßte man diese jährliche Parallaxe, so könnte man in ähnlicher Weise, wie früher angedeutet wurde, die Entfernung des Fixsternes messen und bestimmen, wenn auch noch nicht die Größe, weil die Fixsterne keinen scheinbaren Durchmesser haben. So lange die Standlinie der Entfernung gegenüber = Null ist, also auch die Parallaxe = Null, also die Linien nach dem Fixsterne parallel, läßt sich von der Messung der Entfernung nicht positiv, sondern nur negativ reden. Die geringste Parallaxe hat man bis jetzt = 0,13″ beim Arkturus, die größte 0,91″ (α des Centaur) gefunden; die kleinste läßt auf 1600000 mal 20000000

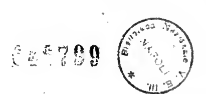
Millionen Meilen schließen — so lange aber keine, gar keine Parallaxe Statt findet, kann der Stern nicht näher, als etwa 4 Billionen Meilen sein; 1° Parallaxe ließe auf 57, 1′ auf 3438, 1″ auf 206265 Halbmesser der Erdbahn Entfernung schließen. Erst im Verlaufe der Zeit von Tycho de Brahe bis auf unsere Zeit, durch Vervollkommnung der Instrumente und bei Gelegenheit anderer Beobachtungen, z. B. über die Abirrung des Lichtes durch Bradley ꝛc., gelang es zuerst dem berühmten Astronomen Bessel, die Parallaxe des Sternes 61 im Schwan zu 0,37″ in einer sehr sinnreichen Weise zu bestimmen, indem er die Stellung des Sternes 61 im Schwan (Doppelstern) zu 2 andern Sternen, 9ter und 10ter Größe verglich. Müller giebt in seiner kosmischen Physik S. 220 nach Peters, der von 33 Sternen und ihrer Parallaxe spricht, die Parallaxe und Entfernung in Erdweiten zu 20 Millionen Meilen von folgenden 4 Fixsternen an: α des Centaur, P. = 0,91″; E. = 220000; 61 im Schwan P. = 0,37″; E. = 550000; Sirius, P. = 0,23″; E = 890000; α der Leyer, P. = 0,21″; E. = 970000; Arkturus, P. = 0,13″; E. = 160000. Man muß bedauern, daß ehemals dem großen Genius Kopernikus solche Thatsachen nicht zur Seite standen, um seinen kleinen Feinden und Gegnern die jährliche Umdrehung der Erde, wie aus der Abirrung des Lichtes, augenscheinlich zu demonstriren. Sie hätten es aber doch nicht begriffen — denn die Bildung schreitet langsam vorwärts und stetig und der Geburtstag der Vernunft liegt in unendlicher Ferne.

Sehr wichtig ist es, daß es durch die Verbesserung der Fernröhre gelungen ist, die Doppelsterne aufzulösen, d. h. da, wo man bisher einen Fixstern zu sehen glaubte, 2, 3, 4, ja 5 Fixsterne zu erkennen. Man kennt jetzt gegen 3000 Doppelsterne und benutzt dieselben, um die Fernröhre bezüglich ihrer Vergrößerung zu prüfen. Die Doppelsterne, von denen einer in der Regel kleiner ist als der andere, nämlich nach der Lichtstärke, zeigen die Eigenthümlichkeit, daß der eine um den andern eine Ellipse beschreibt und zwar in verschiedenen Zeiten und daß die beiden Sonnen selbst um einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt kreisen; der eine braucht 30, der andere 61,74, α der Centaur 77, das γ in der Jungfrau 169, Kastor 153 und σ (Sigma) in

der Krone 608 Jahre. Das Schweregesetz und die Kepler'schen Gesetze gelten also durch das ganze, bis jetzt bekannte Weltall; der Name „Fixstern“ sollte endlich mit dem „eines selbstleuchtenden“ vertauscht werden.

Wenn die eigenen Bewegungen der Fixsterne nach verschiedener Richtung hin erfolgen, so muß die scheinbare Bewegung der meisten Fixsterne nach einem bestimmten Punkte hin in der schon früher angedeuteten entgegengesetzten Bewegung der Sonne nach dem Sternbilde des Herkules hin 260° 44′ Rektasc. 26° 16′ nördl. Deklin., (Herschel, Argelander, Gauß, Struve) oder nach einem Schwerpunkte in der Plejadengruppe, nahe der Alcyone Statt finden (Mädler).

Die Astronomen erzählen uns auch von etwa 22 Sternen, welche während 2000 Jahren zwar erschienen, aber bald wieder verschwunden sind; ebenso von farbigen Sternen; denn einige (5) haben ein röthliches, andere ein weißliches, gelbliches oder bläuliches, goldgelbes oder violettes Licht.



Druck der Engelhard-Reyher'schen Hofbuchdruckerei in Gotha.

